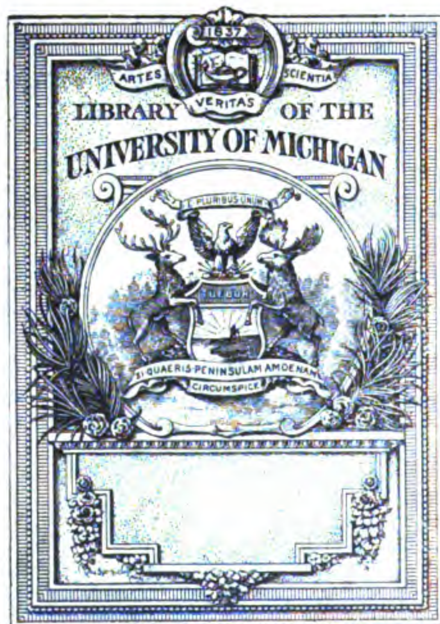
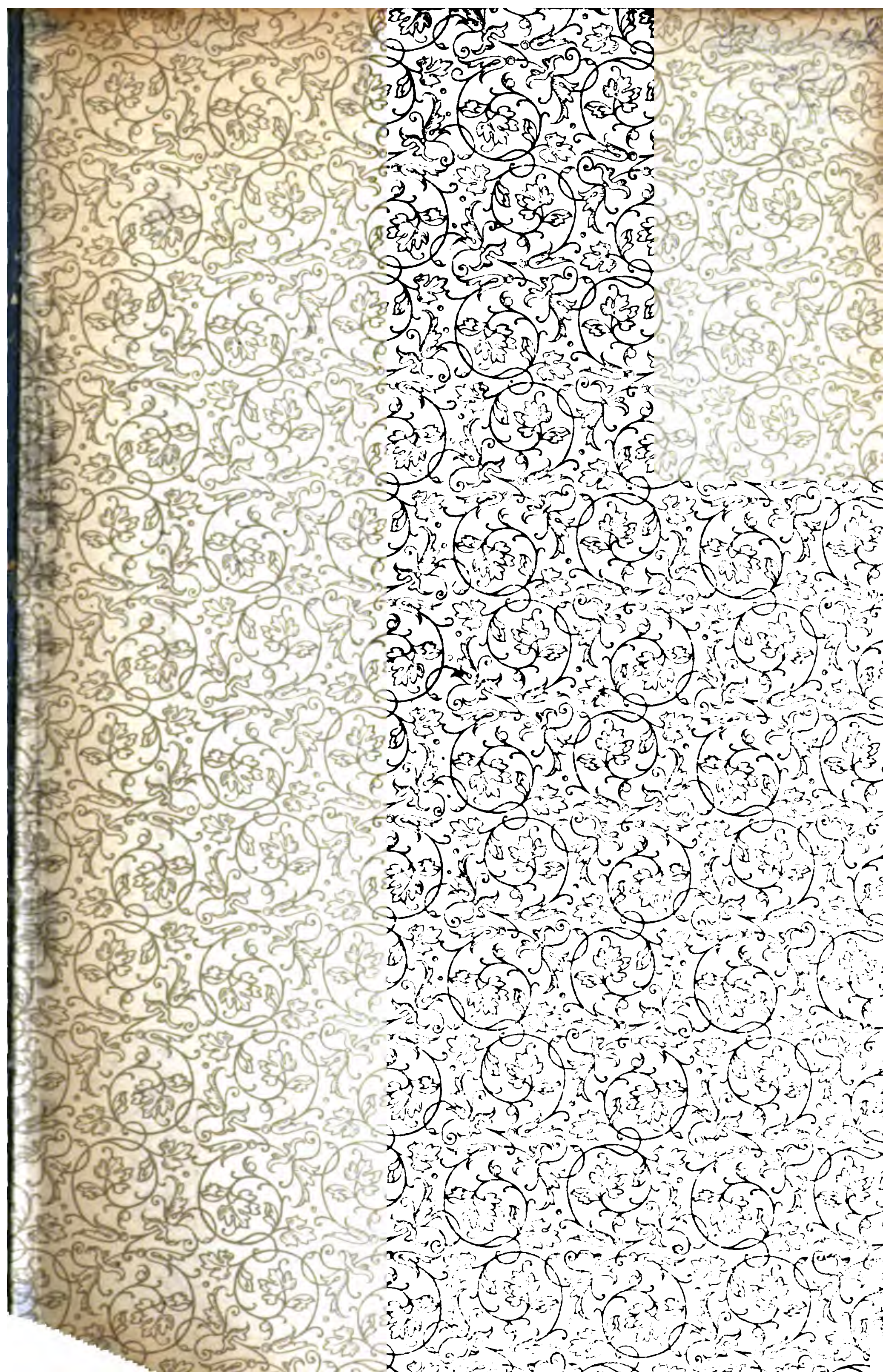

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



LEITFADEN

DER

PRAKTISCHEN PHYSIK

MIT EINEM ANHANGE

DAS ABSOLUTE MASS-SYSTEM

VON

DR. F. KOHLRAUSCH,

PRÄSIDENT DER PHYSIKALISCH-TECHNISCHEN REICHSANSTALT IN CHARLOTTENBURG.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

ACHTE VERMEHRTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Das vorliegende Buch soll als Wegweiser bei physikalischen Messungen dienen. Nachdem die erste, zunächst für meine Praktikanten in Göttingen im Jahre 1869 gedruckte Auflage auch anderweitigen Eingang gefunden hat, habe ich die jetzige durch bessere Anordnung und Vervollständigung zum Gebrauch in weiteren Kreisen tauglich zu machen gesucht.

Die Aufgaben, welche der praktischen Physik gestellt werden können, lassen sich in folgende vier Punkte zusammenfassen. Zunächst steht erfahrungsgemäfs fest, dafs ein Teil der physikalischen Lehren, und zwar vorzugsweise der quantitative, also nicht der unwichtigste, durch bloſses Hören nicht begriffen wird. Interesse und Verständnis für diese Sätze werden nicht durch den bloſsen Vortrag geweckt, wogegen oft die einmalige praktische Anwendung eines Satzes genügt, um den Schüler mit ihm vertraut zu machen. Zweitens gibt es eine Reihe von Aufgaben, deren Ausführung dem Chemiker, Mineralogen, Mediciner, Pharmaceuten oder Techniker bekannt sein soll. Die Vorlesung, wenn sie überhaupt auf eine solche Aufgabe eingeht, kann dieselbe nur in principieller Weise behandeln; von hier aber bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Schritt. Der Stand der Kenntnisse in diesen Dingen macht denn auch den bisherigen Mangel an praktischem Unterricht fühlbar genug: ihre geringe Verbreitung, die oft eine erstaunliche Scheu vor den einfachsten physikalischen Aufgaben zur Folge hat, ist eben so bekannt, wie erschreckend groſs.

Sodann aber liegt für die Physik selbst das Bedürfnis einer Vorschule für die experimentelle wissenschaftliche Forschung vor. Unterrichtsgegenstand kann freilich die eigentliche Forschung nur in sehr beschränktem Maſse sein, wohl aber fordern die

Pflicht und das eigene Interesse von der Physik, dafs sie den künftigen Physiker mit seinem, ich möchte sagen wissenschaftlichen Handwerkszeug vertraut macht. Es bleiben immer noch mehr als genug Einzelheiten übrig, welche bei einer Untersuchung selbständig beschafft werden müssen.

Die genannten drei Disciplinen sind es in erster Linie, welche das Buch in's Auge fafst, indem es Vorschriften zur Ausführung physikalischer Messungen gibt und dabei diejenigen bevorzugt, welche als Anwendungen aufserhalb der Physik oder als Elemente wissenschaftlicher Untersuchung eine besondere Bedeutung haben. Soll auch die vierte Aufgabe, nämlich die Heranbildung physikalischer Lehrer durch Versuche mit Unterrichtsapparaten hereingezogen werden, so glaube ich, dafs auch diese Übungen am besten durch eine passende Auswahl der instrumentellen Mittel mit messenden Aufgaben zu verbinden sind. Dadurch wird die Gefahr vermieden, dafs die Anstellung von Versuchen, welche kein bestimmtes Ziel haben, in Spielerei ausarte. Ein eigentlicher Kursus in Unterrichts-Experimenten würde manchen Schwierigkeiten begegnen; er erscheint aber auch weniger notwendig; denn wer sich in den quantitativen Aufgaben einige Gewandtheit erworben hat, wird auch die Vorlesungsversuche ohne Schwierigkeit bewältigen.

Inhalt und Umfang einer Anleitung zur physikalischen Arbeit werden vor allem durch die Grenze der Genauigkeit bestimmt, bis zu welcher die Aufgaben durchgeführt werden sollen, und darin bleibt natürlich ein weiter Spielraum. Ich habe diejenige Grenze inne zu halten gesucht, bei welcher die um der Einfachheit willen vernachlässigten Korrektionen mindestens nicht gröfser sind, als die unfreiwilligen Beobachtungsfehler bei den gewöhnlich gebrauchten Instrumenten und bei mittlerer Geschicklichkeit im Beobachten. Bei den sehr aus einander gehenden individuellen Zwecken und Mitteln kann ich selbstverständlich nicht daran denken, Jedermanns Wünschen gerecht geworden zu sein, vielmehr wird ohne Zweifel der Eine noch eine gründlichere Behandlung vermissen, wo dem Anderen die Strenge schon als Pedanterie erscheint.

An bestimmte Instrumente schliefsen sich die Anleitungen, wo es möglich war, nicht an; auch Beschreibungen von Appa-

raten finden sich selten, denn letztere sind ja dem Arbeitenden meistens gegeben, und in den Lehrbüchern der Experimentalphysik findet er fast immer Abbildungen und Beschreibungen. Nur bei einigen neueren oder weniger bekannten Apparaten ist eine Ausnahme gemacht worden.

Die ausführliche Begründung aller Rechnungsregeln würde zu weit gehen, doch sind häufig kurze Beweise und Erläuterungen (mit kleiner Schrift) beigefügt worden, um dem Arbeitenden die Einsicht in den Zusammenhang zu erleichtern. Zum Verständnis der magnetischen und elektrischen absoluten Messungen, denen eine übersichtliche Litteratur fehlt, auf welche aber die praktische Physik das gröfste Gewicht legen mufs, wird im Anhang eine kurze Darlegung der wichtigsten Punkte des absoluten Mafssystems gegeben.

Der mathematische Apparat beschränkt sich, aufser an wenigen Stellen in den Erläuterungen, auf Elementar-Mathematik.[1])

Von den zum gröfseren Teil neu berechneten Tabellen dürften manche auch für Physiker nützlich sein. Ich habe mich bemüht, dieselben auf das beste Beobachtungsmaterial zu gründen.

Im Mai 1872.

Zur achten Auflage.

Im Verlaufe von vierundzwanzig Jahren seit der obigen Darlegung, in denen der Inhalt des Leitfadens sich reichlich verdreifacht hat, sind auch die Zwecke etwas erweitert worden. Das Buch galt ursprünglich dem physikalischen Übungspraktikum, an dessen Wiege es entstanden war, und soll ihm noch gelten. Es sucht der Absicht gerecht zu werden, dafs der Praktikant das Material finden soll, dessen er neben dem in der Vorlesung Gelernten zum Verständnis seiner Aufgabe bedarf, und gibt den Weg zu ihrer Ausführung im allgemeinen an. In letzterer Hinsicht aber wird ein thunlichst weiter Spielraum

1) Als ein übersichtliches Hilfsbuch für mathematische Entwickelungen wird Manchem die „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften“ von Nernst und Schönflies, 1895, willkommen sein.

gelassen, und zwar nicht nur, um der speciellen Einrichtung der verschiedenen Übungslaboratorien nicht vorzugreifen, sondern ebenso, um dem Arbeitenden das für das Lernen notwendige Mafs der geistigen Selbstthätigkeit zu lassen. Ich glaube, dafs auf diese Seite des Praktikums ein grofser Nachdruck zu legen ist und dafs das Schematisiren einer Aufgabe und das Darbieten von ohne weiteres gebrauchsfertigen Methoden und Apparaten nicht weiter getrieben werden sollte, als ein durchführbarer Betrieb eines stark besuchten Laboratoriums dies fordert.

Neben den Zwecken des Praktikums ist nach und nach mehr auch das Bedürfnis der wissenschaftlichen Messung berücksichtigt worden; immer freilich in bescheidenen Grenzen. Ein wissenschaftliches Handbuch der praktischen Physik könnte den gewöhnlichen Zwecken des Praktikums nicht mehr dienen. Die Behandlung des Gegenstandes würde eine andere sein.

Die über das Übungspraktikum hinübergreifenden Aufgaben oder Methoden sind im allgemeinen kürzer gefafst. Für die Übungen kann grofse Knappheit der Darstellung unbequem werden; der angehende Physiker mag im Arbeiten nach kurzen Vorschriften seine Selbständigkeit entwickeln. Für genauere Arbeiten sind Hinweise auf Litteratur in gröfserer Anzahl aufgenommen worden, immer thunlichst mit Rücksicht auf ihre Zugänglichkeit und Zweckdienlichkeit und weniger auf Priorität. Etwas sorgfältiger, als in manchen modernen Lehrbüchern, insbesondere einigen ausländischen von elektrischem Inhalt, dürfte aber auch die letztere berücksichtigt sein, denn dort findet man stellenweise eine Art der historischen Behandlung, für welche das Wort Verdrehung nicht zu hart ist. Was soll man beispielsweise dazu sagen, wenn in einem Lehrbuche der Elektricität der Name Wilhelm Weber fehlt.

Die neue Auflage wird man stärker nach dem Inhalt als nach dem Volumen vermehrt finden. Die Technik physikalischer Arbeiten nach verschiedenen Richtungen, ferner die moderne Elektricitäts-Erzeugung, die Untersuchung magnetischer Materialien, die Messung hoher Temperaturen und Drucke, auch physikalisch-chemische Methoden haben eine eingehendere Berücksichtigung gefunden, wobei die sehr freundliche und ausgiebige Unterstützung der Herren W. Kohlrausch, Nernst,

insbesondere auch Hallwachs und Holborn mit Dank zu verzeichnen ist. Auch andere Kapitel, besonders aus der Elektricitätslehre haben vielfach einen Zuwachs erfahren, unter beträchtlicher Vermehrung der Figuren.

Von den neuen Tabellen stammen die erdmagnetischen wiederum von Herrn Neumayer, diejenige über den Magnetismus von Eisensorten von Herrn Ebeling.

Bei der Korrektur bin ich den Herren Holborn, Gumlich und Dieſselhorst für die Verbesserung mancher Ungenauigkeiten zu Dank verpflichtet.

Die Anordnung und Bezifferung ist beibehalten worden, obwohl sich Einwände dagegen erheben lassen. Aber der Gebrauch der neuen Auflage neben früheren wird dadurch erleichtert. Auch sind die vielen Citate so besser vor Unrichtigkeiten geschützt.

Der Anhang, welcher vor einem Vierteljahrhundert als die einzige Darstellung des absoluten Maſssystems in einem Lehrbuche gewiſs sehr nützlich war, hat seinen Zweck, zur Kenntnis dieser Maſse beizutragen, zum gröſsten Teile wohl bereits erfüllt und erscheint nachgerade nicht mehr nötig. Überflüssig aber ist er nach meinen Erfahrungen beim Unterrichte immer noch nicht und mag daher aus Gewohnheit stehen bleiben. Die erläuternden Zuthaten sind wieder durch einige kurze Darstellungen von Gegenständen vermehrt worden, welche in Lehrbüchern weniger berücksichtigt werden.

Auf Wunsch der Druckerei ist den neueren Gewohnheiten der Orthographie Rechnung getragen worden.

Charlottenburg im Mai 1896.

Berichtigung.

S. 158 Z. 14 v. u. lies statt „Augenblicke“ „Bruchteile einer Sekunde“.

Inhalt.

Neuen oder wesentlich umgearbeiteten oder ergänzten Artikeln ist ein * beigesetzt.

1) Thermoelektrische Formeln s. bei Holman, Phil. Mag. 41, 465. 1896.
2) Über Joly's „Meldometer" s. Ramsay, Phil. Mag. 41, 360. 1896.

Hilfsbeobachtungen für Magnetismus und Elektricität.

Magnetismus.

Galvanismus. Elektromagnetismus. Seite

Elektrostatik.

Bestimmung von Ort und Zeit.

Das absolute Mafssystem.

Tabellen.

Alphabetisches Verzeichnis.

(Die römischen Zahlen bedeuten die Tabellen am Schlufs des Buchs.)

Allgemeines über Messungen.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler.

Eine Gröfse messen heifst dieselbe durch eine Zahl darstellen, welche angiebt, wie oft die zu Grunde gelegte Einheit in der gemessenen Gröfse enthalten ist.

Der durch Beobachtung gewonnene Zahlenwert einer physikalischen Gröfse wird wegen der Unvollkommenheit der Beobachtung mit einem Fehler behaftet sein. Wenn die nämliche Gröfse wiederholt gemessen worden ist, so bietet die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Mittel, um aus der Übereinstimmung der einzelnen Resultate ein Urteil über die wahrscheinliche Fehlergrenze zu gewinnen.

Wir nehmen an, dafs die einzelnen Bestimmungen sämtlich denselben Grad von Zuverlässigkeit besitzen. Dann giebt bekanntlich das arithmetische Mittel aus den einzeln gewonnenen Resultaten den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Gröfse.

Es ist im allgemeinen ungerechtfertigt, aus einer Reihe von Beobachtungen einzelne blofs deswegen auszuschliefsen, weil sie mit der Mehrzahl nicht übereinstimmen. Der Wahrscheinlichkeit eines bei den abweichenden Zahlen begangenen gröfseren Fehlers wird durch das arithmetische Mittel von selbst Rechnung getragen; denn als einzelne unter einer gröfseren Anzahl haben diese Zahlen einen geringen Einflufs auf den Mittelwert.

Vergleicht man nun die einzelnen Zahlen mit dem Mittelwert, so findet man gröfsere oder kleinere Differenzen, die „Fehler“, aus deren Betrage der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung sowie derjenige des Resultates nach folgenden Regeln bestimmt wird. Man bildet die Summe der Fehlerquadrate (Tab. 37). Diese Summe durch die um 1 verminderte

Anzahl der einzelnen Beobachtungen dividirt, giebt das mittlere Fehlerquadrat; die Quadratwurzel aus diesem den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung. Dividirt man den letzteren endlich durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen, so erhält man den sogenannten mittleren Fehler des Resultates.

Die Multiplikation des mittleren Fehlers mit 0,674 (nahe $\frac{2}{3}$) giebt den wahrscheinlichen Fehler. Dieser Ausdruck will sagen, dafs mit gleicher Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, der Fehler einer einzelnen Beobachtung oder auch des Resultates sei kleiner, wie er sei gröfser als der in dieser Weise abgeleitete „wahrscheinliche Fehler". Es ist im allgemeinen ebenso wahrscheinlich, dafs der gefundene Wert zu grofs, als dafs er zu klein ist, was man durch ein dem Fehler vorgesetztes $\pm$ Zeichen anzudeuten pflegt.

Bezeichnen wir also durch

n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen,

$\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_n$ die Abweichungen derselben von dem arithmetischen Mittel,

S die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$$S = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so ist der mittlere Fehler

der einzelnen Messung | des Mittelwertes

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \qquad \mathsf{E} = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Die wahrscheinlichen Fehler betragen $\frac{2}{3}$ hiervon.

Über die Fehlerrechnung bei mehreren unbekannten Gröfsen vergl. 3.

Selbstverständlich wird durch die so berechneten Gröfsen nur derjenige Teil des Fehlers ausgedrückt, welcher durch die eigentliche Unsicherheit der Beobachtung entsteht, das heifst durch solche Beobachtungsfehler, die eben so häufig einen zu grofsen als einen zu kleinen Wert ergeben. Aufserdem können aber konstante Fehler vorhanden sein, deren Ursache in den Angaben der Instrumente oder auch darin gelegen sein kann, dafs der Beobachter vorwiegend Fehler in einer bestimmten Richtung macht. Es ist eine besondere Aufgabe, entweder

solche Fehler zu ermitteln und dann am Resultat zu korrigiren oder aber solche Kombinationen der Beobachtung oder eine derartige Abwechselung der Methoden eintreten zu lassen, dafs die konstanten Fehler dadurch herausfallen.

Beispiel. Die Dichtigkeit eines Körpers wurde zehnmal bestimmt:

Gefunden	Δ	Δ^2
9,662	— 0,0019	0,000004
9,673	+ 091	083
9,664	+ 001	000
9,659	— 049	024
9,677	+ 131	172
9,662	— 019	004
9,663	— 009	001
9,680	+ 161	259
9,645	— 189	357
9,654	— 0,0099	0,000098
Mittel 9,6639		$S = 0{,}001002$

Also mittlerer Fehler einer Messung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{0{,}001002}{10-1}} = \pm\, 0{,}011$;

mittlerer Fehler des Mittelwertes: $E = \pm\, 0{,}011/\sqrt{10} = \pm\, 0{,}0033$.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen folglich $\pm\, 0{,}007$ bez. $\pm\, 0{,}0023$.

Man kann hiernach Eins gegen Eins wetten, dafs der Fehler einer einzelnen Dichtigkeitsbestimmung dieses Körpers, mit gleichen Instrumenten, mit gleicher Sorgfalt und Erfahrung angestellt wie die obigen Beobachtungen, kleiner ist als 0,007. Zufällig sind in der That je fünf von den Δ kleiner und gröfser als 0,007.

Die obigen Bestimmungen sind von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Gewichtsätzen sowie Thermometern angestellt worden. Fehler der Wage von einseitiger Richtung sind nicht anzunehmen. Ein wenn auch nicht konstanter doch einseitiger Fehler könnte aber z. B. durch nicht gehörig entfernte Luftbläschen entstanden sein, welche die Dichtigkeit immer zu klein erscheinen lassen.

„Gewicht" einer Messung. Die Einzelresultate, aus denen ein Schlufsresultat berechnet wird, sind nicht immer gleich zuverlässig. Diesen Umstand sucht man dadurch zu berücksichtigen, dafs man den Einzelwerten ein verschiedenes „Gewicht" beilegt, d. h. dafs man sie bei der Mittelnahme einfach, doppelt oder dreifach u. s. w. (Gewicht eins, zwei, drei u. s. w.) in Rechnung setzt. Dies ist selbstverständlich bei Einzelresultaten, die schon aus mehreren gleichwertigen Beobachtungen abgeleitet worden waren. Deren Gewicht ist einfach je gleich der Anzahl der benutzten Beobachtungen zu setzen. Denn wenn man so rechnet, so ist das Endresultat das nämliche, wie wenn man die sämtlichen einzelnen Beobachtungen zum Mittel

vereinigen würde. Es können auch andere Ursachen vorliegen, die den einzelnen Resultaten eine verschieden groſse Zuverlässigkeit erteilen und die zur Beilegung eines verschieden groſsen Gewichtes veranlassen; die Beurteilung dieser Frage muſs der Umsicht und der Gewissenhaftigkeit des Beobachters überlassen bleiben. Kennt man den mittleren Fehler ε eines Resultates, so ist dessen Gewicht p proportional $1/\varepsilon^2$. Vgl. auch 3 III. Das arithmetische Mittel aus mehreren Resultaten r_1, r_2 etc., deren Gewichte $= p_1$, p_2 etc. sind, ist natürlich

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

2. Einfluſs der Beobachtungsfehler auf das Resultat.

Oft findet man ein Resultat nicht direkt, sondern muſs dasselbe aus der beobachteten Gröſse oder auch aus mehreren Gröſsen durch Rechnung ableiten: so die Dichtigkeit eines Körpers aus mehreren Wägungen, den Elasticitätsmodul aus Längenmessungen, die Stärke eines galvanischen Stromes aus dem Ausschlag einer Magnetnadel. Hierbei entsteht die Aufgabe, den Fehler des Resultats zu kennen, welcher aus einem Fehler der beobachteten Gröſse entspringt.

Zweck dieser Fehlerrechnung kann erstens das Urteil über die Genauigkeit des Resultates selbst sein. Ferner erfahren wir dadurch, welche Abkürzungen der Rechnung wir uns erlauben dürfen, ohne die Ungenauigkeit merklich zu vergröſsern. Sodann ergiebt sich daraus, falls die Messung sich aus mehreren Beobachtungen zusammensetzt, auf welchen Teil wir die gröſste Sorgfalt zu verwenden haben. Endlich steht es häufig in unserer Gewalt, die Verhältnisse des Versuches in verschiedener Weise anzuordnen: die Fehlerrechnung giebt den Anhaltspunkt, welche Verhältnisse die günstigsten sind d. h. den geringsten Einfluſs der Beobachtungsfehler auf das Resultat bewirken.

Aus solchen Betrachtungen folgt z. B. die Regel für die Bestimmung der erdmagnetischen Intensität, daſs man am günstigsten die beiden Abstände des ablenkenden Magnets etwa im Verhältnis 1,4 nimmt. Oder die Regeln, daſs die Messung der Stärke eines galvanischen Stromes mit der Tangentenbussole den relativ genauesten Wert nicht bei einem möglichst groſsen Ausschlage, sondern bei etwa 45° liefert; daſs die beiden

Stromstärken, aus denen der Widerstand oder die Spannung einer galvanischen Säule bestimmt wird, etwa im Verhältnis 1 : 2 gewählt werden; dafs das log. Dekrement eines Schwingungszustandes bei einem Verhältnis der beiden Schwingungsweiten ungefähr = 3 relativ am genauesten beobachtet wird. Dagegen wird für die genaue Bestimmung eines Lichtbrechungsverhältnisses der Prismenwinkel thunlichst grofs gewählt u. s. w.

I. Das Resultat werde aus einer einzigen beobachteten Gröfse abgeleitet. Bezeichnen wir dieselbe durch x, das gesuchte Resultat durch X, wobei x und X die richtigen Werte darstellen sollen, so wird X als eine Funktion von x, d. h. durch irgend einen mathematischen Ausdruck gegeben sein, in welchem x vorkommt. Nennen wir nun $\mathfrak{f}$ den in x begangenen Fehler, so wird der hierdurch hervorgebrachte Fehler von X, den wir $\mathfrak{F}$ nennen, gefunden dadurch, dafs wir in den Ausdruck, aus welchem X berechnet wird, $x + \mathfrak{f}$ anstatt x einsetzen. Dabei mufs selbstverständlich der Fehler $\mathfrak{f}$ in derselben Einheit ausgedrückt werden wie die Gröfse x selbst. Jetzt werden wir ein von dem richtigen Werte X etwas verschiedenes Resultat finden: die Gröfse dieses Unterschiedes ist der Fehler $\mathfrak{F}$.

Vorausgesetzt, dafs die Beobachtungsfehler relativ kleine Gröfsen sind, lassen sich diese Rechnungen sehr vereinfachen. So beachte man zunächst folgende Regeln:

1. Es ist zur Bestimmung des Fehlers im Resultate erlaubt, für die beobachtete Gröfse, die wir oben x genannt haben, einen genäherten Wert zu setzen. Eigentlich ist man hierzu ja immer gezwungen, weil der genaue, fehlerfreie Wert eben nicht bekannt ist.

2. Korrektionsglieder (4), welche in der Formel für das Resultat X vorkommen, können, insofern man nicht etwa deren Einflufs selbst untersucht, bei der Fehlerrechnung vernachlässigt werden.

3. Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler entsteht, wächst im allgemeinen der Gröfse des letzteren proportional. Mit anderen Worten: der Fehler des Resultates, die oben durch $\mathfrak{F}$ bezeichnete Differenz, läfst sich als ein Produkt darstellen, in welchem der Fehler $\mathfrak{f}$ der beobachteten Gröfse der eine Faktor ist.

4. Hieraus folgt auch, daſs die Fehler des Resultates, welche aus gleich groſsen, aber im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehlern einer Beobachtung hervorgehen würden, an Gröſse gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Zuweilen kommt es vor, daſs der Resultatfehler nicht dem Beobachtungsfehler, sondern z. B. dessen Quadrate oder auch dem Produkte mehrerer Fehler proportional ist. Dann werden die Sätze unter 3 und 4 bez. auch unter 2 hinfällig.

Es kann nun die Rechnung fast immer sehr gekürzt werden, indem man von Näherungsformeln für das Rechnen mit kleinen Gröſsen Gebrauch macht. Diese lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung leicht zusammenfassen. Ist $\mathfrak{f}$ der in dem beobachteten Werte x begangene Fehler, so wird der Fehler $\mathfrak{F}$ des Resultates X erhalten, indem man den partiellen Differentialquotienten von X nach x mit $\mathfrak{f}$ multiplicirt. Also

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Um ohne Differentialrechnung den Ausdruck für den Fehler auf eine einfache Form zu bringen, wird man oft von den am Schlusse dieses Artikels angegebenen Näherungsformeln Gebrauch machen können.

II. Das Resultat sei aus mehreren Beobachtungs-Daten zusammengesetzt. Dasselbe stellt sich also als ein mathematischer Ausdruck dar, welcher die verschiedenen beobachteten Gröſsen enthält. Von diesen können mehrere einen Fehler enthalten. Wenn man aber den Einfluſs des in einer Gröſse begangenen Fehlers bestimmen will, so braucht man sich um die der anderen nicht zu kümmern.

Jeder von den Fehlern kann naturgemäſs das Resultat entweder zu klein oder zu groſs machen, und je nach dem zufälligen Zusammentreffen der Vorzeichen wird der Gesamtfehler gröſser oder kleiner ausfallen. Das Fehler-Maximum wird erhalten, wenn man die Partialfehler sämtlich mit gleichem Vorzeichen nimmt. Den durch das Zusammenwirken zu erwartenden mittleren Fehler findet man, indem man die zweiten Potenzen der Partialfehler addirt und aus der Summe die Wurzel zieht. Die Anwendung dieser Regeln auf einen speciellen Fall (Beispiel 1) wird hinlänglich zur Erläuterung dienen.

1. Dichtigkeitsbestimmung eines festen Körpers. Es sei m das Gewicht des Körpers in der Luft, m' sein Gewicht im Wasser, so ist die Dichtigkeit $s = \frac{m}{m - m'}$. Also entspricht hier s der im Vorigen X genannten Gröſse, m oder m' dem x. Die von dem Gewichtsverlust in der Luft und von der Ausdehnung des Wassers herrührenden Korrektionen kommen freilich noch hinzu, aber diese haben wir nach Nr. 2 hier nicht zu berücksichtigen.

Die Fehler in m und in m' dürfen wir, da beide Beobachtungen voneinander unabhängig sind, einzeln betrachten. Hätten wir bei der Wägung in Luft den Fehler $\mathfrak{f}$ begangen, so würden wir $m + \mathfrak{f}$ anstatt des richtigen Gewichts m gefunden haben, würden also die Dichtigkeit erhalten $\frac{m + \mathfrak{f}}{m + \mathfrak{f} - m'}$.

Unter Anwendung der Formel 8, S. 9 schreiben wir hierfür

$$\frac{m}{m - m'} \, \frac{1 + \mathfrak{f}/m}{1 + \mathfrak{f}/(m - m')} = \frac{m}{m - m'} \left(1 + \frac{\mathfrak{f}}{m} - \frac{\mathfrak{f}}{m - m'}\right) = s - \mathfrak{f} \frac{m'}{(m - m')^2}.$$

Der Fehler des Resultates ist also $\mathfrak{F} = - \mathfrak{f} \cdot m'/(m - m')^2$.

Die Differentialrechnung ergiebt (v. S) sofort dasselbe, indem

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{f} \cdot \frac{\partial \frac{m}{m - m'}}{\partial m} = - \mathfrak{f} \cdot \frac{m'}{(m - m')^2}.$$

Betrachten wir zweitens einen bei der Wägung im Wasser begangenen Fehler $\mathfrak{f}'$, setzen wir also $m' + \mathfrak{f}'$ anstatt m', so wird das fehlerhafte Resultat, ähnlich wie oben,

$$\frac{m}{m - (m' + \mathfrak{f}')} = \frac{m}{(m - m')\,(1 - \mathfrak{f}'/(m - m'))} = \frac{m}{m - m'} \left(1 + \frac{\mathfrak{f}'}{m - m'}\right).$$

Das Resultat würde also um $\mathfrak{F}' = \mathfrak{f}' \cdot m/(m - m')^2$ zu groſs ausfallen.

Fragen wir endlich nach dem Gesamtfehler, welcher aus den beiden Beobachtungsfehlern $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ zusammengesetzt ist, so hat dieser offenbar den gröſsten Wert $\pm \frac{m'\mathfrak{f} + m\mathfrak{f}'}{(m - m')^2}$, wenn entweder m zu groſs und m' zu klein gefunden ist, oder beide umgekehrt. Der zu erwartende mittlere Gesamtfehler ist

$$\pm \sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{F}'^2} = \pm \frac{\sqrt{(m'\mathfrak{f})^2 + (m\mathfrak{f}')^2}}{(m - m')^2}.$$

Z. B. war das Gewicht des obigen Körpers (S. 3) in runden Zahlen in der Luft $m = 243600$ mg; im Wasser $m' = 218400$ mg.

Der gröſste Wägungsfehler der Wage konnte auf 5 mg, bei einer Wägung im Wasser, welche wegen der Reibung in dem Wasser weniger genau ist, auf 8 mg geschätzt werden, wonach $\mathfrak{f} = 5$ mg und $\mathfrak{f}' = 8$ mg.

Die angegebenen Gröſsen in die obigen Formeln eingesetzt, liefern
von $\mathfrak{f}$ stammend den Fehler $\pm \mathfrak{F} = 5 \cdot 218400 \,/\, 25200^2 = 0{,}0017$,
von $\mathfrak{f}'$ stammend den Fehler $\pm \mathfrak{F}' = 8 \cdot 243600 \,/\, 25200^2 = 0{,}0031$.

Im ungünstigsten Falle beträgt der Gesamtfehler $\pm$ 0,0048, im wahrscheinlichsten Falle $\pm\sqrt{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{F}'^2}=\pm\,0{,}0035$.

Wenn also einzelne der obigen Bestimmungen (S. 3) erheblich gröſsere Abweichungen zeigen, so müssen andere Fehlerquellen als die Unsicherheit der Wägung vorhanden gewesen sein. (Luftbläschen, ungenaue Temperaturbestimmung, fehlerhaftes Abzählen der Gewichtstücke.)

2. Messung einer elektrischen Stromstärke i mit der Tangentenbussole. Wenn φ den Ablenkungswinkel der Nadel bezeichnet, so ist die Stromstärke i

$$i = C\cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

wo C einen konstanten Faktor bedeutet. Wird ein Ablesungsfehler $\mathfrak{f}$ begangen, so folgt der Fehler $\mathfrak{F}$ in i aus

$$i+\mathfrak{F} = C\cdot \operatorname{tg}(\varphi+\mathfrak{f}) = C\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{\mathfrak{f}}{\cos^2\varphi}\right)$$

nach Formel 10 III (S. 9). Also ist

$$\mathfrak{F} = C\frac{\mathfrak{f}}{\cos^2\varphi} = i\frac{\mathfrak{f}}{\sin\varphi\cos\varphi} = i\frac{2\mathfrak{f}}{\sin 2\varphi}\,.$$

Es ist also $2\mathfrak{f}/\sin 2\varphi$ der in Bruchteilen von i ausgedrückte Fehler, welcher dem Ablesungsfehler $\mathfrak{f}$ entspricht. Hieraus folgt, daſs Winkel von ungefähr 45° am günstigsten sind, weil für $\varphi = 45°$ der Nenner $\sin 2\varphi$ seinen möglichst groſsen Wert erhält.

Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Gröſsen.

Ein mathematischer Ausdruck, in welchem einzelne Gröſsen gegen andere sehr klein sind, läſst sich oft in eine für die Rechnung zweckmäſsigere Gestalt bringen. Am einfachsten ist meistens, dem Ausdruck zunächst eine Form zu geben, welche die Korrektionsgröſse nur in einem zu 1 addirten Gliede enthält; häufig ist diese Form von vornherein gegeben. Hierauf wird man oft von einer der folgenden Formeln Gebrauch zur Vereinfachung machen können.

Die mit δ, ε, ζ... bezeichneten Gröſsen sollen gegen 1 so klein sein, daſs ihre höheren Potenzen δ^2, ε^2... sowie ihre Produkte $\delta.\varepsilon$, $\delta.\zeta$..., die ja wieder gegen δ, ε... selbst sehr klein sind, gegen 1 vernachlässigt werden dürfen. Ist z. B. $\delta = 0{,}001$, so ist $\delta^2 = 0{,}000001$. Wenn etwa ferner $\varepsilon = 0{,}005$, so wird $\delta\cdot\varepsilon = 0{,}000005$. Es kommt oft vor, daſs Einflüsse von einigen Tausendteln wichtig sind, während einige Milliontel gleichgiltig erscheinen. Eine Länge von etwa 1 m bis auf Zehntel eines mm genau zu messen, ist leicht. Man wird also nicht eine Korrektion von $^1/_{1000}$ der Länge, nämlich 1 mm vernachlässigen. Ein oder einige Milliontel der ganzen Länge, also Tausendtel mm werden aber fast immer ohne Einfluſs sein.

Unter diesen Gesichtspunkten gelten die folgenden Formeln, in denen die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke meist für die Rechnung bequemer sein werden. Die Formeln 2 bis 6 sind specielle Fälle von 1.

Eine Gröſse mit $\pm$ oder $\mp$ soll überall in der Formel entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Zeichen genommen werden.

1) $(1+\delta)^m = 1+m\delta.$ $\qquad (1-\delta)^m = 1-m\delta.$

2) $(1+\delta)^2 = 1+2\delta.$ $\qquad (1-\delta)^2 = 1-2\delta.$

3) $\sqrt{1+\delta} = 1+\frac{1}{2}\delta.$ $\qquad \sqrt{1-\delta} = 1-\frac{1}{2}\delta.$

4) $\frac{1}{1+\delta} = 1-\delta.$ $\qquad \frac{1}{1-\delta} = 1+\delta.$

5) $\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1-2\delta.$ $\qquad \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1+2\delta.$

6) $\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1-\frac{1}{2}\delta.$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} = 1+\frac{1}{2}\delta.$

7) $(1\pm\delta)(1\pm\varepsilon)(1\pm\zeta)\cdots = 1\pm\delta\pm\varepsilon\pm\zeta\cdots$

8) $\frac{(1\pm\delta)(1\pm\zeta)\cdots}{(1\pm\varepsilon)(1\pm\eta)\cdots} = 1\pm\delta\pm\zeta\cdots\mp\varepsilon\mp\eta\cdots$

Weiter kann man statt des geometrischen Mittels zweier wenig verschiedener Gröſsen p_1 und p_2 das arithmetische setzen (Beweis S. 24):

9) $\sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1+p_2).$

Ferner 10) $\sin(x+\delta) = \sin x + \delta \cos x,$ $\qquad \sin\delta = \delta,$

$\cos(x+\delta) = \cos x - \delta \sin x,$ $\qquad \cos\delta = 1,$

$\operatorname{tg}(x+\delta) = \operatorname{tg} x + \frac{\delta}{\cos^2 x},$ $\qquad \operatorname{tg}\delta = \delta.$

Als Einheit für δ gilt der Winkel (57,°3), für welchen der Bogen dem Radius gleich ist. — In zweiter Annäherung ist

11) $\sin\delta = \delta(1-\frac{1}{6}\delta^2);$ $\qquad \cos\delta = 1-\frac{1}{2}\delta^2;$ $\qquad \operatorname{tg}\delta = \delta(1+\frac{1}{3}\delta^2).$

12) $\log\text{nat}(x+\delta) = \log\text{nat}\, x + \frac{\delta}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{x^2};$ $\qquad \log\text{nat}(1+\delta) = \delta - \frac{1}{2}\delta^2.$

13) $\log\text{nat}\frac{x+\delta}{x-\delta} = 2\frac{\delta}{x} + \frac{2}{3}\frac{\delta^3}{x^3}.$

3. Bestimmung empirischer Konstanten mit kleinsten Quadraten.

I. Wenn eine Gröſse wiederholt direkt gemessen worden ist, so liefert das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten richtigen Wert. Nun aber ist häufig die gesuchte Gröſse nicht das direkt gemessene Objekt, sondern man muſs jene aus den Beobachtungen anderer Gröſsen nach irgendwelchen Gesetzen ableiten, z. B. die Gravitationskonstante aus Pendellängen und Schwingungsdauern, den Wärmeausdehnungskoefficient aus Temperaturen und Längen, den Elasticitätsmodul aus mehreren

Längen, die specifische Wärme etwa aus Abkühlungszeiten, eine Galvanometerkonstante aus Skalenausschlägen und Silberniederschlägen oder Widerständen. Alsdann genügt das arithmetische Mittel nicht immer, um das wahrscheinlichste Resultat zu finden.

Mathematisch betrachtet, kommt hier die gesuchte Gröfse, z. B. der Ausdehnungskoefficient, als eine Konstante in einer Gleichung vor, welche aufserdem die beobachteten Gröfsen, z. B. Längen und Temperaturen enthält. Nicht selten sind in dieser Gleichung noch andere unbekannte Konstanten, etwa als Faktoren von Korrektionsgliedern, von Temperatureinflüssen etc. vertreten, die gleichzeitig bestimmt oder wenigstens eliminirt werden müssen.

Zu diesem Zwecke werden also mindestens so viele Beobachtungen verlangt, als unbekannte Gröfsen vorkommen; wenn gerade nur diese Anzahl vorliegt, so werden durch das Einsetzen der beobachteten Werte in den mathematischen Ausdruck so viele Gleichungen wie Unbekannte gewonnen, aus denen man die letzteren bestimmt. Vgl. hierüber auch III S. 15. Wenn aber eine gröfsere Anzahl von Beobachtungen vorliegt, so mufs man, um alles Material auszunutzen, einen anderen Weg einschlagen, eine Arbeit, die durch allerlei Kunstgriffe erleichtert werden kann, besonders dadurch, dafs man die Beobachtungen planmäfsig einrichtet. Dergleichen ist aber nicht immer möglich, und Willkür ist schwer zu vermeiden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet in der Methode der kleinsten Quadrate ein systematisches Verfahren, nach welchem ohne Willkür gerechnet wird. Freilich kann man auch hier auf mühsame Rechnungen geführt werden, und deswegen ist ein wiederholter Hinweis auf die Vorteile am Platze, welche ein vor der Beobachtung durchdachter Plan liefert.

Beispiel. Die Länge eines Stabes für 0° und seine Verlängerung auf 1° Temperaturerhöhung ist aus einer Anzahl von Längenmessungen bei verschiedenen Temperaturen abzuleiten. Nennen wir A die Länge bei 0°, B die Verlängerung für 1°, so ist für die Temperatur t die Länge u

$$u = A + Bt.$$

A und B sind die unbekannten, zu bestimmenden Konstanten, u und t sind die beobachteten Gröfsen. Zwei Beobachtungen würden genügen. Hätten wir z. B. für die Temperaturen t_1 und t_2 die resp. Längen u_1 und u_2 beobachtet, so ist

$$u_1 = A + Bt_1, \qquad u_2 = A + Bt_2,$$

also
$$A = \frac{t_1 u_2 - u_2 t_1}{t_1 - t_2}, \qquad B = \frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2}.$$

Nun aber mögen aufser diesen zwei Beobachtungen noch die Paare t_3, u_3 t_4, u_4 u. s. w. vorliegen. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden die gesuchten Gröfsen A und B aus irgend welchen zwei Paaren berechnet, stets dieselben Zahlenwerte annehmen. In Wirklichkeit aber finden wir der Fehler wegen keine Zahlen für A und B, die den sämtlichen Beobachtungen völlig genügten.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate sagt: Die Konstanten sollen so bestimmt werden, dafs die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Das heifst: Je nach verschiedenen Zahlenwerten der Konstanten werden die mit letzteren aus dem Gesetze berechneten Werte u von den beobachteten um verschiedene Gröfsen (die Fehler) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen möglichst klein wird.

Bezeichnen wir den mathematischen Ausdruck von bekannter Form, welcher die Abhängigkeit der beobachteten Gröfse u von einer anderen t (oder auch von mehreren anderen) darstellt, durch den Ausdruck $f(t)$ d. h. Funktion von t, so kommen in $f(t)$ also die gesuchten Gröfsen als Konstanten vor, die wir durch $A, B \ldots$ bezeichnen. Unsere Gleichung ist

$$u = f(t). \tag{1}$$

Beobachtet seien mehrere Gröfsen $u_1, u_2 \ldots u_n$, welche zu den bekannten Gröfsen $t_1, t_2 \ldots t_n$ gehören. Nach obigem Satze sollen die Zahlenwerte von $A, B \ldots$ so bestimmt werden, dafs, wenn man sie in $f(t)$ einsetzt, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Gröfsen u den möglichst kleinen Wert erhält. Also es soll sein

$$[u_1 - f(t_1)]^2 + [u_2 - f(t_2)]^2 + \cdots + [u_n - f(t_n)]^2 = \text{Minimum}$$

oder kurz durch das Summenzeichen Σ bezeichnet

$$\Sigma[u - f(t)]^2 = \text{Min.} \tag{2}$$

Es ist im Auge zu behalten, dafs sämtliche u und t bekannte, beobachtete Gröfsen sind. Wie man nötigenfalls die Gleichungen zuvor auf gleiche Genauigkeit gebracht hat, siehe unter IV.

Nach einem Satze der Differentialrechnung ist zu diesem

Zwecke der Ausdruck $\Sigma[u - f(t)]^2$ nach $A, B \ldots$ zu differenciren, indem man letztere Grössen als Veränderliche behandelt, und jeder partielle Differentialquotient gleich Null zu setzen.

Wir erhalten also gerade so viele „Normalgleichungen“, wie Gröfsen $A, B \ldots$ zu bestimmen sind, nämlich

$$\frac{\partial \Sigma[u - f(t)]^2}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Sigma[u - f(t)]^2}{\partial B} = 0 \text{ u. s. w.} \tag{3}$$

Auf diesem von Willkür freien Wege können beliebig viele Beobachtungen gleichmäfsig benutzt werden.

Freilich kommt es nicht selten vor, dafs die durch Differentiation nach $A, B \ldots$ entstehenden Gleichungen nicht direkt auflösbar sind. Dann mufs man durch Probiren und Annäherung die Lösung suchen. In dem häufigen Falle, wo $f(t)$ die Form hat $f(t) = A + Bt + Ct^2 \ldots$, ist die direkte Lösung immer möglich. Vgl. III und IV.

Fortsetzung des Beispiels. Es seien bei den Temperaturen $t_1 t_2 \ldots t_n$ die Stablängen $u_1 u_2 \ldots u_n$ beobachtet worden. Für uns ist $u = f(t) = A + Bt$. Es sollen also A und B so bestimmt werden, dafs

$$(u_1 - A - Bt_1)^2 + (u_2 - A - Bt_2)^2 + \cdots + (u_n - A - Bt_n)^2 = \text{Min.}$$

oder kurz $\Sigma(u - A - Bt)^2 = \text{Min.}$

Die Differentiation ergiebt

nach A $\quad \Sigma(u - A - Bt) = 0$, $\qquad$ nach B $\quad \Sigma t(u - A - Bt) = 0$,

oder, weil hier $\Sigma A = A \,.\, n$ ist,

$$\Sigma u - An - B\Sigma t = 0, \qquad \Sigma tu - A\Sigma t - B\Sigma t^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$A = \frac{\Sigma t\, \Sigma tu - \Sigma u\, \Sigma t^2}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}, \qquad B = \frac{\Sigma t\, \Sigma u - n\Sigma tu}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}.$$

Zahlen-Beispiel. Die Länge eines zu kontrolirenden Meterstabes, der auch für höhere Temperaturen dienen soll, sei durch Vergleichung mit einem Normalmafsstabe gefunden

bei der Temp.	$t_1 = 20^0$	$t_2 = 40^0$	$t_3 = 50^0$	$t_4 = 60^0$
die Länge	$u_1 = 1000{,}22$	$u_2 = 1000{,}65$	$u_3 = 1000{,}90$	$u_4 = 1001{,}05$ mm.

Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung ziehen wir von allen Längen u den Betrag 1000 mm ab und nennen den Rest $\mathfrak{r}$, dann erhalten wir für A auch nur den Überschufs der Länge bei 0^0 über 1 m. Die Rechnung stellt sich in folgendem Schema dar:

Nr.	t	$\mathfrak{r}$	t^2	$t\mathfrak{r}$
1.	20	+0,22	400	4,4
2.	40	0,65	1600	26,0
3.	50	0,90	2500	45,0
4.	60	1,05	3600	63,0
	$\Sigma t = 170$	$\Sigma\mathfrak{r} = 2,82$	$\Sigma t^2 = 8100$	$\Sigma t\mathfrak{r} = 138,4$

also ist

$$A = \frac{170 \cdot 138,4 - 2,82 \cdot 8100}{170^2 - 4 \cdot 8100} = -0,196 \text{ mm},$$

$$B = \frac{170 \cdot 2,82 - 4 \cdot 138,4}{170^2 - 4 \cdot 8100} = +0,0212.$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist also 1000 — 0,196 = 999,804 mm und bei der Temperatur t

$$u = 999,804 + 0,0212t.$$

Hiernach berechnen sich die Längen für 20, 40, 50, 60°

Nr.	t	u ber.	u beob.	Δ	Δ^2
		mm	mm	mm	
1.	20°	1000,228	1000,22	+0,008	0,000064
2.	40	1000,652	1000,65	+0,002	0004
3.	50	1000,864	1000,90	—0,036	1296
4.	60	1001,076	1001,05	+0,026	0676
					$\Sigma\Delta^2 = 0,002040$

Man kann sich davon überzeugen, dafs jede Änderung von A oder B die Summe der Fehlerquadrate vergröfsert.

Gerade so würde aus mehreren Beobachtungen der Elasticitätsmodul eines Stabes, der gegenseitige Gang zweier Uhren, die Empfindlichkeit einer Wage oder eines Galvanometers berechnet werden können u. s. w.

Für die ungleichmäfsige Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Temperatur und in vielen ähnlichen Fällen pflegt man als Annäherung eine algebraische Form höheren Grades einzuführen, z. B. $u = A + Bt + Ct^2$. Auch bei der Aufgabe des Beispiels könnte man ein quadratisches Glied einführen, welches die Ungleichmäfsigkeit der Ausdehnung berücksichtigt. Die Bestimmung von A, B, C aus beliebig vielen Beobachtungen ist im Wesen die nämliche wie oben, nur verwickelter und mühsamer.

Für solche Fälle und, wenn man öfters mit kleinsten Quadraten zu rechnen hat, auch bei einfachen Aufgaben, ist das Gauss'sche Rechenverfahren (IV) viel bequemer und sicherer.

Die numerischen Rechnungen dürfen bei der Bildung der Quadrate und Produkte nicht mehr gekürzt werden. Man kann aber grofse Zahlen durch allerlei Kunstgriffe vermeiden, wie z. B. oben durch Subtraktion des konstanten Wertes 1000 mm von allen u. Wie man diesen Zweck und andere Vorteile durch vorgängige Berechnung von Näherungswerten erreicht, sieht man aus III.

Die Zahlenrechnung betreffend beachte man noch folgende

praktische Regel. Die Konstanten A, B ... sowie andrerseits die beobachteten Werte sind unter sich oft von verschiedener Gröfsenordnung. So zählen in dem Beispiel schliefslich die Temperaturen t nach Zehnern, während die Verlängerungen $\mathfrak{r}$ höchstens 1 mm erreichen. Es ist übersichtlicher, wenn die Gröfsen homogen sind, was man durch Multiplikation oder Division durch Potenzen von 10 bewirkt. Anstatt $B.t$ kann man ja z. B. schreiben $(10B).(t:10)$. Hätten wir dies gethan, so würde statt 20, 40 ... 2, 4 ... in die Rechnung gekommen sein, was angenehmer ist. Das Rechnungsresultat $10B$ wäre dann durch 10 zu teilen.

Den sogenannten mittleren Beobachtungsfehler erhält man bei diesen Aufgaben aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Gröfsen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten A, B ... d. h. die Anzahl der Normalgleichungen bedeutet, als

$$\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n-m}}. \qquad 4)$$

Also im obigen Beispiele $\pm\sqrt{\frac{0{,}00204}{4-2}}=\pm 0{,}032$ mm.

II. Rechnung bei gleich grofsen Intervallen.

Liegen die beobachteten Gröfsen in gleichen Abständen voneinander, so wird die Rechnung einfacher. Dergleichen Verhältnisse kommen nicht selten vor; ein periodisches Ereignis sei z. B. wiederholt beobachtet worden, und es werde die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen gesucht [Schwingungsdauer (52), Umlaufszeit]. Oder man will den Abstand zweier benachbarter Punkte bestimmen, wenn nicht nur zwei, sondern eine gröfsere Anzahl solcher Punkte nebeneinander liegt, deren Örter beobachtet wurden. [Abstand der Knotenpunkte eines Wellenzuges (37).]

Allgemein ändere sich eine Gröfse proportional einer zweiten; von letzterer sei eine Anzahl gleichweit voneinander abstehender bekannter Punkte genommen, zu denen man die zugehörigen Werte der anderen Gröfse beobachtet hat.

So könnten in der vorhin durchgeführten Aufgabe die Stablängen in gleichen Temperaturabständen gemessen sein.

Die beobachtete Gröfse u möge nun der Reihe nach mit den Werten $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n$ gefunden sein. Wären die Werte richtig beobachtet, so sollten die Intervalle $u_2-u_1, u_3-u_2 \ldots u_n-u_{n-1}$ alle gleich grofs sein. In Wirklichkeit sind dieselben ungleich grofs und man sucht den wahrscheinlichsten Wert. Das arithmetische Mittel aus allen Intervallen würde offenbar auf dasselbe hinauslaufen, als wenn man nur den ersten und den letzten Wert berücksichtigte. Die gleichförmige Benutzung aller Beobachtungen verlangt, dafs man das Intervall berechnet als

$$6\,\frac{(n-1)(u_n-u_1)+(n-3)(u_{n-1}-u_2)+\cdots}{n(n^2-1)}.$$

Das Gewicht dieses Resultates ist $P=n(n^2-1)/12$; der mittlere Fehler des Resultates beträgt dann, wenn ε der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung ist, $E=\varepsilon/\sqrt{P}$.

Wenn t die Nummer der Beobachtung bedeutet und $u=A+Bt$ gesetzt wird, so ist B das gesuchte Intervall. Also

$$t_1=1, \quad t_2=2\cdots, \quad t_{n-1}=n-1, \quad t_n=n.$$

Man braucht nur

$$\begin{aligned}
\Sigma t &= 1+2+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),\\
\Sigma t^2 &= 1^2+2^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\\
\Sigma u &= u_1+u_2+\cdots+u_n\\
\Sigma tu &= u_1+2u_2+\cdots+nu_n
\end{aligned}$$

in B (S. 12) einzusetzen, um den obigen Ausdruck zu erhalten.

III. Auflösung von Gleichungen, wenn Näherungswerte für die Unbekannten vorliegen.

Wir wollen zuerst zeigen, wie man die Aufgabe der Konstanten-Bestimmung einer Gleichung auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückführen kann.

Eine beobachtete Gröfse u sei von anderen beobachteten Gröfsen $r, s, t\ldots$ nach einem Gesetze von bekannter Form abhängig. Dieses Gesetz enthalte die Konstanten $A, B, C,$ welche eben aus den Beobachtungen bestimmt werden sollen. Eine gröfsere Anzahl als drei wird bei physikalischen Aufgaben selten vorliegen und könnte überdies ebenso behandelt werden wie unser Fall. Es müssen natürlich mindestens so viele Beobachtungen vorliegen, wie zu bestimmende Konstanten. Die beobachteten Gröfsen bezeichnen wir mit $u_1\, r_1\, s_1\, t_1 \quad u_2\, r_2\, s_2\, t_2$ etc.

Die Abhängigkeit der Gröſsen voneinander werde durch das Symbol dargestellt

$$u = \mathrm{f}(A, B, C, r, s, t \ldots) \qquad 5)$$

Die $r, s \ldots$, oft auch die u, werden im allgemeinen Ablesungen an Instrumenten enthalten, wie Uhr, Wage, Maſsstab, Teilkreis, Thermometer, Manometer, Rheostat, Galvanometer, Brückendraht etc. $r, s, t \ldots$ brauchen nicht voneinander unabhängig zu sein. Ein gewöhnlicher Fall z. B. ist derjenige, in welchem etwa $r = 1$, $s = q$, $t = q^2 \ldots$ wäre; q kann eine Temperatur, Belastung, Zeit, einen Druck, eine Skalenablesung etc. bedeuten. Oder es könnte, wenn u die Ablenkung eines Magnetometers durch einen Magnet aus der Entfernung l wäre, $r = l^{-3}$, $s = l^{-5} \ldots$ sein, wo dann A den Magnetismus eines Stabes, B dessen Polabstand enthalten mag. u könnte auch eine Dichtigkeit, einen elektrischen Strom oder Widerstand, ein Lichtbrechungsverhältnis bedeuten etc. etc.

Endlich braucht auch nicht eine der beobachteten Gröſsen durch die übrigen ausgedrückt zu sein, sondern es kann die Beziehung zwischen allen etwa durch irgend eine Gleichung, z. B. von der Form

$$\mathrm{f}(A, B \ldots r, s \ldots) = 0$$

gegeben sein, in welcher die Konstanten $A, B \ldots$ so bestimmt werden sollen, daſs die Abweichungen der linken Seite von dem Werte Null möglichst klein werden, wenn man die beobachteten $r, s \ldots$ einsetzt. Diese Abweichungen von Null stellen dann die übrig bleibenden Fehler vor. Das was hier u genannt ist, bedeutet also in diesem Falle Null, vorausgesetzt, daſs die Beobachtungen $r, s \ldots$ richtig und die Konstanten $A, B \ldots$ mit den richtigen Werten eingesetzt wären.

Die zu bestimmenden Konstanten A, B, C, welche hier die Unbekannten vorstellen, lassen sich häufig nicht direkt aus den Gleichungen entwickeln. Hat man sich aber Näherungswerte für A, B, C verschafft, so führt man die Aufgabe in folgender Weise auf die immer mögliche Auflösung linearer Gleichungen zurück.

Die Näherungswerte seien $[A]$, $[B]$, $[C]$. Die richtigen Werte werden dann sein

$$A = [A] + \alpha \qquad B = [B] + \beta \qquad C = [C] + \gamma. \qquad 6)$$

Diese Korrektionen α, β, γ sind also jetzt die Unbekannten, welche zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke bilde man die partiellen Differentialquotienten der Funktion u oder f nach A, B, C, indem man letztere Gröſsen zunächst als Veränderliche behandelt, nach der Differentiation aber $[A]$, $[B]$, $[C]$ dafür einsetzt. Wir bezeichnen die so definirten Werte der Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = a \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = b \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = c. \tag{7}$$

In diese drei Ausdrücke sollen nun für die darin vorkommenden Werte r, s, t.. eben die beobachteten Zahlen eingesetzt werden, z. B. $r_1, s_1, t_1 \ldots$ dann $r_2, s_2, t_2 \ldots$ etc.; die so entstehenden Gröfsen sollen bez. a_1, b_1, c_1 a_2, b_2, c_2 etc. heifsen.

Endlich nennen wir $[u]$ den Wert, der für die Funktion u entsteht, wenn man $[A]$, $[B]$, $[C]$ in die Funktion f einsetzt, während u den wirklich beobachteten Wert bedeute. u und $[u]$ werden sich durch einen Rest $\mathfrak{r}$ von einander unterscheiden, so dafs

$$\mathfrak{r} = u - [u]. \tag{8}$$

Nach dem Taylor'schen Satze ist dann, wenn $\mathfrak{r}$, α, β, γ hinreichend klein sind,

$$\mathfrak{r} = \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] + \beta\left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] + \gamma\left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = \alpha a + \beta b + \gamma c. \tag{9}$$

Indem man in diese Gleichung die sämtlichen Beobachtungen einsetzt, erhält man so viele Gleichungen wie Beobachtungen, in denen aufser α, β, γ alles zahlenmäfsig gegeben ist,

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

Beispiel: Die Temperatur eines sich in konstanter Umgebung abkühlenden Körpers (oder die Lage einer aperiodisch gedämpften Magnetnadel oder eines in einem zähen Mittel sich bewegenden Körpers; oder der Verlauf einer langsam vor sich gehenden chemischen Reaktion etc.) sei für die Zeit t durch den Ausdruck dargestellt

$$u = A . 10^{-Bt} + C.$$

Es seien zunächst 3 Beobachtungen vorhanden, welche zu den Zeiten $t_1\ t_2\ t_3$ für u die Werte $u_1\ u_2\ u_3$ ergeben haben. Setzt man zusammengehörige Paare in den Ausdruck ein, so erhält man allerdings drei Gleichungen, durch welche A, B, C bestimmt sind. Die Elimination z. B. von C und A führt aber für B auf die Beziehung $\dfrac{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_2}}{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_3}} = \dfrac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$, eine Gleichung, welche nicht nach B aufgelöst werden kann. Wohl aber kann man durch Probiren leicht eine Zahl für B finden, welche der Gleichung genähert genügt. — Oder man zeichnet $u_1\ u_2\ u_3$ als Ordinaten zu $t_1\ t_2\ t_3$ in Koordinatenpapier, zieht die Kurve durch und legt zwei Tangenten an dieselbe, welche das Gefälle q' und q'' für zwei, der Rechnung bequem gewählte Abscissen t' und t'' ergeben. Dann ist

$B = (\lg q' - \lg q'')/(t'' - t')$, der Wert wird aber nicht genau sein. — Oder endlich, es ist für die dritte Beobachtung t_3 etwa so grofs, dafs u_3 nahe den Endwert C vorstellt. — Sobald man A oder B oder C hat, so lassen die beiden übrigen Gröfsen sich geschlossen ausdrücken, werden aber auch nur Näherungswerte sein, wenn die erste ein solcher ist.

So habe man sich die Näherungen $[A]$, $[B]$ und $[C]$ verschafft. Es ist dann

$$\mathfrak{r} = u - [A].10^{-[B]\cdot t} - [C]. \qquad 8a)$$

$$a = \left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = 10^{-[B]\cdot t} \quad b = \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = -\frac{[A].t.10^{-[B]\cdot t}}{\log e} \quad c = \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = 1. \qquad 7a)$$

Durch Einsetzen der drei Beobachtungspaare Gl. 7a und 8a und der hieraus erhaltenen Zahlen für $\mathfrak{r}$, a, b, c in Gl. 9 erhält man drei Gleichungen (10), aus denen man α, β, γ und dann aus Gl. 6 A, B, C bestimmt, welche meistens den Beobachtungen schon genügen werden. Andernfalls benutzt man sie als bessere Näherungswerte und wird bei Wiederholung der einfachen Rechnung sicher zum Ziele kommen.

Liegen nur so viele Beobachtungen vor wie Unbekannte, so kann man die Gleichungen in gewöhnlicher Weise auflösen. Im anderen Falle dient die Methode der kleinsten Quadrate. Vgl. hierüber I und IV.

Es ist kaum nötig zu bemerken, dafs, wenn u schon in der Form $u = A\cdot r + B\cdot s + C\cdot t$ gegeben ist (z. B. als $u = A + B\cdot s + C\cdot s^2$, wo s etwa eine Temperatur vorstellt), dafs dann die eben auseinandergesetzte Reduktion nicht notwendig ist. Trotzdem wird man dieselbe oft mit Vorteil gebrauchen, d. h. sich Näherungswerte für A, B, C verschaffen und mit den Resten rechnen, um nämlich kleinere Zahlen einzuführen, welche im Kopfe oder mit Multiplikationstafeln zu rechnen gestatten. Man hätte dann

$$a = \frac{\partial u}{\partial A} = r \qquad b = \frac{\partial u}{\partial B} = s \qquad c = \frac{\partial u}{\partial C} = t.$$

Dies sieht man hier auch ohne Differentialrechnung, denn wenn

$$[u] + \mathfrak{r} = ([A] + \alpha)r + ([B] + \beta)s + ([C] + \gamma)t,$$

so ist eben $$\mathfrak{r} = \alpha\cdot r + \beta\cdot s + \gamma\cdot t.$$

An dem Beispiel von S. 12 mit zwei zu bestimmenden Konstanten A und B kann man den Vorteil leicht sehen. Es war $u = A + Bt$. Einen Näherungswert für B liefern offenbar die beiden Beobachtungen

$$t_1 = 20 \qquad u_1 = 1000{,}22 \qquad \text{und} \qquad t_4 = 60 \qquad u_4 = 1001{,}05,$$

nämlich $$[B] = \frac{1001{,}05 - 1000{,}22}{60 - 20} = \frac{0{,}83}{40} = 0{,}021.$$

Aus der Beobachtung 1 findet man dann für A die Näherung

$$[A] = 1000{,}22 - 20 \cdot 0{,}021 = 999{,}8.$$

Also

$$[u] = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot t.$$

Da nun $a = \frac{\partial u}{\partial A} = 1 \quad b = \frac{\partial u}{\partial B} = t$, so wird die Gleichung

$$u - [u] = \mathfrak{r} = \alpha \cdot a + \beta \cdot b = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t.$$

Hierin sind α und β mit kleinsten Quadraten zu bestimmen. $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2 \ldots$, $a_1\, a_2 \ldots$ und $b_1\, b_2$ berechnen sich:

Nr.	u mm	t	$[u] = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot t$ mm	$\mathfrak{r}$ mm	a	b
1.	1000,22	20°	1000,22	±0,00	1	20
2.	1000,65	40	1000,64	+0,01	1	40
3.	1000,90	50	1000,85	+0,05	1	50
4.	1001,05	60	1001,06	−0,01	1	60

wo man nun alles nach dem Schema S. 18, aber im Kopfe, rechnen kann; am einfachsten, wenn man noch $\mathfrak{r}$ in Hunderteln mm und b in Zehnern von Graden als Einheiten ausdrückt. Die so berechneten α bez. β wären natürlich zum Schlufs durch 100 bez. 1000 zu dividiren.

IV. Das Gauss'sche Rechenverfahren bei der Auflösung linearer Gleichungen mit kleinsten Quadraten.

Es seien n Beobachtungen gemacht und nötigenfalls mit Näherungswerten nach III in linearen Zusammenhang gebracht. Die in Bezug auf α, β, γ als Unbekannte aufzulösenden Gleichungen heifsen

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{r}_n &= \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n . \end{aligned}$$

Es wird im allgemeinen genügen, die Zahlen für $a_1 \ldots\ b_1 \ldots\ c_1 \ldots$ so weit auszurechnen, dafs ihre Ziffernzahl derjenigen der bleibenden Reste $\mathfrak{r}$ ungefähr gleichkommt. Es ist dabei von grofsem Vorteil, wenn die Näherungswerte so nahe richtig sind, dafs die Reste 2, höchstens 3 Ziffern umfassen. Dann kann man die Quadrate und Produkte mit Rechentafeln, z. B. von Crelle oder Zimmermann, oder mit dreioder vierstelligen Logarithmen bilden. Bei diesen Rechnungen darf, wie schon oben bemerkt wurde, nicht weiter gekürzt werden.

Allen Gleichungen soll dasselbe wahrscheinliche Mafs der Genauigkeit zukommen. Liegt eine Veranlassung vor, den verschiedenen Beobachtungen eine ungleiche Genauigkeit zuzuschreiben, so seien die Gleichungen bereits durch Multiplikation mit der Quadratwurzel des einer jeden zukommenden Gewichtes

auf gleiche Genauigkeit gebracht. Dabei ist zu beachten, dafs auch Faktoren 1 in demselben Verhältnis geändert werden müssen.

Um die Gleichungen nach kleinsten Quadraten aufzulösen kann das S. 11 ff. erörterte Verfahren dienen unter Beachtung, dafs den dortigen u $t\ldots$ $A, B\ldots$
hier die Gröfsen entsprechen $\mathfrak{r}$ a, b, c α, β, γ.
Für eine gröfsere Anzahl von Unbekannten, z. B. schon für unsere drei, ist aber die folgende Auflösung bequemer.

Man findet links die Reihenfolge der Hauptrechnung; daneben rechts für deren Richtigkeit eine Kontrole, welche man neben der Hauptrechnung führt. Es handelt sich zunächst um die Berechnung von Summen der Quadrate oder der Produkte zusammengehöriger Gröfsen, die wir in leicht verständlicher Weise abgekürzt so bezeichnen:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa] \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab]$$
$$a_1 \mathfrak{r}_1 + a_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + a_n \mathfrak{r}_n = [a\mathfrak{r}] \text{ u. s. w.}$$

Rechnung.

Man bilde $[aa]$ $[ab]$ $[ac]$ $[a\mathfrak{r}]$
$[bb]$ $[bc]$ $[b\mathfrak{r}]$
$[cc]$ $[c\mathfrak{r}]$
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$

$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$ ist nur für die letzte Kontrole notwendig.

Kontrole.

Es sei $a + b + c = S$.
Ferner, wie oben bezeichnet,
$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_n S_n = [aS]$ etc.
Dann mufs sein
$$[aa] + [ab] + [ac] = [aS]$$
$$[ab] + [bb] + [bc] = [bS]$$
$$[ac] + [bc] + [cc] = [cS]$$
$$[a\mathfrak{r}] + [b\mathfrak{r}] + [c\mathfrak{r}] = [\mathfrak{r}S].$$

Die Normalgleichungen zur Bestimmung von α, β, γ sind dann
$$[aa]\cdot\alpha + [ab]\cdot\beta + [ac]\cdot\gamma = [a\mathfrak{r}]$$
$$[ab]\cdot\alpha + [bb]\cdot\beta + [bc]\cdot\gamma = [b\mathfrak{r}]$$
$$[ac]\cdot\alpha + [bc]\cdot\beta + [cc]\cdot\gamma = [c\mathfrak{r}].$$

Die Auflösung geschieht folgendermafsen:

Man bilde und bezeichne

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb]_{\mathrm{I}}$$
$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc]_{\mathrm{I}}$$
$$[b\mathfrak{r}] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$$

Man berechne

$$[bS] - \frac{[ab]}{[aa]}[aS] = [bS]_{\mathrm{I}}$$
$$[cS] - \frac{[ac]}{[aa]}[aS] = [cS]_{\mathrm{I}}$$
$$[\mathfrak{r}S] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[aS] = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}};$$

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc]_{\mathrm{I}}$$

$$[c\mathfrak{r}] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$$

Endlich

$$[cc]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bc]_{\mathrm{I}} = [cc]_{\mathrm{II}}$$

$$[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} = [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}.$$

dann mufs sein

$$[bb]_{\mathrm{I}} + [bc]_{\mathrm{I}} = [bS]_{\mathrm{I}}$$
$$[bc]_{\mathrm{I}} + [cc]_{\mathrm{I}} = [cS]_{\mathrm{I}}$$
$$[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} + [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}}.$$

Man berechne

$$[cS]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bS]_{\mathrm{I}} = [cS]_{\mathrm{II}}$$

$$[\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}} - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bS]_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{II}};$$

dann mufs sein

$[cc]_{\mathrm{II}} = [cS]_{\mathrm{II}}$ und $[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{II}}$.

Hieraus erhält man die Unbekannten α, β und γ:

$$\gamma = \frac{[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}}{[cc]_{\mathrm{II}}} \qquad \beta = \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}} - \gamma\frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}} \qquad \alpha = \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\beta - \frac{[ac]}{[aa]}\gamma.$$

Kontrole der ganzen Rechnung. Die Einsetzung der gefundenen α, β, γ in die ursprünglichen Gleichungen lasse die Fehler übrig

$$\mathfrak{f}_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 - \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{f}_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 - \mathfrak{r}_2 \quad \text{etc.}$$

Dann mufs sein

$$\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots + \mathfrak{f}_n^2 = [\mathfrak{r}\mathfrak{r}] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} - \frac{[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}}{[cc]_{\mathrm{II}}}[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}.$$

Die Gewichte der so bestimmten α, β, γ werden erhalten

$$p_\gamma = [cc]_{\mathrm{II}} \qquad p_\beta = p_\gamma \frac{[bb]_{\mathrm{I}}}{[cc]_{\mathrm{I}}} \qquad p_\alpha = p_\gamma \frac{[ca]\cdot[bb]_{\mathrm{I}}}{[cc]\cdot[bb] - [bc]\cdot[bc]}.$$

Die Quadrate der mittleren Fehler von α, β, γ erhält man, indem man den Ausdruck $(\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots \mathfrak{f}_n^2)/(n-3)$ durch $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ dividirt; 3 ist hier die Anzahl der bestimmten Konstanten.

Es kann vorkommen, dafs die mit kleinsten Quadraten erhaltenen Korrektionen α, β, γ nicht genügen. Dann hat man die jetzt entstandenen Werte $[A]+\alpha$, $[B]+\beta$, $[C]+\gamma$ wieder als Näherungswerte von A, B, C zu betrachten und die Rechnung zu wiederholen.

Rechenschema. Es empfiehlt sich, bei solchen Rechnungen die Zahlen immer in derselben Ordnung zu schreiben, z. B. (die Klammern der Produktsummen sind weggelassen):

$\lg aa$		
$\lg ab$	$\lg bb_{I}$	
$\lg ac$	$\lg bc_{I}$	$\lg cc_{II}$
$\lg aS$	$\lg bS_{I}$	
$\lg a\mathfrak{r}$	$\lg b\mathfrak{r}_{I}$	$\lg c\mathfrak{r}_{II}$
$\lg \frac{ab}{aa}$	$\lg \frac{bc_{I}}{bb_{I}}$	$\lg \frac{c\mathfrak{r}_{II}}{cc_{II}}$
$\lg \frac{ac}{aa}$	$\lg \frac{b\mathfrak{r}_{I}}{bb_{I}}$	
$\lg \frac{a\mathfrak{r}}{aa}$		

aa	ab	ac	aS	$a\mathfrak{r}$		
	bb	bc	bS	$b\mathfrak{r}$		
	$\frac{ab}{aa}ab$	$\frac{ab}{aa}ac$	$\frac{ab}{aa}aS$	$\frac{ab}{aa}a\mathfrak{r}$		
Diff. $=$	bb_{I}	bc_{I}	bS_{I}	$b\mathfrak{r}_{I}$		
		cc	cS	$c\mathfrak{r}$	$\mathfrak{r}S$	$\mathfrak{r}\mathfrak{r}$
		$\frac{ac}{aa}ac$	$\frac{ac}{aa}aS$	$\frac{ac}{aa}a\mathfrak{r}$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}aS$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}a\mathfrak{r}$
	Diff. $=$	cc_{I}	cS_{I}	$c\mathfrak{r}_{I}$	$\mathfrak{r}S_{I}$	
		$\frac{bc_{I}}{bb_{I}}bc_{I}$	$\frac{bc_{I}}{bb_{I}}bS_{I}$	$\frac{bc_{I}}{bb_{I}}b\mathfrak{r}_{I}$	$\frac{b\mathfrak{r}_{I}}{bb_{I}}bS_{I}$	$\frac{b\mathfrak{r}_{I}}{bb_{I}}b\mathfrak{r}_{I}$
	Diff. $=$	cc_{II}	cS_{II}	$c\mathfrak{r}_{II}$	$\mathfrak{r}S_{II}$	
						$\frac{c\mathfrak{r}_{II}}{cc_{II}}c\mathfrak{r}_{II}$
					Diff. $=$	$\Sigma\mathfrak{f}^{2}$

4. Korrektionen und Korrektionsrechnungen.

Die gesuchten Resultate gehen fast niemals aus den Beobachtungen rein hervor, vielmehr pflegen die letzteren von Nebenumständen beeinflufst zu werden. Mit steigendem Anspruch auf Genauigkeit wächst sowohl die Anzahl der zu berücksichtigenden Nebeneinflüsse, wie die Schwierigkeit, sie zu eliminiren, so dafs oft der wesentlichste Teil der Arbeit durch diese Korrektionen hervorgebracht wird. Hier entsteht demnach das Bedürfnis, erstens sich über den Betrag der Korrektionen zu orientiren, und zweitens sie auf möglichst einfache Weise in die Rechnung aufzunehmen. Wie weit man in der Berücksichtigung der Korrektionen gehen kann, hängt natürlich von der Grenze ab, welche auch hier durch die mangelhafte Beobachtung sowie durch die unvollkommene Kenntnis der Naturgesetze und der in diesen vorkommenden Zahlenwerte gesteckt ist. Andrerseits aber ist es oft überflüssig, die Genauigkeit der Korrektion bis zu dieser Grenze zu führen; es genügt vielmehr offenbar immer, die Genauigkeit so weit zu treiben, dafs der vernachlässigte Teil der Korrektionen erheblich kleiner wird als der mögliche Einflufs der Beobachtungsfehler auf das Resultat. Hieraus ergeben sich für die Korrektionen ähnliche Kürzungsregeln, wie früher für die Fehlerrechnung.

Die Übung in diesen Rechnungen ist die Vorbedingung des genauen und doch bequemen physikalischen Arbeitens.

Eine der einfachsten physikalischen Messungen ist z. B. die Wägung oder Massenbestimmung. Hier haben wir zunächst die eigentlichen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Gesichtswahrnehmung und des Urteils über dieselbe, sowie aus einigen nicht zu berechnenden Mängeln der Wage, wie Reibung, Veränderlichkeit der Hebelarme u. s. w., zusammengesetzt sind. Auch die fehlerfreie Herstellung oder Prüfung eines Gewichtsatzes ist unmöglich. Indessen werden keineswegs besonders ausgezeichnete Instrumente oder feine Beobachtungen vorausgesetzt, damit andere ebenfalls unvermeidliche, aber ihrer Gröfse nach bestimmbare und daher aus dem Resultat zu eliminirende Fehler merklich werden. Diese zu berücksichtigen ist daher, wo Genauigkeit beansprucht wird, durchaus geboten. Hierher gehört erstens die Ungleicharmigkeit der Wage, welche bei gröfseren Gewichten in der Regel einen merklichen Einflufs hat. Sie wird nach **11** eliminirt.

Zweitens aber erleiden die Körper einen Gewichtsverlust durch die verdrängte Luft, welcher unter Umständen schon bei einer Krämerwage, die bei 1 kg Belastung noch 1 g anzeigt, gröfser werden kann als der Wägungsfehler. Um nun die Wägung „auf den leeren Raum zu reduciren", mufs man die Dichtigkeit der Luft kennen, eine innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Gröfse. Aber obwohl die vollständige Vernachlässigung der Korrektion nur bei einer sehr rohen Wägung gestattet ist, so läfst sich andrerseits leicht überschlagen, dafs für gewöhnliche Ansprüche auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man darf der Korrektion einen mittleren Wert zu Grunde legen. Indem man sich dem entsprechend auch auf eine genäherte Ausrechnung der Korrektion beschränkt, verlangt die erhebliche Verbesserung des Resultates eine Überlegung von etwa einer Minute.

Etwas mühsamer wird die Arbeit, wenn die mittlere Luftdichtigkeit nicht genügt. Dann mufs noch die Temperatur und der Druck der Luft beobachtet werden. Nun darf aber die Ablesung am Barometer nicht als der genaue Barometer-

stand betrachtet werden, sondern, da das Quecksilber und der Maſsstab sich mit ihrer Temperatur ausdehnen, so ist auch diese zu berücksichtigen. Auch die Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche wäre in Rechnung zu ziehen. Endlich hängt die Dichtigkeit der Luft von ihrer Feuchtigkeit ab, weswegen bei sehr feinen Wägungen auch die letztere bestimmt und in Rechnung gesetzt werden muſs.

Wollte man alle diese Beobachtungen und Rechnungen mit vollkommener Schärfe durchführen, so würden sie eine groſse Mühe verursachen. Allein nachdem man sich über das verlangte oder erreichbare Maſs der Genauigkeit und über den Einfluſs der Korrektionen orientirt hat, findet man, daſs und in wie weit eine Annäherung erlaubt ist, und gelangt auch hier bei einiger Übung mit geringer Mühe zum Ziele.

In ähnlicher Weise treten Korrektionen in die meisten Aufgaben ein, insbesondere durch die wechselnde Temperatur.

Eine gleichmäſsige Änderung der Temperatur läſst sich übrigens häufig eliminiren, indem man die Beobachtungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt und die Mittel nimmt.

Zu der abgekürzten Rechnung wird man oft das Verfahren und die Näherungsformeln auf S. 9 gebrauchen können.

Beispiele. 1. Eine Kürzung ist es, wenn man 3α den kubischen Ausdehnungskoefficienten nennt, falls α den linearen bedeutet. Streng genommen ist, sobald die Längen-Dimensionen im Verhältnis $1+\alpha t$ geändert werden, das Volumenverhältnis $(1+\alpha t)^3 = 1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3$. Aber für fast alle festen Körper ist $\alpha < 0{,}00003$, so daſs selbst für Temperaturänderungen von 100° der vernachlässigte Teil $3\alpha^2 t^2 < 0{,}000027$ oder $^1/_{37000}$ des Ganzen ist. Also nur wenn so kleine Gröſsen in Betracht kommen, dürfte man die abgekürzte Rechnung nicht anwenden. Dann müſste aber auch in Betracht gezogen werden, daſs der Ausdehnungskoefficient selbst sich mit der Temperatur ein wenig ändert. Ganz ohne merklichen Einfluſs wird $\alpha^3 t^3$.

2. In **21** wird bei der Reduktion des Barometers auf 0° die Ausdehnung des Quecksilbers als Korrektionsgröſse behandelt, indem $l/(1+0{,}00018\,t) = l - 0{,}00018\,lt$ (Formel 4, S. 9) gesetzt wird. Dabei vernachlässigt man höhere Potenzen von $0{,}00018\,t$. Man sieht aber, daſs z. B. für $t = 30°$ schon die nächste Potenz nur 0,00003 beträgt, also mit $l = 760$ mm multiplicirt nur etwa $^1/_{45}$ mm, eine hier fast immer zu vernachlässigende Gröſse liefert.

Unerlaubt dagegen würde es meistens sein, die Ausdehnung der Gase, welche etwa 20mal gröſser ist, ebenso zu behandeln.

3. Wird das Gewicht eines Körpers durch Doppelwägung (**11**)

bestimmt, und hat man auf der einen Seite das Gewicht p_1, auf der anderen p_2 gefunden, so ist streng genommen $\sqrt{(p_1 p_2)}$ das wirkliche Gewicht. Anstatt dieses geometrischen Mittels kann aber immer das arithmetische $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ gesetzt werden (Formel 9, S. 9). Denn setzen wir $p_1 = p + \delta$, $p_2 = p - \delta$, wo eben $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ist, so wird

$$\sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{p^2 - \delta^2} = p\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{p^2}} = p\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2}\right) \quad \text{(Formel 3).}$$

Nun müfste eine Wage sehr schlecht justirt sein, wenn δ den Wert $p/1000$ erreichte. In diesem Falle wäre $\frac{1}{2}\delta^2/p^2 = \frac{1}{2}$ Milliontel, eine Gröfse, welche im Verhältnis zu 1 jedenfalls nicht in Betracht kommt, wenn man mit einer solchen Wage wägt.

Über die Anwendung graphischer Methoden auf Korrektionen s. H. Maurer, Archiv d. Deut. Seewarte 1894 Nr. 6.

5. Interpolation.

Oft soll eine Gröfse y, die von einer anderen x abhängt, für einen ganz bestimmten Wert von x ermittelt werden. Ähnlich besteht die Aufgabe einer Beobachtung häufig darin, dafs man zu ermitteln hat, durch welche Verhältnisse eine ganz bestimmte Einstellung des Beobachtungsobjektes bedingt wird. Es ist jedoch oft mühsam, teilweise sogar unmöglich, die Verhältnisse ganz genau bis zur Erfüllung dieser Forderung einzurichten. So ist es meistens mit Schwierigkeiten verknüpft, die Temperatur eines Körpers auf einem vorbestimmten Grade, bei welchem etwa sein Volumen, seine Elasticität, sein elektrisches Leitungsvermögen bekannt sein sollen, genau zu erhalten; bei einer Wägung die Gewichtstücke gerade so abzupassen, dafs der Zeiger genau auf Null steht, erfordert Zeit und ist unter Umständen unmöglich. Ähnliches gilt, wenn galvanische Leitungen so abgeglichen werden sollen, dafs eine Galvanometernadel einen bestimmten Teilstrich anzeigt, zum Beispiel die Ruhelage.

In solchen sehr häufigen Fällen kann man oft aus Beobachtungen in der Nachbarschaft die genauen gesuchten Verhältnisse interpoliren und dadurch wesentliche Vorteile in der Einfachheit der geforderten Hilfsmittel, in dem Zeitaufwand und dazu noch in der Genauigkeit erzielen.

Es sei x_0 der Punkt, auf welchem das Instrument einstehen soll, und y_0 die gesuchte Gröfse, welche dem Werte x_0 ent-

spricht. Man habe jedoch nur die benachbarten Beobachtungen gemacht y_1 für x_1 und y_2 für x_2.

Liegen die Einstellungen so nahe bei einander und bei x_0, daſs innerhalb dieser Grenzen die Änderung von y derjenigen von x proportional ist, so hat man offenbar

$$(y_0 - y_1):(x_0 - x_1) = (y_2 - y_1):(x_2 - x_1),$$

woraus

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Am vorteilhaftesten ist es, x_1 und x_2 auf verschiedenen Seiten von x_0 zu nehmen.

Beispiele siehe unter anderem in 8 und 70.

Findet die eben vorausgesetzte Proportionalität des Wachstums von y und x nicht statt, so wird die Interpolation minder einfach. Man bedarf dann, wenn nicht etwa das Gesetz des Wachstums bekannt ist, mindestens dreier benachbarter Beobachtungen. Für die rechnerische Interpolation sind Formeln z. B. von Lagrange und Gauss gegeben.

Vgl. Weinstein, Physik. Maſsbest. § 291.

Meist wird im letzteren Falle eine graphische Interpolation angewendet. Man trägt in Koordinatenpapier die beobachteten x und y als Abscissen und Ordinaten ein, verbindet die entstehenden Punkte (Kreuze) durch eine Kurve und entnimmt aus der letzteren den Wert y_0, welcher der Abscisse x_0 entspricht. Beobachtungsfehler machen sich, wenn viele Beobachtungen vorliegen, als Unregelmäſsigkeiten der Kurve geltend. Man kann diese Darstellung zur Ausgleichung der Fehler verwenden, muſs aber hierbei umsichtig verfahren.

6. Regeln für das Zahlenrechnen.

Die numerische Berechnung der Resultate kann nur mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern ausgeführt werden, was bei den meisten Rechnungsoperationen die vollständige Genauigkeit unmöglich macht. Meistens würde die letztere auch zwecklos sein.

Im allgemeinen halte man die Regel fest, das Resultat in so vielen Ziffern mitzuteilen, daſs die letzte wegen der Beobachtungsfehler keinen Anspruch auf Genauigkeit machen,

dafs die vorletzte aber noch für ziemlich richtig gelten kann. Im zweifelhaften Falle soll eher eine Stelle zu viel als eine zu wenig genommen werden.

Der Rechnung nach aber sollen alle mitgeteilten Ziffern richtig sein. Hieraus folgt, dafs wenigstens eine längere, beispielsweise logarithmische Rechnung mit einer Stelle mehr geführt werden mufs, als man im Resultat mitteilen will; denn durch das Vernachlässigen der späteren Ziffern kann die letzte Stelle nach und nach um einige Einheiten falsch werden. Daher wirft man die letzte Ziffer der Rechnung schliefslich im Resultat fort, wobei man die vorletzte Ziffer, wenn das Weggeworfene mehr als 5 beträgt, um Eins erhöht. Bei der Ziffernzahl zählen natürlich die angehängten oder die einen Decimalbruch beginnenden Nullen nicht mit.

Gegen solche Vorschriften wird, besonders von Anfängern, in verschiedenster Richtung gesündigt. Es wird z. B. das Volumen v eines rechteckigen Körpers durch Ausmessen der drei Dimensionen bestimmt. Die letzteren seien etwa gleich 10,5 15,7 30,9 mm gefunden. Das genaue rechnerische Resultat wäre $v = 5093{,}865$ cbmm. Weggeworfene Mühe ist es, so genau zu rechnen, und gedankenlos, ein solches Resultat mitzuteilen. Denn hätte man sich bei dem Ausmessen um je $^1/_{20}$ mm geirrt, so könnte das Resultat um 50 cbmm zu grofs oder zu klein ausgefallen sein! Es genügt also $v = 5090$ oder äufserstenfalls 5094 zu berechnen, also abgekürzt zu multipliciren oder mit 4stelligen Logarithmen zu rechnen. Umgekehrt findet man oft Divisionen auf zu wenige Stellen ausgeführt. Derselbe Beobachter, welcher oben bis auf 7 Stellen multiplicirte, bestimmt vielleicht ein specifisches Gewicht mittels Wägungen auf Zehntel mg mit einer feinen Wage und begnügt sich dann damit, dasselbe = 2,5 zu berechnen, während er vielleicht die 4te Decimale noch richtig haben könnte. Wer physikalisch zu arbeiten anfängt, soll vor allem auf eine richtige Behandlung der Zahlen sehen und zu diesem Zweck die Regeln von 2 und 4 beachten.

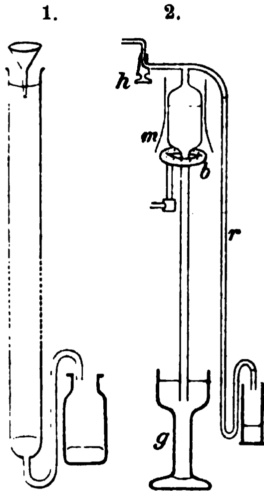
Auf etwa 1 promille genau kann ein gewöhnlicher Rechenschieber arbeiten. Für genauere Rechnungen sind z. B. die Crelle'schen Rechentafeln geeignet.

7. Technisches.

1. **Reines Quecksilber.** Das in eisernen Flaschen aus Idria bezogene Quecksilber genügt nach Filtriren für die meisten Zwecke.

Getrocknet wird Quecksilber oberflächlich mit Fliefspapier, vollkommener durch Erwärmen in einer reinen eisernen oder Porzellan-Schale auf etwa 150° unter Umrühren. Staub entfernt man mittels Filtrirens, am einfachsten durch ein gewöhnliches, bei gröfserem Druck mehrfach genommenes

Filter mit einem oder einigen feinen Löchern an der Spitze. Fett wird durch Ausschütteln mit etwas Kali- oder Natronlauge oder Benzol und Alkohol und wiederholtes Nachschütteln mit Wasser beseitigt. Fremde unedle Metalle und Oxyd zieht man durch Schütteln des Quecksilbers mit verdünnter Salpetersäure oder Lösungen von Eisenchlorid oder doppelt chromsaurem Kali aus, natürlich unter wiederholtem gründlichen Nachschütteln mit Wasser. Oder man läfst das Quecksilber in ganz feinem Strahle durch eine 1 bis $1\frac{1}{2}$ m hohe Säule von solchen Flüssigkeiten und schliefslich durch Wasser laufen. Ein aufgebogener unterer Fortsatz des Rohres (Fig. 1) fängt das Quecksilber auf, welches durch seinen Druck die Flüssigkeitssäule hält und im Überschufs abfliefst.



Schwer flüchtige Metalle entfernt man durch Abdestilliren des Quecksilbers, am besten im Vacuum, d. h. in Barometer-ähnlichen Vorrichtungen (Fig. 2). Durch den fettfreien (s. Nr. 25) Hahn *h* wird das Quecksilber mit der Luftpumpe gehoben, wobei man die Öffnung von *r* in Quecksilber tauchen lässt. Ist das Kühlrohr *r* hinreichend eng, so gelingt es, durch Heben des Gefäfses *g* Gase, welche über dem Quecksilber geblieben oder während der Destillation ausgeschieden sind, mit dem überfliefsenden Quecksilber auszutreiben, falls dieselben nicht von selbst mit dem Quecksilber in *r* abwärts wandern. Die Wärme des kleinen Rundbrenners *b* wird durch den Mantel *m* zusammengehalten. S. z. B. Weinhold, Carl Rep. 9, 69. 1873; 23, 791. 1887; Leonh. Weber ib. 15, 1. 1879; Dunstan u. Dymond, Phil. Mag. 29, 367. 1890.

Flüchtigere Metalle werden am sichersten durch Elektrolyse beseitigt. Das Quecksilber kommt auf den Boden eines breiten Gefäfses als Anode in eine Lösung von Merkuronitrat; in derselben Lösung steht ein kleineres Gefäfs mit einer Platinkathode. Durch einen elektrischen Strom (etwa 0,01 Am/cm^2) wird die Anode gelöst und das Quecksilber unter Zurücklassung der oxydirbareren Metalle an der Kathode niedergeschlagen. Jaeger, Z. S. f. Instr. 1892, 354.

2. **Reines Wasser.** Zu Kühlröhren beim Destilliren pflegt man Silber, Zinn oder Glas zu verwenden. Glas giebt anfangs Bestandteile an das Wasser ab, was aber bei guten Gläsern mit der Zeit aufhört. Sehr hartnäckig kann ein stattgefundenes Überspritzen durch die eingetrockneten festen Verunreinigungen stören. Das Stofsen beim Sieden in Glasgefäfsen wird durch eingeworfene Metallstückchen (Platin) vermindert.

Das zuerst übergegangene Wasser ist häufig wegen der mitgegangenen flüchtigen Verunreinigungen schlechter als der Vorrat.

Unvermeidlich ist die Verunreinigung des Destillates durch die atmosphärische Kohlensäure, besonders wenn dieselbe durch Flammen oder Atmung vermehrt ist. Man verbessert das Wasser durch Schütteln oder besser durch einen Luftstrom, welcher mittels der Wasserluftpumpe in einer Waschflasche aus einer engen Rohröffnung in kleinen Blasen durchgesaugt wird. Nötigenfalls reinigt man den Luftstrom vorher in zwei Waschflaschen zuerst mit verdünnter Alkalilösung, dann mit Wasser.

Die Verunreinigungen des Wassers lassen sich auch durch Ausfrieren beseitigen, indem man den nicht gefrorenen Teil weggiefst (Nernst). Geschmolzenes oberflächlich vorher gereinigtes käufliches Eis kann schon ein gutes Wasser liefern.

Bei der Aufbewahrung in Glas löst das Wasser, je nach der Glassorte rascher oder langsamer, mehr oder weniger Bestandteile, besonders Alkali, aus den Wänden. Vgl. Nr. 4.

Das feinste Prüfungsmittel auf die Anwesenheit unorganischer gelöster Stoffe im Wasser ist sein elektrisches Leitvermögen (72).

3. **Bereitung von Gasen.** Man erhält Wasserstoff aus reinem Zink mit verdünnter Schwefelsäure oder Salzsäure; Kohlensäure aus weifsem Marmor mit Salzsäure; Sauerstoff durch Erhitzen von chlorsaurem Kali, ev. gemischt mit Braunstein; Ammoniak aus koncentrirter wässriger Lösung, die, bei etwa 30° siedend, fast nur Ammoniak abgiebt; schweflige Säure durch Erhitzen koncentrirter Schwefelsäure mit Kupferspänen; Chlor aus Braunstein und Salzsäure.

Käuflich sind Bomben mit Sauerstoff und Wasserstoff (Elkan, Berlin), Kohlensäure (Akt. Ges. f. Kohlens.-Industrie, Berlin), Stickoxydul, Chlor, Acetylen (Akt. Ges. f. chem. Industr. Mannheim), Ammoniak, schweflige Säure, Methylchlorid, Äthylchlorid (Pictet, Berlin).

Verunreinigungen werden durch Waschflaschen mit Wasser, oder für mitgerissene Säure mit einer alkalischen Lösung (doppelt kohlensaures Natron, wenn Kohlensäure gewaschen werden soll) etc. entfernt, wobei das Gas in kleinen Blasen nicht zu rasch durchtreten soll.

Zum Austrocknen führt man Gase über Stücke von geschmolzenem Chlorcalcium oder Ätzkali, oder Bimsstein mit koncentrirter Schwefelsäure, oder durch eine Waschflasche mit letzterer, oder über wasserfreie Phosphorsäure.

4. **Glassorten.** Die Löslichkeit der Gläser in Wasser und ihre damit zusammenhängenden hygroskopischen Eigenschaften sind von sehr verschiedener Gröfse. 1 dm^2 giebt bei den besten Gläsern in gewöhnlicher Temperatur täglich etwa 0,002, bei schlechten bis zu 0,2 mg Substanz in Lösung. Temperatursteigerung beschleunigt die Auflösung ungeheuer stark. Eine Schätzung der Güte eines Gefäfses ergiebt sich am einfachsten aus der Haltbarkeit der Wasserfüllung selbst mittels seines elektrischen Leitvermögens (72). Rascher gewinnt man ein Urteil, wenn man das Glas im Stahlmörser und der Achatreibschale unter Vermeidung von Verunreinigungen fein pulverisirt und einen Wasseraufgufs auf sein Leit-

vermögen oder durch Eindampfen auf blankem Platin auf seinen Gehalt an fester Substanz prüft. Auch die hygroskopische Wasseranziehung liefert, bei Pulvern aus der Gewichtszunahme, bei gröfseren Flächen nach der elektrischen Isolirung in feuchter Luft beurteilt, eine Prüfung der Güte. Oder man bringt die Glasfläche in mit Wasser gesättigten Äther, der mit etwa $^1/_{10}$ % Eosin gefärbt ist. Je löslicher das Glas, desto intensiver färbt es sich im allgemeinen (Mylius). In einer Salzsäure-Atmosphäre entwickeln schlechte Gläser eine stärkere Trübung als gute (R. Weber).

Gute und mittlere Gläser werden durch den Gebrauch, insbesondere auch durch Behandeln mit warmem Wasser, mit der Zeit besser.

S. u. a. die Abhandlungen von Warburg u. Ihmori, Mylius u. Förster, R. Weber, E. Pfeiffer, Schott, F. Kohlrausch aus den letzten 10 Jahren in Wied. Ann., Ber. d. Deutsch. Chem. Ges., Z. S. f. Instr.-Kunde, Z. S. f. Analyt. Chem., Verein z. Beförd. d. Gewerbfleifses.

5. **Physikalische Eigenschaften verschiedener Gläser.** Von einheitlicher Beschaffenheit moderner Glassorten kann bei deren sehr verschiedener Zusammensetzung nicht mehr die Rede sein, selbst wenn man von den specifisch optischen Gläsern absieht. Die folgenden Zahlen bedeuten die Grenzen der Eigenschaften bei Gläsern für gewöhnliche Zwecke; in Klammern sind extreme Werte angegeben

Dichtigkeit	$s =$	2,4	(2,4)	bis	2,6	(5,9)
Kub. Temp.-Ausd.-Koeff.	$\alpha = 0{,}0000$	18	(11)	„	31	(34)
Specif. Wärme	$c = \quad 0,$	18	(08)	„	21	(23)
Wärmeleitvermögen	$k = 0{,}00$	18	(11)	„	20	(22)
Elast. Modul	$E = 100 \times$	59	(47)	„	75	(79) kg/mm²
Lichtbrechungsverhältnis	$n =$	1,51	(1,50)	„	1,53	(1,75)

Aus der bekannten Zusammensetzung des Glases kann man die Eigenschaften genähert nach dem Ausdruck

$$C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 \cdots$$

berechnen, wenn 1 Gew.-Teil Glas m_1, $m_2 \cdots$ Teile der einzelnen Stoffe enthält und wenn jede Substanz die Konstante C der folgenden Tabelle bekommt.

		SiO_2	B_2O_3	K_2O	Na_2O	CaO	BaO	ZnO	PbO	Al_2O_3
für α	0,000	008	001	085	100	050	030	018	030	050
für c	0,	191	237	186	267	190	067	125	051	207
für E	100×	65	20	71	100	100	100	15	47	160

für das specif. Volumen oder die reciproke Dichtigkeit:

$1/s$	0,	435	526	357	385	303	143	169	104	244.

Winkelmann u. Schott, Wied. Ann. 49, 401. 1893; 51, 697, 730. 1894.

Ein gutes Thüringer Glas wird durchschnittlich etwa 0,70 SiO_2, 0,06 K_2O, 0,12 Na_2O, 0,10 CaO, 0,02 Al_2O_3 haben.

6. **Glas versilbern.** Recept von Böttger. 1) Man löst 5 g Silbernitrat in destillirtem Wasser, versetzt mit Ammoniak, bis der Nieder-

schlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtrirt und verdünnt die Lösung auf 500 cbcm. 2) 1 g Silbernitrat wird in etwas Wasser gelöst und in $\frac{1}{2}$ l siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 0,83 g Seignettesalz und läfst die Mischung kurze Zeit sieden, bis der entstandene Niederschlag grau aussieht. Die Lösung wird heifs filtrirt. Die Lösungen halten sich im Dunkeln einige Monate.

Die gut (mit Salpetersäure, Ätzkali, Alkohol) gereinigte Glasfläche wird in einem Gefäfs mit einer einige mm hohen Schicht aus gleichen Raumteilen beider Lösungen bedeckt oder noch besser nach unten gerichtet in dieses Gemisch eingesenkt. Nach einer Stunde ist die Reduktion beendigt, die Platte wird abgespült, die Operation erneuert u. s. f., bis die genügende Dicke der Silberschicht erreicht ist. Nach dem Trocknen kann man die Silberfläche mit dem Ballen der Hand vorsichtig poliren. Soll das Silber als Belegung auf der Rückfläche dienen, so ist das Poliren natürlich überflüssig. Man mag in diesem Falle die Operation auch beschleunigen dadurch, dafs man die zweite der obigen Flüssigkeiten vor der Mischung auf etwa 70° erwärmt. Zum Schutz kann dann das Silber mit einem Lack überzogen werden; dünne Spiegel verziehen sich allerdings hierdurch leicht.

Andere Recepte, mit Anwendung von Zucker- und (kohlensäurefreier!) Alkalilösung: Martin, Pogg. Ann. 120, 335. 1863; Lohse, Jahrbuch für Photographie, 1887.

7. **Glas platiniren.** Nach Kundt. 3 g Platinchlorid, in 10 cbcm abs. Alkohol gelöst, werden mit 30 cbcm koncentrirter alkoholischer Lösung von Borsäure versetzt. Hierzu kommt die doppelte Menge einer Mischung von venetianischem Terpentin und Lavendelöl, je nach der beabsichtigten Dickflüssigkeit in verschiedenem Verhältnis. Für optisch brauchbare Spiegel wird ein Tropfen von mäfsig dünnflüssiger Lösung aufgebracht, eine zweite Glasplatte aufgelegt, so dafs zwischen beiden eine dünne Flüssigkeitsschicht sich bildet. Man zieht die Platten von einander ab und erwärmt langsam in einem Muffelofen zu ganz schwacher Rotglut.

Um Glas zu löten, bestreicht man es mit dickflüssiger Lösung und erwärmt über der Flamme langsam zur Rotglut. Das eingebrannte Platin wird galvanisch verkupfert und kann dann mit Zinn gelötet werden.

Auch versilbertes Glas läfst sich nach Einbrennen des Silbers und Verkupfern löten, der Zusammenhang ist aber weniger fest (Röntgen).

8. **Glas blasen.** Eingehende Anweisung z. B. in Ebert, Anleitung zum Glasblasen, Leipzig 1895. Im allgemeinen ist folgendes zu beachten. Das Aufblasen oder Ausziehen wird in der Regel nach dem Entfernen aus der Flamme ausgeführt. — Das Anwärmen ist auf eine beträchtliche Strecke auszudehnen; die Gefahr des Zerspringens pflegt vorüber zu sein, sobald das Glas die Flamme färbt. — Dünnere Röhren biegt man in der rufsenden Flamme (Fischschwanzbrenner); dickere müssen während des Biegens durch Blasen geformt werden. — Zusammengeschmolzene verschiedene Glasstücke sind einige Zeit in der Flamme gut zu „verblasen“,

so dafs keine scharfe Berührungsfläche bleibt, und nachher in der leuchtenden Flamme zu kühlen, bis sie schwarz werden. — Für Arbeiten an dünnen Stücken ist der Bunsenbrenner oft bequemer als die Gebläselampe. — Das Kühlen von Stücken mit eingeschmolzenem Platin, für welches die rufsende Flamme zu vermeiden ist, kann über dem Cylinder eines Argandbrenners geschehen.

9. **Glas und Metall zeichnen.** Dauernd zeichnet man mit „Diamanttinte“, vorübergehend mit den blauen Fettstiften von Joh. Faber.

10. **Glas schneiden.** Der Diamant ist auf seine richtige Stellung auszuprobiren und mit geringem Druck gut parallel zu führen. Weite Glasröhren schneiden sich am besten mit dem Röhrendiamant von innen. Enge Röhren ritzt man und bricht sie nachher. Mit dem Brechen soll sowohl bei Platten, wie bei Röhren immer thunlichst eine auseinanderziehende Kraft verbunden werden. — Sprengkohle soll nicht viele Asche geben. Dieselbe wird stets etwas vor den Sprung, den man fortführen will, gehalten.

11. **Metalle amalgamiren.** Zink wird in Salzsäure, Kupfer, Messing in verdünnter Salpetersäure mit einer metallischen Oberfläche versehen und dann in Quecksilber getaucht oder mit solchem eingerieben. Nachher wäscht man mit Wasser und entfernt ev. überschüssiges Quecksilber. Statt einzureiben kann man in eine etwas saure Lösung von Quecksilber-Chlorid bez. Nitrat eintauchen.

Um Eisen zu amalgamiren, verzinnt man es zuerst in der Hitze.

Platin, ganz frisch gereinigt, amalgamirt sich häufig beim blofsen Eintauchen in Quecksilber, sonst bringt man es als Kathode in eine Lösung von Quecksilbernitrat.

12. **Löten.** Bei dem gewöhnlichen Löten ist besonders die vorgängige Entfernung des Oxyds durch Benetzen mit Lötwasser etc. und Erhitzen, sowie das Ruhighalten während des Erstarrens zu beachten. Dünne Körper verzinnt man durch Eintauchen in einen Fingerhut mit geschmolzenem Zinn. Das Lötwasser nachher abspülen! Stearin oder Kolophonium können einigermafsen das Lötwasser ersetzen.

Mit Gold löten. Ein Stückchen Goldblatt oder Golddraht wird mit etwas Boraxpulver zwischen den zu verlötenden Flächen in der Stichflamme zum Schmelzen gebracht.

13. **Platin schweifsen.** Die zu verbindenden Stückchen werden in Berührung mit einander (zwei Drahtenden etwa einmal umeinander gewickelt, oder ein Draht durch ein oder zwei Löcher in einem Blech durchgesteckt) in der Spitze der Gebläseflamme weifsglühend gemacht und auf einer darunterstehenden blanken Eisenfläche durch einen oder zwei kurze Schläge mit einem kleinen Hammer vereinigt. — Zusammenschmelzen kann man Platinstückchen in der Stichflamme des Sauerstoffgebläses.

14. **Stahl härten.** Der zur Kirschrotglut gleichmäfsig und rasch erwärmte Stahl wird in Wasser oder Öl abgelöscht; Einreiben mit Seife

vermindert das Oxydiren. Gestreckte Stücke sind, damit sie sich nicht verwerfen, longitudinal einzusenken. Um glasharten Stahl anzulassen, kann je nach dem gewünschten Grade siedendes Wasser, heifses Öl oder langsam die Flamme gebraucht werden, in welcher die Anlafsfarbe (gelb bis blau) den Grad des Anlassens giebt. (Vgl. Holborn, Z. S. f. Instr. 1891, 114.)

15. **Metalle ausglühen.** Dünne Drähte soll man ohne Spannung in die Flamme halten. Ein bequemes Mittel ist unter Umständen der elektrische Strom. Oxydirbare Metalle glüht man im bedeckten Gefäfs unter einem Strom von Kohlensäure oder Wasserstoff. Platin darf nicht in die rufsende Flamme kommen!

16. **Magnetisiren. Entmagnetisiren.** Kurze Stäbe hält man zum Magnetisiren zwischen die Pole eines Hufeisenmagnets und hebt sie parallel den Kraftlinien heraus. Längere magnetisirt man durch Streichen oder mittels Einlegens in oder Durchziehens durch eine Stromspule. Plötzliches Unterbrechen des Stromes, während der Stab in der Spule liegt, ist zu vermeiden. Entmagnetisiren kann man kleine Stücke durch Rotation zwischen den Polen eines Magnets oder zwischen den Polen eines rotirenden Magnets (Centrifugalmaschine), indem man sie während der Bewegung langsam entfernt. Oder man behandelt die in einer Spule liegenden Stücke mit kräftigen Wechselströmen, welche man durch allmähliches Einschalten eines Flüssigkeitsrheostaten bis auf Null abschwächt.

17. **Schleifen und Poliren.** Das Schneiden des Körpers geschieht mit einem Schmirgeldrahte oder mit der Laubsäge, das Abschleifen auf einem Stein oder einer Glasplatte bei harten Körpern mit Schmirgel, bei weicheren mit Bimsstein oder blofs auf mattem Glase. Polirt wird mit Englisch Rot, Tripel oder Zinnasche, oder bei ganz weichen Körpern ohne Polirmittel, auf einer mit Leinwand oder Papier stramm bezogenen Glasplatte thunlichst mit gerader Führung des Körpers, deren Richtung man oft wechselt. Als Schleif- oder Polirflüssigkeit dient, wenn Wasser den Körper angreift, Alkohol. Den Finger mag man im letzteren Falle mit Kautschuk bedecken. Englisch Rot oder Tripel wird trocken angewandt. Krystallen zu Zwecken optischer Untersuchung giebt man zuerst eine oberflächliche Politur, um unter dem Polarisationsapparat zu erkennen, ob die Platte richtig orientirt ist. Andernfalls korrigirt man die Flächen, bis die richtige Richtung erzielt ist, und polirt nach vollständigem Eben- und Fein-Schleifen fertig.

18. **Überziehen von Metallen mit Platinschwarz.** Man bringt das Metall (Platin oder Silber) in eine verdünnte, mit etwas Salzsäure versetzte Lösung von Platinchlorid, entweder als negative Elektrode eines Stromes, oder einfacher, indem man das Blech unter der Flüssigkeitsoberfläche mit Zink berührt.

Lummer und Kurlbaum empfehlen 1 Teil Platinchlorid in 30 Teilen

Wasser unter Zusatz von 0,008 Teilen Bleiacetat. Die Stromdichte soll 0,03 Am/cm², die Spannung 4 Volt betragen. (Verh. d. Physik. Ges. Berlin 14. Juni 1895.)

19. **Holz etc. paraffiniren.** Das Holz wird, in Paraffin untergetaucht, mit dem letzteren erheblich über den Siedepunkt des Wassers (etwa auf 140°) so lange erhitzt, bis das Entweichen von Gasblasen aufhört. Alsdann läſst man so langsam erkalten, daſs der Luftdruck Zeit hat, die Holzporen mit Paraffin zu füllen. So behandeltes Holz isolirt auch statische Elektricität. Papier zieht man langsam durch das heiſse Paraffin (über 100°! sodaſs zugleich die Flüssigkeit verdampft) und läſst während des Erkaltens den Überschuſs abtropfen.

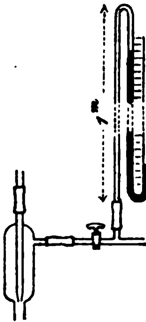
20. **Cocon abspulen.** Der Cocon wird etwa 10 min in heiſses Wasser untergetaucht, damit der Klebstoff sich auflöst, dann entfernt man, den Cocon in der Hand drehend, die oberflächliche lose Seide, an welche der eigentliche Coconfaden sich anschlieſst. Man spult den auf erneuertem heiſsen Wasser schwimmenden Cocon auf ein Röllchen, welches auf einen konischen Stab (Stahlfederhalter) gesteckt ist. Den Faden läſst man auf eine so groſse Strecke durch die Luft gehen, daſs er trocken aufläuft, weil sonst die Fäden zusammenkleben. Der Coconfaden wird nach innen feiner; um über verschiedene Stärken zu verfügen, spult man die Teile auf mehrere Rollen. Ein während des Abspulens verlorenes Ende sucht man durch leichtes Schlagen mit einem Stäbchen wieder zu finden.

Über das Aufhängen am Cocon s. **55**a.

21. **Quarzfäden.** Boys, Phil. Mag. (5) **45**, 489, 1887. Man befestigt Quarzstäbchen, die man im Knallgasgebläse durch Zusammenschmelzen geformt hat, an einem Pfeil aus Holz oder aus einem Strohhalm mit einer Nadelspitze durch Kitt oder durch eine Klammer. Darauf wird die Mitte des Stäbchens im Knallgasbrenner geschmolzen und der Pfeil von einer am Blastisch im Schraubstock befestigten Armbrust aus gröſserer Entfernung in ein Brett abgeschossen, sobald der Quarz weich geworden ist. Die hintere Hälfte des Stäbchens hält man fest. Auch kann man mit der Stichflamme Fäden direkt weg- und an ein hintergestelltes Stück Sammet anblasen (Nichols). Quarzfäden sind nicht hygroskopisch und besitzen bei groſser Festigkeit eine sehr geringe elastische Nachwirkung. Quarzfäden kann man durch Versilbern (Nr. 6) elektrisch leitend machen und als Aufhängung für Elektrometernadeln benutzen (Himstedt).

22. **Luftpumpen- und Hahn-Fett.** Talg mit Schmalz oder Olivenöl oder Wachs mit Knochenöl zu passender Konsistenz gemischt. Ein Gemisch aus Wachs und Vaselin hat den Vorteil, wenig Dämpfe abzugeben, dichtet aber auf die Dauer weniger gut.

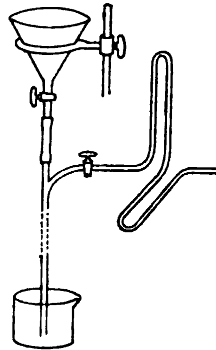
23. **Wasserluftpumpe.** Hat die Wasserleitung groſsen Druck, so wendet man die Strahlpumpe an, muſs aber auch dafür sorgen, daſs der Druck nicht etwa durch eng gebohrte Hähne aufgehoben wird. Die



Strahlpumpe kann bei Zimmertemperatur bis auf 20 mm Quecksilberdruck auspumpen. Absätze aus kalkhaltigem Wasser an der Spitze können die Wirkung beeinträchtigen; man entfernt dieselben mit Salzsäure. Bei geringem Druck, wenn aber Gefälle zur Verfügung steht, dient die Bunsen'sche Tropfenpumpe. Für ein langsam gleichförmiges Saugen, z. B. beim Austrocknen von Röhren, ist die letztere überhaupt sicherer und ökonomischer.

Um bei dem Abstellen des Zuflufshahnes das Eindringen von Wasser in den evakuirten Raum zu vermeiden, soll an dem Luftrohr ein Hahn sitzen, den man vor dem Abstellen schliefst.

24. **Quecksilberluftpumpe.** Biegsame dichte Verbindungen bilden die Kundt'schen Federn aus dünnen Glasröhren mit nach zwei Seiten ausgebogenen Teilen von etwa $^1/_3$ m Länge (Fig.)

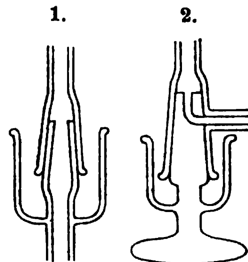


Kleine Volumina pumpt man bequem mit der kontinuirlich wirkenden Sprengel'schen Tropfenpumpe aus, welche aus einem Glastrichter mit Hahn und einem $1^1/_2$ m langen Rohr von 3 mm lichter Weite mit Seitenansatz leicht zu improvisiren ist.

Wenn eine Geissler'sche Pumpe keine innere Trockenvorrichtung hat, so liegt die Ursache einer schlechten Wirksamkeit häufig an Feuchtigkeit über dem Quecksilber, die durch Auspumpen nicht zu beseitigen ist. Man mufs dann wiederholt mit trockener Luft füllen oder auch die Pumpe entleeren und mit einem Luftstrom trocknen und das Quecksilber auf etwa 140° erwärmen. Die in die Pumpe eintretende Luft soll stets getrocknet sein.

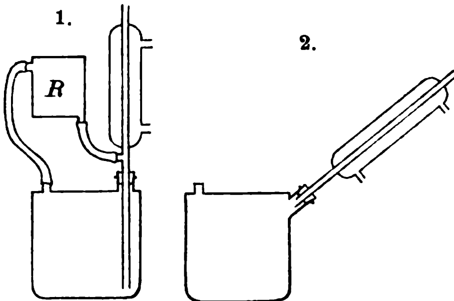
Glasröhren, welche evakuirt abgeschmolzen werden sollen, sind vorher an der betr. Stelle auf 2 bis 3 mm Lumen zu verjüngen.

25. **Quecksilberdichtungen.** Um einen Glasschliff ohne Fett zu dichten, wird hinter den Spitzkonus ein kleines Gefäfs angeschmolzen, welches man nach dem Aufsetzen und Andrücken des Hohlkonus bis mindestens etwa 6 mm über den Rand des Hohlkonus mit Quecksilber füllt. Passen die Flächen einigermafsen aufeinander, so leistet der Kapillardruck des Quecksilbers dem Atmosphärendruck Widerstand (Lehmann). Ähnlich können Hähne mit Quecksilberdichtungen hergestellt werden (Fig. 2, Kahlbaum, Z. S. f. Instr. 1894, 21. S. daselbst auch die Doppelschliffe mit zwei auswechselbaren Ansätzen).



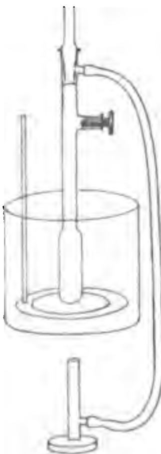
26. Wassermotoren. Die Zuleitung und Hahnbohrung der Wasserleitung mufs genügend weit sein, um bei dem Laufen keinen Druckverlust zu bewirken. Man hat Motoren mit Kolbendruck und mit Stofskraft. Die letzteren, verbreiteteren betreffend, sei bemerkt, dafs dieselben unökonomisch arbeiten, wenn man das Wasser aus weiter Spitze ausströmen läfst und den Zuflufs mit dem Hahn der Wasserleitung abschwächt. Enge Spitze und weiter Hahn nutzen den Druck aus. Hat die Wasserleitung geringen Druck, so kann für geringe Kräfte ein kleines oberschlächtiges Mühlrad brauchbar sein.

27. Konstante Temperaturbäder. Hohe Temperaturen liefert dauernd der Dampf einer siedenden Flüssigkeit (Tab. 16a), von welchem man den zu erwärmenden Raum *R* durch- oder umspülen läfst. Ein Rückflufskühler mit hinreichend weitem Rohr führt ev. den überschüssigen Dampf zurück. Schema siehe neben.



Für hochsiedende Flüssigkeiten genügt oft ein Rückflufskühler in Luft; vgl. die Figur S. 125.

Tiefe Temperaturen: 0° Gemisch von Eis und Wasser; —21° Gemisch von Kochsalz mit zerstofsenem Eis oder besser Schnee; — 79° Gemisch von Äther mit fester Kohlensäure, die letztere im Überschufs. Die Mischungen müssen gerührt werden, besonders wenn wenig feste Substanz vorhanden ist.



Mittlere Temperaturen zwischen derjenigen des Zimmers und dem Siedepunkt der Bad-Flüssigkeit hält man durch Regulirung des Heizgas-Verbrauchs durch einen Thermostaten konstant. Derselbe drosselt selbstthätig den Gaszuflufs, sobald eine bestimmte Temperatur erreicht ist, durch eine sich ausdehnende und dadurch den Weg sperrende Flüssigkeit, deren Vorratsgefäfs sich in dem zu regulirenden Raume befindet. Eine kleine seitliche Öffnung hindert das vollständige Verlöschen der Flamme. Schema eines Quecksilber-Thermostaten s. Fig.

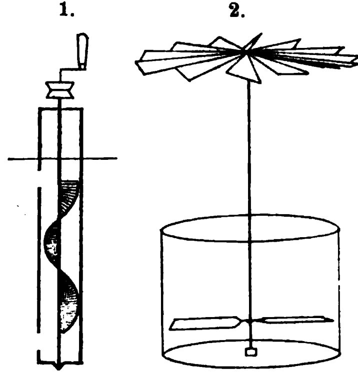
Der Quecksilberstand mufs für verschiedene Temperaturen regulirbar sein. Die hierzu dienende Vorrichtung stellt der Seitenansatz mit verstellbarer Schraube vor. Ausführlicheres über Thermostaten bei Ostwald, Physikochemische Messungen, S. 60.

Flüssigkeiten für Bäder sind Wasser, Petroleum, Vaselinöl, konc. Lösungen von Chlorcalcium oder Chlorzink (bis etwa 130° brauchbar), geschmolzenes Paraffin (bis 300°), ge-

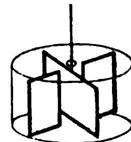
schmolzenes Kalium- oder Natriumnitrat oder ein Gemisch von beiden. Ein Gemisch aus gleichen Teilen schmilzt etwa bei 225° und ist bis 600° brauchbar.

28. **Rührer.** Der einfachste Rührer und viel öfter genügend, als die Mode glaubt, ist eine Feder oder dgl. Ringrührer (Fig. S. 36) biegt man aus einem steifen Draht oder einem Glasstab, oder besser, man setzt an einen flachen Ring aus Blech, Glimmer, Federn etc. einen geraden Stiel aus Draht, Holz, Hartkautschuk, dem man nötigenfalls eine Führung giebt.

Der Schraubenrührer (1) ist am Platze, wenn zerbrechliche Gegenstände im Gefäfs sind oder wenn ein Motor zum Rühren angewandt werden soll. Ein Rohr (Glas, Blech, im letzteren Falle vielleicht an eine Wand des Gefäfses angelötet) hat je eine untertauchende Öffnung unten und oben; eine Drehungsaxe trägt einen Schraubenflügel. Die Schraube saugt und stöfst die umgebende Flüssigkeit durch das Rohr. Oder man setzt Flügel (2) in das Gefäfs selbst ein, die, wenn ihre Drehungsaxe gut vertikal steht, sich mit geringer Reibung drehen, so dafs die Triebkraft eines Flügelrades mit untergestelltem Flämmchen genügt (Ostwald). Um in einem hermetisch verschlossenen Gefäfs zu rühren, kann ein Stückchen Eisen am Rührer dienen, welches durch einen aufsen rotirenden Hufeisenmagnet gedreht wird (Forch, Wied. Ann. 55, 104. 1895).



29. **Dämpfer.** Schwingungen um eine vertikale Axe dämpft man durch einen Flügel, bestehend aus dünnem Blech oder aus einem Rähmchen mit Seidenpapier bespannt oder dgl., in einem Gefäfs mit Flüssigkeit oder Luft. Die Wirksamkeit wird vermehrt, indem man das Gefäfs, für Luftdämpfung mit Deckel versehen, durch feste Flügel, welche von den Wänden bis in die Nähe der Axe gehen, in Kammern abteilt (Toepler). Genügen kleine Ausschläge, so nähert man einer mit der Axe verbundenen vertikalen Scheibe eine feste Fläche (W. Thomson).



Elektromagnetische Dämpfung liefert ein Stück Kupfer an der Axe, dem man einen Magnet unterlegt oder noch besser die Pole eines Hufeisenmagnets von zwei Seiten nähert.

Vertikale Schwingungen werden z. B. durch einen mit dem bewegten Körper verbundenen Cylinder gedämpft, der sich in einem unten geschlossenen, nur wenig weiteren, mit Luft oder einer Flüssigkeit (Wasser, Glycerin) gefüllten Cylinder bewegt.

— — —

Über Destillation im Vacuum s. Anschütz, Bonn 1895. Über Werkzeuge, Konstruktionsteile, Verbindungen, Giefsen, Kitten, Metallbearbeitung etc. s. Lehmann, Physikalische Technik.

7a. Herstellung von Lösungen.

Nach Gewichtsgehalt.

1. Man wägt die Menge K des Körpers ab und löst diese zum Gesamtgewicht L, dann ist K/L der Gehalt, 100 K/L der Procentgehalt.

Aus einer Lösung vom Gehalt p erhält man eine verdünntere vom Gehalt p', indem man das Gewicht K' der Lösung zum Gesamtgewicht $L' = K' \cdot p/p'$ verdünnt, oder wenn man zu K' das Gewicht $K'(p - p')/p'$ Lösungsmittel zusetzt (Schütteln nicht vergessen!).

Von Korrektionen kommt nur diejenige der Wägungen auf den leeren Raum herein, die man aus einer (genäherten) Kenntnis der specifischen Gewichte nach **11** II oder bequemer nach Tab. 8 ermittelt.

Zu beachten ist, daſs zur Wägung der gröſseren Menge der Lösung meistens eine weniger feine Wage genügt, als für den Körper. Ungleicharmigkeiten sind dann aber ev. durch Doppelwägung (**11**) zu eliminiren.

2. Das zum Körper K Gramm zugesetzte Lösungsmittel kann, wenn sein specif. Gewicht Q bekannt ist, nach Volumen v cm^3 abgemessen werden. Dann ist $p = K/(K + v \cdot Q)$. Über Q bei Wasser s. Tab. 4.

3. Im Princip identisch mit 1. ist die Ermittelung der in einem Gewicht L enthaltenen Menge K durch Eindampfen oder chemische Analyse einer fertigen Lösung.

4. Das bekannte specif. Gewicht einer wässerigen Lösung liefert den Gehalt aus Tab. 3 oder nach Gerlach, Salzlösungen, Freiberg 1859; Z. S. f. Analyt. Chemie 8, 279, 1869; oder Hofmann, Tabellen für Chemiker; oder (unter Beachtung des Druckfehlerverzeichnisses für die Temperaturen) Landolt und Börnstein, Tabellen etc. etc. Die Angaben der specif. Gewichte beziehen sich auf Wasser teilweise von gleicher Temperatur ($s_{t/t}$) teilweise von 4° ($s_{t/4}$). Man reducirt nach der Beziehung $s_{t/4} = Q_t \cdot s_{t/t}$; Q ist die Dichtigkeit des Wassers (Tab. 4).

Um eine Lösung von einer Temperatur t auf t_0 zu reduciren, hat man $s_0 = s_t(1 + \alpha(t - t_0))$. Den mittleren Ausdehnungskoefficienten α zwischen t u. t_0 s. z. B. bei Gerlach, Salzlösungen

(l. c.); Kremers, Pogg. Ann. 105, 367. 1858; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein, Tabellen; auch Tab. 3a.

Der Gewichtsgehalt selbst hängt natürlich nicht von der Temperatur ab.

Gelegentlich wird anstatt des Gehaltes p in 1 (bez. 100) Teilen der Lösung der Gehalt P in 1 (bez. 100) Teilen des Lösungsmittels angegeben. Es ist

$$P = p/(1 - p) \text{ bez. } P = p/(100 - p).$$

Nach Gehalt in der Volumeinheit.

Der „Volumgehalt" wird als Gewicht p_v des gelösten Körpers, oder aber als Anzahl m der gelösten Moleküle (bez. Äquivalente) in der Volumeinheit angegeben. $1/m$ heifst molekulare Verdünnung der Lösung. Zu der Koncentration p nach Gewichtsverhältnissen besteht die Beziehung (s = specif. Gewicht der Lösung, A = Molekular- bez. Äquivalentgewicht des Körpers)

$$p_v = p \cdot s \qquad m = p_v/A = ps/A.$$

Wird p nach Procenten oder gr in 100 cm³ gerechnet, m aber wie gewöhnlich nach gr-Molek./Liter, so kommt natürlich $m = 10 \cdot ps/A$.

5. Der Körper K wird zum Volumen V gelöst, dann ist $p_v = K/V$. Wegen der Volumänderung beim Lösen wartet man vor dem Ablesen oder dem endgiltigen Abgleichen des Volumens, bis alles gelöst ist, schüttelt auch vorher (überhaupt Schütteln nicht vergessen!).

Eine Normallösung von 1 gr-Mol./Liter wird durch Auflösen von A gr zu 1 l erhalten. Einen bekannten Krystallwassergehalt des Körpers rechnet man bei wässeriger Lösung gleich mit in A. Beim Abwägen wird von A der Auftrieb in der Luft d. h. Amal die betr. Zahl aus Tab. 8 abgezogen. Über das specif. Gewicht von Normallösungen s. Tab. 3a.

Von einer koncentrirten Lösung geht man zu einer verdünnteren hier am bequemsten mit Pipetten u. dgl. über. Das Volumen v einer Lösung von der Koncentration p_v zum Volumen V verdünnt, giebt die neue Koncentration $p_v' = p_v \frac{v}{V}$.

Verdünnt man in der Weise, dafs zu einem Volumen v der Lösung das Volumen v_0 des Lösungsmittels gesetzt wird,

so ist natürlich $p_v' = p_v \cdot v/(v_0 + v)$. Es sind also, um von p auf p' zu verdünnen, die Volumina Lösungsmittel: Lösung $= (p - p') : p'$ zu nehmen.

Diese Verdünnung durch ein abgemessenes Volumen Lösungsmittel bringt aber eine Korrektion mit sich, wenn Kontraktion bei der Verdünnung eintritt. Es sei s die Dichtigkeit der Originallösung p_v; p_v' sei die ohne Kontraktion berechnete neue Koncentration. Dann würde $s'' = 1 + (s - 1)p_v'/p_v$ die neue Dichtigkeit ohne Kontraktion sein. Ist die Dichtigkeit wirklich $= s'$, so hat man die richtige Koncentration $= p_v' \cdot s'/s''$.

Bei genauen Angaben hat man auch darauf zu achten, daſs der auf die Volumeinheit bezogene Gehalt durch die Ausdehnung mit der Temperatur etwas veränderlich ist, auch ist bei dem Auflösen oder Verdünnen die Temperatur zu beachten.

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

8. Wage.

Die Wägung eines Körpers bestimmt das Verhältnis seiner Masse zu der Masseneinheit, gewöhnlich dem Gramm. Im leeren Raum verhalten sich die Gewichte wie die Massen; in der Luft streng nur dann, wenn die verglichenen Körper gleiche Dichtigkeit haben. Über die Reduktion einer Wägung auf den leeren Raum vgl. **11.**

Die folgenden Vorschriften zur Behandlung einer Wage schliefsen sich an die zur chemischen Analyse gebräuchliche Form an.

I. Aufstellung und Prüfung der Wage.

Zuerst werden nötigenfalls die Schneiden und Pfannen mit einem Pinsel von Staub gereinigt oder mit einem Leder geputzt. Ein kleines Stäubchen oder Fäserchen kann die Einstellungen verderben.

Man stellt mit den Fufsschrauben das Senkel oder die Libelle ein; besitzt die Wage keine solche Vorrichtung, so setzt man eine Dosenlibelle in den Wagekasten oder nivellirt nach einem Senkel, welchem man den arretirten Zeiger parallel stellt.

Nun löst man die Arretirung aus, korrigirt ein etwaiges gröberes einseitiges Übergewicht und überzeugt sich, dafs alsdann die Wage eine stabile Gleichgewichtslage hat. Sollte das Gleichgewicht labil sein (die Wage „umschlagen“), so wird zunächst das in der Mitte befindliche Laufgewicht herabgeschraubt, bis diesem Umstande abgeholfen ist.

Die Empfindlichkeit der Wage wird durch das Hinauf- oder Herabschrauben des genannten Laufgewichtes regulirt. Die Empfindlichkeit läfst sich aus der Schwingungsdauer beurteilen, deren zweiter Potenz sie für eine bestimmte Wage proportional ist. Die Dauer einer Schwingung ist bei der gewöhnlichen Form der Wage etwa zwischen 10 und 15 sec, bei den kurzarmigen von Bunge eingeführten Wagen zwischen 6 und 10 sec

zu wählen. Eine gröſsere Schwingungsdauer verursacht Zeitverlust, stärkere Dämpfung meistens Unregelmäſsigkeiten der Einstellung, welche die gröſsere Empfindlichkeit nutzlos machen.

Nachdem die passende Schwingungsdauer hergestellt worden, bewirkt man mittels der für diesen Zweck vorhandenen Einrichtung (Laufgewicht am Ende des Balkens; Durchbohrung des vertikalen Laufgewichtes; drehbarer Arm u. s. w.), daſs der Zeiger der unbelasteten Wage auf den mittelsten Teilstrich einsteht, bez. nach beiden Seiten gleich weit schwingt. Eine Unsymmetrie von wenigen Zehnteln eines Skalenteils mag man übrigens mit den Fuſsschrauben der Wage korrigiren, wobei man die eine um gleich viel verkürzt, wie man die andere verlängert.

Prüfung der Wage. Die Hauptforderung besteht darin, daſs die Wage, wiederholt arretirt und ausgelöst, eine unveränderte Einstellung zeigt und daſs die Schwingungen nur langsam abnehmen. Und zwar sollen diese Bedingungen auch noch bei der Maximalbelastung erfüllt sein. Fehlerquellen können darin bestehen, daſs irgend eine Verschraubung am Wagebalken nicht ganz fest angezogen ist, oder in einer Unsauberkeit, ungeeigneter Gestalt oder Verletzung der Schneiden oder Pfannen.

Es soll ferner bei gehobener Arretirung der Zeiger gerade über dem mittleren Teilstrich stehen; bei dem Senken sollen die beiden Zapfen, auf denen der arretirte Balken ruht, diesen gleichzeitig loslassen.

Die Gleicharmigkeit prüft man durch beiderseitiges Aufsetzen von hinreichend groſsen Gewichtstücken, welche sich das Gleichgewicht halten: nach ihrer Vertauschung muſs dieselbe Einstellung erfolgen. Vollkommen genau ist die Gleicharmigkeit schwer herzustellen. Für viele Zwecke ist dieselbe auch nicht nötig, wenn man stets dieselbe Schale für den Körper gebraucht. Über die Bestimmung der Ungleicharmigkeit s. **10.**

Endlich ist zu prüfen, ob die Wirksamkeit eines Gewichtes auf jeder Stelle der Wagschale dieselbe ist. An Brücken- und Tafel-Wagen können grobe Verstöſse hiergegen vorkommen; kleinere auch bei der gewöhnlichen Wage, wenn die Schale ohne Zwischengehänge an der Schneide hängt, was als ein Konstruktionsfehler bezeichnet werden muſs.

Die Reiterverschiebung und die Arretirung, auch die Thüren,

sollen einen sanften Gang haben. Den ersteren hilft man durch Abwischen mit einem Läppchen eventuell mit einer Spur Petroleum nach. Die Reiterverschiebung sollte mit Anschlägen versehen sein, die das Anstofsen an den Balken verhindern.

Als Gröfse des Skalenteils empfiehlt sich etwa das Millimeter. Zur Vermeidung der Parallaxe beim Ablesen spiele die Zeigerspitze dicht vor oder besser über der Teilung. Die Ablesung kann durch eine fest angebrachte schwache Lupe, etwa eine auf das Glas des Wagekastens geklebte Linse von geeigneter Brennweite, erleichtert werden.

Ist eine dritte kürzere Wagschale vorhanden, so soll sie einer der anderen an Gewicht genau gleich sein. Dafs die beiden gewöhnlichen Schalen einander genau gleich sind, ist nebensächlich.

Gebrauch der Wage. Dieselbe soll vor Erschütterungen geschützt stehen; auf einen hölzernen Wagetisch soll man die Arme nicht stützen. Kann man nicht umhin, im geheizten oder von der Sonne bestrahlten Zimmer zu wägen, so ist die Wage wenigstens vor Ungleichheiten der Erwärmung zu bewahren. Zum Schutz gegen Rost und um hygroskopische Einflüsse während der Wägung möglichst auszuschliefsen, kann ein in den Wagekasten gestelltes Gefäfs mit Ätzkalk oder Chlorcalciumstücken dienen. — Grobe Fehler können durch elektrische Ladungen entstehen, wenn man z. B. Glasteile des Wagekastens frisch geputzt hat.

Das Auflegen von Gewichten geschieht nur bei arretirter Wage; bei dem Aufsetzen gröfserer Gewichte oder bei dem Entlasten der Wage wird eventuell auch die Schalenarretirung angewandt. Pendelschwingungen der Schalen während der Wägung können zu Fehlern Veranlassung geben.

Selbstverständlich wird die definitive Wägung bei geschlossenem Wagekasten ausgeführt.

Spiegelablesung. Für die feinsten Wägungen benutzt man wohl an Stelle des Zeigers einen an dem Wagebalken angebrachten Spiegel, dessen Einstellung mit einem Fernrohr an einer Skale abgelesen wird. Vgl. **48** bis **50**.

Über äufserst empfindliche Formen von Wagen vgl. Warburg und Ihmory, Wied. Ann. 17, 483. 1886.

II. Wägungsverfahren.

Wo es möglich ist, beobachtet man die Wage im schwingenden Zustande, weil die Einstellung in der Ruhe unsicherer ist. Man pflegt durch Probiren so viel Gewichte aufzulegen, dafs die Schwingungen nach beiden Seiten von dem Nullpunkte gleich grofs sind. Vorausgesetzt ist dabei aber, dafs die unbelastete Wage ebenfalls den Nullpunkt innehält, und bei einer empfindlichen Wage, dafs eine Reiterverschiebung vorhanden ist.

Unabhängig hiervon, bei einiger Übung rascher und jedenfalls genauer, arbeitet man mit einem Interpolationsverfahren. Man vermeidet dadurch das wiederholte Reguliren des mit der Zeit etwas veränderlichen Nullpunktes, ferner das Ausprobiren eines genau gleichen Gewichtes. Endlich soll eine feine Messung womöglich nicht auf die Frage hinauskommen, ob zwei Gröfsen gleich sind, sondern auf die Frage, um wieviel sie verschieden sind.

Bestimmung des Nullpunktes. Darunter versteht man den Punkt der Skale, auf welchen der Zeiger der unbelasteten Wage in der Ruhe zeigen würde. Man findet den Nullpunkt aus einigen Umkehrpunkten des schwingenden Zeigers. Die Schwingungsweite mag etwa 2 bis 5 mm betragen.

Für mäfsige Genauigkeit beobachtet man zwei Umkehrpunkte und nimmt aus ihnen das Mittel. Hat die Wage eine stärkere Dämpfung, so werden mindestens 3 Umkehrpunkte beobachtet, zunächst aus Nr. 1 und 3 das Mittel genommen und dieses mit Nr. 2 zum Hauptmittel vereinigt.

Genauer und sicherer vor Irrtümern verfährt man durch Beobachtung einer gröfseren ungeraden Anzahl von Umkehrpunkten; fünf oder sieben genügen immer.

Alsdann wird das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite d. h. aus Nr. 1, 3, 5, und aus denen auf der anderen Seite d. h. aus Nr. 2, 4, genommen und aus diesen beiden Zahlen wiederum das Mittel. Dieses ist der gesuchte Nullpunkt. Damit man nicht nötig habe, rechts und links zu unterscheiden, bezeichnen wir den mittelsten Teilstrich der Wage nicht mit Null, sondern mit 10.

Beispiel.		Umkehrpunkte:					Mittel:	Nullpunkt:
	links	10,9		10,7		10,6	10,73	9,74
	rechts		8,7		8,8		8,75	

Um aus zwei oder drei wenig verschiedenen Zahlen das Mittel zu nehmen, braucht man nicht etwa erst alles zu addiren und die Summe dann durch 2 oder 3 zu dividiren. Dafs das Mittel aus 10,9 10,7 10,6 mit 10 anfängt, ist ja selbstverständlich. Und dafs ,9 ,7 ,6 das Mittel ,73 geben, sieht man auch sofort. Mittelnehmen ist bei geringer Übung ebenso einfach wie Addiren und Subtrahiren und ist keinen gröberen Rechenfehlern ausgesetzt; ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

Man kann statt dessen auch den Mittelpunkt Null nennen und die Ausschläge nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ nennen, also in dem obigen Beispiel schreiben + 0,9 — 1,3 + 0,7 etc. Der Anfänger aber wird in der vorhin angegebenen Weise weniger leicht Fehler begehen.

Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontroliren, nach stärkerer Belastung der Wage neu zu bestimmen. Findet man Unterschiede, so nimmt man das Mittel aus den beiden Bestimmungen, welche der Wägung vorangehen und ihr folgen.

Wägung. Es wird der Körper und andererseits durch Einschliefsen in immer engere Grenzen eine solche Zahl von Gewichtstücken aufgelegt, bez. schliefslich der Reiter so auf einen vollen Teilstrich aufgesetzt, dafs die Einstellung dem Nullpunkt nahe kommt. Alsdann macht man wieder nach dem obigen Schema einen Satz von Umkehrbeobachtungen. Das Mittel wird von dem Nullpunkt um eine Differenz von n Skalenteilen abweichen. Kennt man die Empfindlichkeit C der Wage (9), d. h. den Ausschlag durch 1 mg Mehrbelastung, so ist n/C die Gröfse, welche man den Gewichtstücken noch zulegen bez. von ihnen wegnehmen müfste, um völlige Gleichheit zu erzielen.

Kennt man die Empfindlichkeit nicht, so nimmt man ein oder einige mg fort oder legt zu, je nachdem die Gewichte zu schwer oder zu leicht waren, so dafs die Einstellung auf die andere Seite vom Nullpunkt fällt, und beobachtet abermals wie vorhin. War die erste Einstellung e_1, die jetzige e_2, die Veränderung des Gewichts zwischen beiden Beobachtungen gleich π, so hat man die Empfindlichkeit $C = (e_1 - e_2)/\pi$ und kann jetzt rechnen wie vorhin.

Mit anderen Worten, wenn gefunden wurde

der Nullpunkt e_0
bei der Belastung p_1 die Einstellung e_1
" " " p_2 " " e_2,

so hat der Körper das Gewicht

$$p_0 = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{e_0 - e_1}{e_2 - e_1}.$$

Selbstverständlich sind diese Differenzen sämtlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, wobei eine Erleichterung darin besteht, die Skalenteile nach derjenigen Richtung wachsend zu zählen, welcher eine Zunahme der Belastung entspricht.

Beispiel. Als Nullpunkt sei der obige Wert 9,74 gefunden. Nach Auflegung des Körpers wurde beobachtet

Belastung:	Umkehrpunkte:	Mittel:	Einstellung:
3036 mg	7,8 7,8 7,9 / 10,3 10,2	7,83 / 10,25	9,04
3038 mg	9,6 9,4 9,3 / 12,3 12,3	9,43 / 12,30	10,86

Ausschlag auf 1 mg gleich ½1,82 = 0,91 Sc. T.

3036 mg waren folglich zu leicht um (9,74 — 9,04)/0,91 = 0,77 mg.

Ebenso erhält man nach obiger Formel

$$p_0 = 3036 + 2 \cdot 0{,}70/1{,}82 = 3036{,}77 \text{ mg}.$$

Ob man nach gr oder nach mg zählen will, ist gleichgiltig, nur gewöhne man sich an eine bestimmte Zählung. — Auch das Protokoll der Beobachtungen soll nach einem bestimmten Schema, z. B. dem obigen geführt werden.

9. Empfindlichkeit einer Wage.

Empfindlichkeit der Wage heifst die Änderung der Zeiger-Einstellung für 1 mg Mehr-Belastung einer Schale. Ihre Bestimmung für verschiedene Belastungen ist als Kennzeichen für die Güte der Wage und ferner zur Vereinfachung der Wägungsmethode von Wichtigkeit. Besitzt man nämlich eine Tabelle oder eine Kurve, in welcher der Ausschlag auf 1 mg für die verschiedenen Belastungen angegeben ist, so genügt für jede Wägung, aufser der Bestimmung des Nullpunktes, eine einzige Beobachtung der Einstellung mit nahe richtigem Gewicht (vgl. S. 45).

Das Verfahren ergiebt sich von selbst. Man setzt auf beide Schalen die Belastung, für welche man die Empfindlichkeit C bestimmen will, und auf eine der Schalen ein kleines Übergewicht, so dafs die Einstellung um einige (2 bis 3) Skalenteile vom mittelsten Teilstrich abweicht. Diese Einstellung e wird nach 8 II genau beobachtet. Nun bringt man durch Mehr-

belastung der anderen Schale um π mg eine Einstellung ungefähr ebensoweit nach der anderen Seite hervor und beobachtet dieselbe. Sie sei e'; dann ist die Empfindlichkeit $C=(e-e')/\pi$.

Hat man C etwa für 0, 10, 20 .. g bestimmt, so stellt man den Verlauf durch Eintragen in Koordinatenpapier graphisch dar, als Abscisse die Belastung, als Ordinate die Empfindlichkeit, und verbindet die entstehenden Punkte durch eine Kurve, aus welcher dann C für irgend eine Belastung entnommen oder eine Tabelle hergestellt werden kann. Von Zeit zu Zeit wird man die Empfindlichkeit neu bestimmen müssen.

Über Reguliren der Empfindlichkeit siehe 8. — Wie C von der Belastung abhängt, das richtet sich nach der gegenseitigen Stellung der mittleren und der beiden Endschneiden. Zur Bequemlichkeit wird in der Regel für feinere Wagen eine von der Belastung unabhängige Empfindlichkeit gewünscht, bei welcher die drei Schneiden in einer Ebene liegen müssen. Da nun diese Bedingung wegen der Durchbiegung des Balkens streng nur für eine bestimmte Belastung erfüllt sein kann, so stellt der Mechaniker sie wohl für eine mittlere Belastung her. Dann findet man anfangs eine kleine Steigerung der Empfindlichkeit mit der Belastung, für gröfsere Gewichte wieder eine Abnahme.

10. Verhältnis der Wagebalken.

Die beiden Wagearme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte, welche als gleichzeitige Belastung der Schalen die Wage auf den Nullpunkt (8) einstellen. Da die vollkommene Richtigkeit des Gewichtsatzes nicht vorausgesetzt werden darf, so bestimmt man das Verhältnis folgendermafsen:

Man beobachtet den Nullpunkt bei unbelasteter Wage. Man setzt auf beide Schalen Gewichtstücke von gleichem Nennwert, etwa gleich der Hälfte der gröfsten für die Wage zulässigen Belastung, und bestimmt die Zulage, welche links oder rechts notwendig ist, um die Einstellung wieder auf den Nullpunkt zu bringen. Dabei werde im Interesse der Genauigkeit das Interpolationsverfahren (8) angewandt. Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontroliren und ev. mit seinem Mittelwert vor und nach der Wägung einzusetzen. Alsdann vertauscht man die Gewichte und verfährt gerade so. Bezeichnen wir die beiden

Gewichte vom Nominalbetrage p mit p_2 und p_1, und haben wir gefunden, dafs die Wage einsteht, wenn

bei der einen Wägung links p_1+l rechts p_2
„ „ anderen „ „ p_2 „ p_1+r,

so ist, die Länge des linken Wagebalkens mit L, die des rechten mit R bezeichnet,

$$\frac{R}{L}=1+\frac{l-r}{2p}.$$

Eine kleine Zulage einerseits kann dabei als negative Zulage andererseits betrachtet werden; siehe das Beispiel.

Auch die Doppelwägung eines Körpers ergiebt das Verhältnis der Wagebalken; siehe **11**, 1.

Beweis. Nach dem Hebelgesetze ist $L(p_1+l)=Rp_2$ und $Lp_2=R(p_1+r)$, woraus nach S. 9. Formel 8 und 3

$$\frac{R}{L}=\sqrt{\frac{p_1+l}{p_1+r}}=\sqrt{\frac{1+l/p_1}{1+r/p_1}}=1+\frac{l-r}{2p}.$$

Beispiel: Links	Rechts		
(50 g)	(20+10+⋯)	+0,83 mg	also $l=-0{,}83$
(20+10+⋯)	(50)	+2,56 „	„ $r=+2{,}56$

und $\frac{R}{L}=1+\frac{-0{,}83-2{,}56}{100000}=1-0{,}0000339$

oder auch $L/R=1{,}0000339$.

Die eingeklammerten Zahlen stellen die mit diesen Ziffern bezeichneten Gewichtstücke vor.

Zugleich folgt (**11**) (50) = (20+10+⋯) − 0,86 mg.

11. Absolute Wägung eines Körpers.

I. Elimination der Ungleicharmigkeit der Wage.

Man multiplicirt das scheinbare bei der Wägung gefundene Gewicht mit dem Verhältnis der Wagearme, als Zähler die Länge des Armes, an welchem die Gewichtstücke wirkten. Unabhängig von diesem Verhältnis, welches für feine Wägungen nicht einmal als unveränderlich betrachtet werden darf, machen die folgenden Verfahren.

1. Doppelwägung (Gauss). Man wägt den Körper einmal auf der rechten Schale, das andere Mal auf der linken Schale. Wenn p_1 und p_2 in beiden Fällen die Gewichtstücke bezeichnen, welche dem Gewichte des Körpers das Gleichgewicht

hielten, so ist das gesuchte Gewicht p des Körpers das Mittel $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$.

Der Nullpunkt der Wage braucht nicht bestimmt zu sein.

Beweis s. 4 Beisp. 3. Zugleich findet man, wenn p_1 und p_2 auf den wirklichen Nullpunkt der Wage bezogen sind, das Balkenverhältnis

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}.$$

2. Tarirmethode (Borda). Der Körper auf einer Schale wird durch irgend eine Belastung der anderen äquilibrirt, alsdann weggenommen und durch Gewichtstücke bis zur gleichen Einstellung der Wage ersetzt. Letztere geben sein Gewicht.

II. Reduktion der Wägung auf den leeren Raum.

Zweck der Wägung ist meistens die Bestimmung der Masse eines Körpers durch Vergleichung mit bekannten Massen aus einem sogenannten Gewichtsatze (vgl. unten). Statt Vergleichung der Massen kann man auch sagen Vergleichung der Gewichte im leeren Raum. In der Luft erleiden sowohl Körper als Gewichtstücke einen Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Luft. Nennt man

- m das scheinbare Gewicht des Körpers in der Luft, d. h. die Gewichtstücke, welche ihm in der Luft das Gleichgewicht halten,
- λ die Dichtigkeit der Luft ($\lambda = 0{,}00120$ im Mittel. Siehe auch **15** und Tab. 6),
- s die Dichtigkeit (das specifische Gewicht) des Körpers,
- σ die Dichtigkeit der Gewichtstücke,

so ist das Gewicht M im leeren Raume

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right).$$

Es ist also zu dem gefundenen scheinbaren Gewicht m hinzuzufügen $m\lambda(1/s - 1/\sigma)$, eine Korrektion, welche mit dem Unterschied von s und σ wächst. Für λ genügt fast immer der mittlere Wert 0,0012; die Korrektion für Messinggewichte enthält dann Tab. 8.

Beweis. Der Körper hat das Volumen $V = M/s$, die Gewichtstücke $v = m/\sigma$. Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luft; also verliert der gewogene Körper $\lambda V = \lambda M/s$, die Gewichtstücke $\lambda v = \lambda m/\sigma$. Da die Gewichte nach Abzug dieser Verluste gleich sind, so

ist also $M(1-\lambda/s) = m(1-\lambda/\sigma)$, woraus der obige Wert M nach S. 9, Formel 8 sich ergiebt.

Beispiel. Die Korrektion des scheinbaren Gewichtes w einer Wassermenge, wenn man mit Messinggewichten ($\sigma = 8{,}4$) gewogen hat, beträgt $w \cdot 0{,}0012\,(1/1 - 1/8{,}4) = w \cdot 0{,}00106$ d. h. 1,06 mg auf jedes Gramm.

Auch wo es nicht auf das absolute Gewicht, sondern nur auf Gewichtsverhältnisse ankommt, wie bei chemischen Analysen, bedingt der Auftrieb Korrektionen. Doch darf man alsdann den Auftrieb der Gewichtstücke vernachlässigen. Analysirt man z. B. eine verdünnte Silberlösung durch die Wägung eines Quantums Lösung und des daraus erhaltenen Chlorsilbers (Dichtigkeit $= 5{,}5$), und sind P und p die von der Wage angegebenen Gewichte, so sind die auf den leeren Raum reducirten $P(1+0{,}0012)$ und $p(1+0{,}0012/5{,}5)$. Der Chlorsilbergehalt beträgt also

$$\frac{p \cdot (1+0{,}0012/5{,}5)}{P \cdot (1+0{,}0012)} = \frac{p}{P}\left[1 - 0{,}0012\left(1 - \frac{1}{5{,}5}\right)\right] = \frac{p}{P} \cdot 0{,}9990.$$

Der unkorrigirte Wert p/P würde also um 0,1 % zu grofs sein. Die Vernachlässigung solcher einfacher Korrektionen ist angesichts der Kostbarkeit der Wage, der auf die Wägungen verwandten Sorgfalt und des oft durch die grofse Zahl der mitgeteilten Decimalen erhobenen Anspruchs auf Genauigkeit nicht zu rechtfertigen.

Über die principielle Frage, ob das Gramm eine Masse oder ein Gewicht vorstelle, vgl. die Bemerkung im Anhange über das absolute Mafssystem. In der gewöhnlichen Praxis der Messungen macht es selten einen Unterschied, ob man von Gewichten oder Massen spricht, insbesondere entstehen keine Irrtümer. Für die chemische Analyse oder irgend eine andere auf Procente hinausführende Operation ist es offenbar ganz gleichgiltig, ob man Gewichte oder Massen meint. Ebenso wird man zu den nämlichen Zahlen geführt, wenn man von dem specifischen Gewicht eines Körpers oder unter dem Namen Dichtigkeit von der specifischen Masse eines Körpers redet; vorausgesetzt, dafs man, wie immer, diese Eigenschaften des Körpers mit derjenigen des Wassers als Einheit vergleicht. Wenn aber entweder die Körper mit ihrer Trägheit in Betracht kommen oder wenn andrerseits Gewichte zur Kraftmessung dienen, wie bei der Messung von Arbeit, Druck, Elasticität, mufs man zwischen den Begriffen Masse und Gewicht streng unterscheiden.

12. Korrektionstabelle eines Gewichtsatzes.

Allgemein kommt die Aufgabe, die Fehler eines Gewichtsatzes zu bestimmen, darauf hinaus, dafs man sich durch Ausführung so vieler Wägungen, als Gewichte zu prüfen sind, ebensoviele Gleichungen bildet, aus denen das Verhältnis der Wagearme und dasjenige der Gewichte zu einander abgeleitet wird.

Bei der gebräuchlichen Anordnung eines Gewichtsatzes kann man nach folgendem Schema verfahren. Wir bezeichnen die gröfseren Stücke mit

$$50' \quad 20' \quad 10' \quad 10'' \quad 5' \quad 2' \quad 1' \quad 1'' \quad 1'''.$$

Man führe eine Doppelwägung mit 50′ einerseits und der Summe der übrigen Gewichte andrerseits aus. Man habe gefunden, dafs die Wage einsteht (der Zeiger in der Stellung ist, welche er bei unbelasteter Wage annimmt), wenn

Links	Rechts
$50'$	$20' + 10' + \cdots + r$ mg
$20' + 10' + \cdots + l$ mg	$50'$

so ist das Verhältnis der Wagearme (**10**)

$$R/L = 1 + (l - r)/100000$$

und $$50' = 20' + 10' + \cdots + \tfrac{1}{2}(r + l).$$

Ebenso vergleicht man 20′ mit 10′+ 10″ und 10′ mit 10″ sowie mit 5′+ 2′+ ⋯ Man wird dabei das Balkenverhältnis im allgemeinen von der Belastung etwas abhängig finden. Doch wird dasselbe so weit konstant sein, dafs für die kleineren Stücke nun eine einzelne Wägung genügt. Es bedeutet dann ein Stück p, rechts aufgelegt, auf die Balkenlänge der linken Seite reducirt, $p \cdot R/L$.

Beispiel. Es sei $r = -0{,}63$ $\quad l = +2{,}73$ mg, so ist

$50' = 20' + 10 + \cdots + 1{,}05$ mg und $R/L = 1{,}0000336$.

Ferner sei bei der Vergleichung des 5 g-Stückes mit der Summe der kleinen Gewichte gefunden, dafs die Wage einsteht, wenn

links $5' + 0{,}06$ mg $\qquad$ rechts $2' + 1' + 1'' + 1'''$,

so würden an einer gleicharmigen Wage sich das Gleichgewicht halten $5' + 0{,}06$ mg und $(2 + 1' + \cdots) \times 1{,}0000336$ oder $2' + 1' + \cdots + 0{,}17$ mg.

Folglich ist $\quad 5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + 0{,}11$ mg.

Diese Wägungen mögen ergeben haben, wobei den durch A, B etc. allgemein bezeichneten gefundenen Unterschieden gleich Zahlen als Beispiel beigeschrieben werden sollen:

$$\begin{aligned} 50' &= 20' + 10' + \cdots + A & &+ 0{,}48 \text{ mg} \\ 20' &= 10' + 10'' \quad + B & &+ \ ,06 \text{ „} \\ 10'' &= 10' \quad + C & &+ \ ,17 \text{ „} \\ 5' + 2' + 1' + 1'' + 1''' &= 10' \quad + D, & &- \ ,29 \text{ „} \end{aligned}$$

wo natürlich A, B, C, D positiv oder negativ sein können. Aus den Gleichungen mufs der Wert der fünf Stücke, die

Summe der einzelnen Gramme vorläufig als ein Stück betrachtet) in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Man wird, wenn man nicht etwa zugleich eine Vergleichung mit einem Normalgewicht vornimmt, diese Einheit so wählen, daſs die Korrektionen der einzelnen Stücke möglichst klein werden, und das ist der Fall, wenn man die ganze Summe als richtig annimmt, d. h. wenn man setzt

$$50' + 20' + 10' + \cdots = 100\,\text{g}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$S = \tfrac{1}{10}(A + 2B + 4C + 2D) \qquad +0{,}070\,\text{mg}$$

so ist, wie man leicht nachweisen kann,

$10' = 10\,\text{g} - S$	$-0{,}07$ mg
$10'' = 10\,„ - S + C$	$+\ ,10$ „
$5' + \cdots = 10\,„ - S + D$	$-\ ,36$ „
$20' = 20\,„ - 2S + B + C$	$+\ ,09$ „
$50' = 50\,„ - 5S + A + B + 2C + D = 50\text{g} + \tfrac{1}{2}A.$	$+\ ,24$ „

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist dadurch gegeben, daſs, wenn man die Korrektionen in Zahlen bestimmt hat, die Summe derselben $=0$ sein muſs und daſs die vier Beobachtungs-Gleichungen erfüllt sein müssen.

Ferner habe man durch Vergleichung der Stücke 5′ 2′ 1′ 1″ 1‴ untereinander gefunden

$5' = 2' + 1' + 1'' + 1'''$	$+ a$	$+0{,}54$ mg
$2' = 1' + 1''$	$+ b$	$+\ ,02$ „
$1'' = 1'$	$+ c$	$-\ ,10$ „
$1''' = 1'$	$+ d.$	$-\ ,13$ „

Setzen wir zur Abkürzung

$$s = \tfrac{1}{10}(a + 2b + 4c + 2d + S - D), \qquad +0{,}028\ „$$

so ist ähnlich wie oben

$1' = 1\,\text{g} - s$	$-0{,}03$ mg
$1'' = 1\,„ - s + c$	$-\ ,13$ „
$1''' = 1\,„ - s + d$	$-\ ,16$ „
$2' = 2\,„ - 2s + b + c$	$-\ ,14$ „
$5' = 1\,„ - 5s + a + b + 2c + d.$	$+\ ,09$ „

Ebenso wird mit den kleineren Gewichtstücken verfahren, wobei aber in der Regel die Ungleicharmigkeit der Wage nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht.

Befolgt man nun die Regel, stets zu bilden

die Gewichte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc gr

aus den Stücken

1′	2′	2′+1′	2′+1′+1″	5′	5′+1′	5′+2′	5′+2′+1′	5′+2′+1′+1″	10′,

so kann man für jede Ziffer aus den verschiedenen Dekaden gleich die Korrektion aufstellen, so für das obige Beispiel die Korrektionen in Hunderteln mg

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner	−7	+9	+2	+12	+24	+17	+33	+26	+36
Einer	−3	−14	−17	−30	+9	+6	−5	−8	−21
	etc. für Zehntel, Hundertel.								

Wir haben bisher die Summe der gröfseren Gewichtstücke als richtig angenommen, um die Fehler so klein wie möglich zu erhalten. Für die meisten Arbeiten (chemische Analyse, specifisches Gewicht), welche nur relative Wägungen verlangen, genügt dies. Soll die Fehlertabelle auf richtiges Grammgewicht bezogen werden, so ist es notwendig, die Gewichtstücke oder eins derselben mit einem Normalgewicht zu vergleichen (**11**). Die Rechnung ist ähnlich wie oben.

Ein Schema zur Prüfung eines Gewichtsatzes von anderer Anordnung wird man leicht finden.

Zur Unterscheidung der Gewichtstücke von gleichem Nennwerte sollten die Ziffern in verschiedener Weise eingeschlagen oder mit einem Index versehen sein; andernfalls mufs man zufällige Merkzeichen aufsuchen. Bei den Blechgewichten hilft man sich durch das Umbiegen verschiedener Ecken. — Auf den Gewichtsverlust in der Luft braucht keine Rücksicht genommen zu werden, wenn die gröfseren Stücke von gleichem Material sind, weil bei den kleineren der Unterschied ohne merklichen Einflufs ist. — Zur Prüfung der kleineren Stücke wendet man womöglich eine leichtere, d. h. bei gleicher Schwingungsdauer empfindlichere Wage an. — Die Wägungen sind durch Schwingungsbeobachtung nach 8 auszuführen, wobei die Nullpunktsbeobachtung häufig wiederholt wird.

Die Gewichtstücke pflegen durch den Gebrauch leichter zu werden, so dafs es kein Nachteil ist, wenn in einem neuen Satz die kleinen Stücke relativ etwas zu schwer sind.

13. Dichtigkeit oder specifisches Gewicht.

Dichtigkeit oder specifisches Gewicht s eines Körpers (vgl. Tab. 1 u. 3) nennt man das Verhältnis seiner Masse zu der Masse eines gleichen Volumens Wasser von 4°. Letzteres

Wasser also bildet die Einheit. Die Wahl einer anderen Temperatur (0^0 oder häufig 15^0) muſs im allgemeinen verworfen werden, insofern dem metrischen Maſssystem Wasser von 4^0 zu Grunde liegt.

Anstatt des Massen-Verhältnisses kann auch das Verhältnis der Gewichte im leeren Raum gesetzt werden. Vorausgesetzt, daſs man nach dem Meter- (Centimeter-) und Gramm-System misst, kann man specifisches Gewicht auch das Verhältnis des Gewichtes zum Volumen nennen oder, einen homogenen Körper vorausgesetzt, das Gewicht der Volumeinheit. Dabei gehören natürlich mg und mm, g und cm, kg und dm paarweise zusammen. Den beiden Bezeichnungen Dichtigkeit (specifische Masse) oder specifisches Gewicht, welche im Princip unterschieden werden, legt die Praxis die gleiche Bedeutung bei (vgl. Anhang: Einleitung und 5a).

Specifisches Volumen. So nennt man den reciproken Wert der Dichtigkeit, d. h. das Volumen der Masse Eins einer Substanz. Molekularvolumen heiſst das Molekulargewicht eines Körpers multiplicirt mit seinem specifischen Volumen oder dividirt durch seine Dichtigkeit; das ist also das Volumen eines „Gramm-Moleküls", d. h. einer Masse des Körpers von einer Anzahl Gramme gleich seinem Molekulargewicht. Entsprechende Bedeutung haben Äquivalent- oder Atom-Volumen.

Ein Gas nimmt man, wenn nicht anderes bemerkt wird, bei 0^0 und 760 mm Quecksilberdruck. Meistens aber vergleicht man ein Gas, anstatt mit Wasser, mit trockener atmosphärischer Luft (für chemische Zwecke auch mit Wasserstoff) von gleicher Temperatur und gleichem Druck, wobei die nähere Bezeichnung der Verhältnisse unnötig wird. Wir werden in der letzteren Bedeutung den Ausdruck Dichte gebrauchen (**16**).

I. Bestimmungsmethoden.

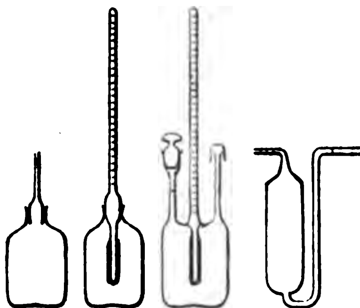
Die anzubringenden Korrektionen siehe unter II und III.

A. Für Flüssigkeiten.

1. Kalibrirtes Gefäſs. (Flasche, Meſscylinder, Bürette, Pipette **19**.) Man wägt ein abgemessenes Volumen. Beträgt die Menge *m* g, das Volumen *v* cbcm, so ist die Dichtigkeit

$s = m/v$. Wegen der Kapillar-Erhebung wird in einem geteilten Rohre das Volumen zweckmäfsig nach dem Eingiefsen einer kleinen Menge durch Differenzbeobachtung gemessen, wobei man stets den Stand des horizontalen Oberflächenteiles abliest. Vgl. **19**. Für genäherte Bestimmungen ist oft eine Pipette, auch eine kleine, brauchbar.

2. Pyknometer. Man wägt die Flüssigkeitsmenge m und die Wassermenge w, welche von einem und demfelben Gefäfs aufgenommen wird. Dann ist $s = m/w$. Eine kleine Flasche, bis zum Rande oder zu einem Strich am Halse gefüllt, liefert leicht die 3te Decimale noch richtig. Genauer arbeiten die mit den Namen Pyknometer, Tarirfläschchen, bezeichneten konstanten Gefäfse, welche ganz oder bis zu einer Marke gefüllt werden, am genauesten die dritte und vierte Form, bei welchen die eine Öffnung zum Einlassen der Flüssigkeit, die andere zum Auslassen bez. Absaugen der Luft dient. Verfügt man nur über einige Tropfen, so lassen sich ganz kleine Fläschchen, wie sie zu Dampfdichte-Bestimmungen (**16**, B) gebraucht werden, anwenden. — Nr. 4 (Sprengel-Ostwald) hängt man mit einem Drahte an die Wage. Die Kenntnis der Temperatur wird hier durch ein Bad von konstanter Temperatur erzielt, in welchem das Pyknometer sich aber hinreichend lange befunden haben mufs. Über Füllung und Temperaturbestimmung von Nr. 1 vgl. B, 2. Bequemer als Austrocknen des Gefäfses vor einer Neufüllung wird meistens Vorspülen mit der neuen Flüssigkeit sein.



3. Auftriebsmethode. Man wägt einen Körper (Glaskörper) in der Luft (p_l), in der Flüssigkeit (p_f) und im Wasser (p_w). Beträgt der Gewichtsverlust $m = p_l - p_f$ in der Flüssigkeit, $w = p_l - p_w$ im Wasser, so ist wieder $s = m/w$. Fehlerquelle ist hauptsächlich die Reibung in der Oberfläche bez. die Unregelmäfsigkeit in der Benetzung des Aufhängefadens, welche bei Metalldrähten erheblich ist, besonders im Wasser. Platin-

draht, den man platinirt (7, 18) und dann geglüht hat, vermeidet den Fehler. — Bequem ist ein Senkkörper, der durch ein Thermometer gebildet wird.

Mohr'sche Wage. Ein Glaskörper ist mit einem feinen Draht an einem decimal geteilten Wagebalken äquilibrirt. Der Auftrieb des Körpers in Wasser ist gleich dem Gewichte des gröfsten Reiters; die anderen sind 10, 100 bez. 1000mal leichter. Die Teilstriche des Wagebalkens, auf welche die Reiter aufgesetzt werden müssen, um den Auftrieb der Flüssigkeit auf den untergetauchten Glaskörper zu kompensiren, geben ohne weiteres die einzelnen Decimalen des specifischen Gewichtes an. Zur Richtigkeit der Mohr'schen Wage gehört 1) dafs die Gewichte oder Reiter sich wie 1:10:100 verhalten; 2) dafs die Abstände der Teilstriche gleich sind. Um dies zu prüfen, hängt man an den anderen Wagebalken eine kleine äquilibrirte Wagschale, setzt den gröfsten Reiter auf den Teilstrich 1, 2 etc. auf und untersucht, ob derselbe dabei Gewichten auf der Wagschale entspricht, welche sich wie 1:2 etc. verhalten; 3) dafs die Wage im Wasser von der Temperatur t diejenige Dichtigkeit zeigt, welche in Tab. 4 zu t gehört. Zeigt die Wage Q' statt Q, so sind alle Angaben derselben mit Q/Q' zu multipliciren. Eine gute Mohr'sche Wage kann mit feinem Platindraht (vgl. oben) die 4te Decimale noch einigermafsen richtig liefern.

Über die Beobachtungsweise bei Anspruch auf sehr grofse Genauigkeit s. K. u. Hallwachs, Wied. Ann. 50, 118. 1893; 53, 15. 1894; 56, 185. 1895.

4. Skalenaräometer. Diese geben an dem Teilstrich, bis zu welchem sie einsinken, entweder die Dichtigkeit, oder deren reciproken Wert, das specifische Volumen, oder den Gehalt einer Lösung, oder endlich sogenannte „Dichtigkeitsgrade“ (Tab. 2). Die Ablesung des Aräometers geschieht an der Oberfläche durch die Flüssigkeit hindurch, indem man das Auge so hält, dafs die Fläche als Linie verkürzt erscheint. Das Aräometer soll in Wasser von der Temperatur t die Zahl ergeben, welche laut Tab. 4 zu t gehört. Man prüft andere Punkte der Skale in Flüssigkeiten von bekanntem spec. Gewicht.

Über ein Gewichtsaräometer für genaue Bestimmungen s. Lohnstein, Z. S. f. Instr. 1894, 164.

5. Hydrometer. Die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen,

welche sich in kommunicirenden Röhren das Gleichgewicht halten, stehen im umgekehrten Verhältnis der Dichtigkeiten.

B. Für feste Körper.

Die den Körpern anhaftenden Luftbläschen sind bei gröſseren Stücken durch wiederholtes Herausziehen oder mit dem Pinsel, bei kleinen durch Schütteln oder Auskochen oder mit der Luftpumpe zu beseitigen.

1. Wägung und Volummessung. Haben m g des Körpers das Volumen v cbcm, so ist die Dichtigkeit $s = m/v$. Die Ausmessung kann bei regelmäſsiger Gestalt des Körpers mit dem Maſsstabe ausgeführt werden. Bei unregelmäſsiger Gestalt kann man das Volumen messen, um welches ein in einer kalibrirten Röhre enthaltenes Flüssigkeitsquantum bei dem Hineinwerfen des Körpers ansteigt. Besonders auf zerkleinerte Substanzen ist die Methode leicht anwendbar. Für in Wasser lösliche Substanzen dient z. B. Alkohol, Petroleum, Toluol, oder auch eine gesättigte Lösung der Substanz.

Auch kann man das Volumen bestimmen, indem man den Körper in ein ganz gefülltes Gefäſs mit genau definirtem Ausguſs bringt und die ausflieſsende Menge wägt.

2. Pyknometer. Dasselbe wiege mit Wasser gefüllt P, mit Wasser und dem Körper P', während der Körper selbst m wiege. Dann ist die verdrängte Wassermenge $w = P + m - P'$ und $s = m/w$. Besonders bei kleinen Körpern wird das Verfahren gebraucht, doch sind alsdann auch möglichst kleine Fläschchen anzuwenden, bei denen man sich überzeugt hat, daſs sie bei wiederholter Füllung mit Wasser nach Anbringung der Korrektionen III 1 u. 2 hinreichend konstante Gewichte geben.

Hat das Pyknometer kein Thermometer, so nimmt man entweder die Temperatur der Spritzflasche, oder man füllt zunächst nur so weit, daſs man ein kleines Thermometer einführen kann. Demnächst füllt man den kleinen Rest auf und setzt den durch Aussaugen von Tropfen befreiten, mit einer unwägbaren Spur von Fett eingeriebenen Stöpsel rasch ein. Hat derselbe eine hinreichende Wandstärke, so füllt er sich; man trocknet ausgespritztes Wasser sofort ab und tupft nötigenfalls mit einem Flieſspapier-Spitzchen das Wasser bis zur Marke

aus. Spätere Temperaturänderungen sind gleichgiltig, wenn nicht durch dieselben Wasser austritt. Die Flüssigkeit soll also nicht kälter als die Zimmerluft sein.

3. Auftriebsmethode. Ist m das Gewicht des Körpers, wiegt derselbe unter Wasser p, ist also der Auftrieb $w = m - p$, so ist $s = m/w$.

Mit der Wage. Man hängt den Körper mit einem dünnen fettfreien Faden oder Draht an einer Wagschale auf. Das Drahtgewicht bestimmt man für sich und zieht dasselbe von p ab (oder addirt es, aber nur bei der Berechnung des Auftriebes w, zu m). Von dem so gefundenen Auftriebe w ist nötigenfalls der Auftrieb des Drahtes abzuziehen, den man leicht schätzen kann, indem man aus dem Verhältnis der untergetauchten zur ganzen Länge das Gewicht des untergetauchten Stückes berechnet. Letzteres, dividirt durch die Dichtigkeit des Drahtes (Tab. 1), giebt den Gewichtsverlust des Drahtes.

Bei der Wägung im Wasser nehmen die Schwingungen der Wage rasch ab; man wird meistens die Ruhelage beobachten müssen. — Der Aufhängefaden soll dünn sein und durch die Oberfläche nur einmal hindurchtreten, um die Kapillarkräfte möglichst zu vermindern; vgl. auch A 3. Das Wasser soll nahe die Zimmertemperatur haben, oder man mufs besonders geschützte Bäder anwenden. Bei Beobachtung im geschlossenen Wagekasten ist ein Thermometer von beistehender Form bequem.

In Wasser lösliche Körper wägt man in einer anderen Flüssigkeit von bekannter Dichtigkeit. Mit letzterer ist dann das wie oben berechnete Resultat zu multipliciren.

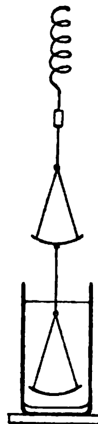
Leichte Körper werden durch Verbindung mit einem anderen von hinreichendem Gewicht zum Untersinken gezwungen; z. B. mit einer Metallklemme, oder einer Glocke von Drahtnetz, unter welcher man den Körper aufsteigen läfst. Der Belastungskörper kann bei allen Wägungen im Wasser bleiben.

Zerkleinerte Körper legt man in ein Schälchen, welches unter Wasser hängt und tarirt ist.

Kann man den Körper nicht an die Wagschale hängen, so läfst sich vielleicht ein Gefäfs mit Wasser auf die Wage stellen

und seine Gewichtszunahme bestimmen, wenn der mit einem Faden an einem festen Stativ aufgehängte Körper untergetaucht wird. Diese Zunahme ist gleich dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers im Wasser.

Mit der Nicholson'schen Senkwage. Man belastet die obere Schale des Schwimmers, jedesmal bis zu dessen Einsinken bis an die Marke am Halse: 1) durch Gewichte; 2) durch Körper und Gewichte; 3) durch Gewichte, während zugleich der Körper unter Wasser auf der unteren Schale liegt. 1) minus 2) giebt das Gewicht des Körpers, 3) minus 2) das Gewicht des von diesem verdrängten Wassers. Temperaturschwankungen beeinträchtigen die Genauigkeit, um so mehr, je kleiner der Körper gegen die Senkwage ist. Die Sicherheit der Einstellung wird durch Reinigen des Halses mit Weingeist erhöht.



Mit der Jolly'schen Federwage. Ein spiraliger Draht trägt zwei übereinander gehängte Wagschalen, von denen die untere konstant in ein Gefäſs mit Wasser taucht. Um die Parallaxe beim Ablesen zu vermeiden, ist die Teilung auf einem spiegelnden Glase angebracht. 0,1 mm läſst sich noch schätzen. Mit einem Gewichtsatz kann man Wägungen genau wie an der Senkwage ausführen, indem man eine Marke am unteren Ende des Spiraldrahtes immer auf einen bestimmten Teilstrich bringt.

Ein einfacheres Wägungsprincip mit der Federwage ist auch ohne Gewichtsatz dadurch gegeben, daſs die Senkung h dem angehängten Gewichte p nahe proportional ist, wonach $p = A.h$. Durch eine einmalige Belastung mit einem bekannten Gewicht kann A bestimmt werden. Da bei Dichtigkeitsbestimmungen die Gewichtseinheit sich heraushebt, so kann man hier einfach den Skalenteil der Federwage als Einheit nehmen. Senkt sich die Wage durch Auflegung des Körpers auf die obere Schale um h, dagegen um h', wenn der Körper unter Wasser auf die untere Schale gelegt wird, so ist also $s = h/(h - h')$.

Genauer setzt man $p = Ah + Bh^2$. Man bestimmt A und B aus zwei Belastungen, deren eine etwa die gröſste anzuwendende Senkung bewirke, während die andre halb so groſs sein mag.

Man kann hiernach leicht eine Tabelle aufstellen, welche zu den Senkungen die zugehörigen Belastungen angiebt.

4. Schwebemethode. Sehr kleine, sogar pulverförmige Körper kann man bestimmen, indem man eine Flüssigkeit mischt, in welcher die Körper nicht sinken oder steigen. Geeignet können Mischungen von Chloroform (1,52) oder Bromoform (2,9) oder Methylenjodid (3,3) mit Benzol (0,89), Toluol (0,89), Xylol (0,86) oder wässerige Lösungen von Kaliumquecksilberjodid (Thoulet'sche Lösung; bis 3,20) sein.

Zur genauen Abgleichung korrigirt man zweckmäfsig etwa eine noch ein wenig zu leichte mit einer etwas zu schweren Mischung. Auch kann man Temperaturänderungen zur Abgleichung benutzen, da die Flüssigkeiten sich stark, die festen Körper sich schwach ausdehnen.

Die Dichtigkeit der Flüssigkeit ermittelt man am einfachsten mit der Mohr'schen Wage, während die Körper schweben. — Durch partielles Abdestilliren zerlegt man die Flüssigkeiten nach dem Gebrauch wieder.

Vgl. auch Retgers, Z. S. f. physik. Chemie 3, 289. 497, 1889; 4, 189. 1889; 11, 328. 1893.

II. Reduktion der Wägung auf den leeren Raum und auf Wasser von 4°.

Für flüssige wie für feste Körper sind unter Nr. 1 die gefundenen Gewichte, wenn die Genauigkeit es erfordert, auf den leeren Raum zu reduciren (**11** II; Tab. 8).

Die unter Nr. 2 und 3 aufgezählten Methoden der Dichtigkeitsbestimmung mit dem Pyknometer und nach dem Archimedischen Gesetz verlangen eine Korrektion, welche nach folgender gemeinschaftlicher Regel ausgeführt wird.

Man mufs erstens darauf Rücksicht nehmen, dafs das Wasser eine andere Temperatur als $+4^0$ hat. (Absorbirte Luft vermindert die Dichtigkeit des Wassers höchstens um einige Einheiten der 6ten Decimale.) Zweitens sind die Wägungen auf den leeren Raum zu reduciren. Es bedeute

Q die Dichtigkeit des Wassers, welches zur Beobachtung gedient hat (Tab. 4);

λ die Dichtigkeit der Luft bezogen auf Wasser (der Mittel-

wert $\lambda = 0{,}00120$ genügt fast immer; andernfalls vgl. **15** u. Tab. 6);

m das scheinbare d. h. von der Wage angegebene Gewicht des in der Luft gewogenen festen oder flüssigen Körpers; oder bei Bestimmung einer Flüssigkeit mit dem Glaskörper den scheinbaren Gewichtsverlust des in die Flüssigkeit getauchten Körpers;

w das scheinbare Gewicht des dem Volumen des Körpers gleichen Volumens Wasser von der Dichtigkeit *Q*.

Die Gröfse *w* kann also sein:

1. für Flüssigkeiten: das beobachtete Gewicht des Wassers in dem Tarirfläschchen, oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers;

2. für feste Körper: der beobachtete Gewichtsverlust des Körpers im Wasser bei einer Bestimmung nach dem Archimedischen Gesetz mit Wage oder Senkwage; oder das Gewicht des durch Einbringen des Körpers ausgeflossenen Wassers bei Anwendung des Tarirfläschchens.

m/*w* ist das rohe unkorrigirte specifische Gewicht. Das richtige ist

$$s = \frac{m}{w}(Q - \lambda) + \lambda \text{ oder auch } = \frac{m}{w} Q + \left(1 - \frac{m}{w}\right)\lambda.$$

Vgl. über die Rechnung auch die folgende Seite und über ihre Vereinfachung, falls man denselben Glaskörper oder dasselbe Pyknometer wiederholt benutzt, III 4.

Der Einflufs des Gewichtsverlustes in der Luft verschwindet nur, wenn die Dichtigkeit gleich Eins ist. Er erreicht für $s = 20$ den Wert 0,023. Würde man noch die Ausdehnung des Wassers vernachlässigen, so könnte man hier ein um 0,08 zu grofses Resultat erhalten.

Strenge Vorschriften s. z. B. bei R. Kohlrausch, Prakt. Regeln zur genauen Best. d. spec. Gewichtes. Marburg 1856.

Beweis. Wenn der Körper, fest oder flüssig, in der Luft das Gewicht *m* hat, während er die Luftmenge *l* verdrängt, so wiegt er im leeren Raume $m + l$. In betreff der Bestimmung von *w* können wir drei Fälle unterscheiden. Hat man das Gewicht *w* des gleichen Volumens Wasser durch Abwägen bestimmt, so ist das Gewicht des Wassers im leeren Raume $= w + l$. Oder wenn der scheinbare Gewichtsverlust *w* eines festen Körpers durch Eintauchen in Wasser gemessen wurde, so

ist derselbe ebenfalls um l zu vermehren, da das Gewicht im leeren Raume um l größser gewesen wäre als in der Luft. Ebenso ist drittens, wenn die Dichtigkeit einer Flüssigkeit dadurch bestimmt wird, daſs man den scheinbaren Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in der Flüssigkeit und im Wasser ermittelt, jeder Verlust um l zu vergröſsern.

Das Wasser aber habe nicht die Dichtigkeit 1, sondern Q gehabt, so würde dasselbe Volumen Wasser bei der Normaltemperatur $(w+l)/Q$ wiegen. Man erhält also in allen Fällen die wahre Dichtigkeit s des Körpers $s = Q(m+l)/(w+l)$. Da nun $(w+l)/Q$ das Volumen der verdrängten Luftmasse, welche die Dichtigkeit λ (bezogen auf Wasser) hat, so ist $l = \lambda(w+l)/Q$, woraus $l = w\lambda/(Q-\lambda)$. Den letzteren Wert für l in s eingesetzt, erhält man obigen Ausdruck.

Beispiel. Ein Stück Silber wiege in der Luft . . $m = 24{,}312$ g
im Wasser von 19,2° . . . . 21,916 g
so ist der scheinbare Gewichtsverlust im Wasser $w = 2{,}396$ g

Das unkorrigirte specifische Gewicht würde also sein

$$m/w = 24{,}312/2{,}396 = 10{,}147.$$

Das korrigirte erhält man, da nach Tab. 4 für 19,2° $Q = 0{,}99840$,

$$s = 10{,}147\,(0{,}99840 - 0{,}00120) + 0{,}0012 = 10{,}119.$$

Man rechnet im Kopf, wenn man 0,99840—0,00120 = 1 — 0,00280 setzt.

III. Korrektion der Beobachtungen mit dem Pyknometer oder dem Glaskörper wegen der Temperatur-Änderungen.

Ändert sich zwischen den verschiedenen Wägungen die Temperatur, so kommt noch eine Korrektion wegen der Ausdehnung des Wassers und des Glases. Man kann auf folgende Weise aus einer einmal ausgeführten Wägung des Gefäſses mit Wasser, bez. des Glaskörpers im Wasser, das Gewicht, bez. den Auftrieb für beliebige Temperatur berechnen.

Es bedeute für die ausgeführte Wägung t_0 und Q_0 die Temperatur und Dichtigkeit (Tab. 4) des Wassers, p_0 das gefundene Nettogewicht des Wassers bez. den Auftrieb im Wasser; einer anderen Temperatur t mögen Q und p entsprechen. p ist zu berechnen.

1. Ausdehnung des Wassers. Soll nur diese Korrektion angebracht werden, so hat man $p = p_0 \cdot Q/Q_0$ oder merklich $p = p_0 + p_0(Q - Q_0)$.

2. Ausdehnung des Glases. Das Volumen für t ist im Verhältnis $1 + 3\beta(t - t_0)$ gröſser als für t_0, wo 3β den kubischen Ausdehnungskoefficienten des Glases (für gewöhnliches Glas im Mittel $3\beta = 1/40000$; vgl. auch 7, 5) bezeichnet.

Es ist also (Beweis s. unten)

$$p = p_0[1 + 3\beta(t - t_0)] \cdot \frac{Q}{Q_0} = p_0 + p_0[3\beta(t - t_0) + Q - Q_0].$$

3. **Dichtigkeitsbestimmung fester Körper mit dem Pyknometer.** Ohne die Korrektionen kann man bei kleinen Körpern zu ganz falschen Resultaten gelangen. Man erhält das scheinbare Gewicht w des dem Körper gleichen Volumens Wasser aus der Formel

$$w = m + P_0 - P + (P_0 - \pi)[Q - Q_0 + 3\beta(t - t_0)].$$

Hierin bedeutet

m das Gewicht des Körpers in der Luft,
P_0 das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefäfses,
P das Gewicht des mit Wasser und dem Körper gefüllten Gefäfses,
π das Gewicht des leeren Gefäfses (nur angenähert zu bestimmen).

Ferner sind die Temperatur und Dichtigkeit des Wassers:

t_0, Q_0 bei der Wägung mit Wasser allein,
t, Q bei der Wägung mit Wasser und Körper.

Beweise. Offenbar ist, wenn p_0 und p die Nettogewichte des Wassers bei den Temperaturen t_0 und t bedeuten, $p = p_0[1 + 3\beta(t - t_0)]\,Q/Q_0$.

In Anbetracht dessen, dafs Q und Q_0 wenig von 1 verschieden sind, kann man (Formel 8, S. 9) zunächst schreiben

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1 + (Q - 1)}{1 + (Q_0 - 1)} = 1 + (Q - Q_0).$$

Nach Formel 7 S. 9 entsteht dann, da 3β sehr klein ist,

$$p = p_0[1 + 3\beta(t - t_0) + Q - Q_0] = p_0 + p_0[3\beta(t - t_0) + Q - Q_0].$$

d. h. der unter 2 aufgestellte Ausdruck.

Das Glas mit Wasser würde also bei der Temperatur t wiegen

$$P_0 + (P_0 - \pi)[3\beta(t - t_0) + Q - Q_0].$$

Nach dem Einbringen des Körpers vom Gewicht m, wobei die Wassermenge w ausgeflossen ist, hat man das Gewicht $= P$ gefunden. Also ist

$$P + w = P_0 + (P_0 - \pi)[3\beta(t - t_0)] + Q - Q_0] + m,$$

woraus der gesuchte Ausdruck für w unter 3 folgt.

Das Gewicht π des leeren Gefäfses kommt nur mit einer Korrektionsgröfse multiplicirt vor, braucht also nicht genau bekannt zu sein.

4. **Korrektion von Temperaturschwankungen bei der Dichtigkeitsbestimmung von Flüssigkeiten mit dem Pyknometer bez. dem Glaskörper.** Beide Korrektionen sind

offenbar identisch. Es sei gefunden das Nettogewicht der Füllung des Pyknometers bez. der Auftrieb des Glaskörpers für Wasser gleich p_0 bei der Temp. t_0, für die Flüssigkeit gleich m bei t.

Man berechne $w = p_0[1 + 3\beta(t - t_0)]$; dann ist, wenn Q_0 die Dichtigkeit des Wassers bei t_0 bedeutet, wieder (vgl. II)

$$s = m/w \cdot (Q_0 - 0{,}00120) + 0{,}00120.$$

Bei wiederholtem Gebrauch desselben Gefäſses bez. Glaskörpers stellt man für Q_0/w eine Tabelle auf und rechnet $s = m \cdot Q_0/w - 0{,}00120(m/w - 1)$. (Wenn s von 1 wenig verschieden ist, so heben sich die 0,0012 heraus.)

IV. Reduktion auf eine Normaltemperatur.

s gilt für die Wägungstemperatur t. Für einen festen Körper ist t seine Temperatur im Wasser.

Hieraus wird die Dichtigkeit S bei einer anderen Temperatur T mit Hilfe des kubischen Ausdehnungskoefficienten α (oder 3β; Tab. 9) gefunden $S = s[1 + \alpha(t - T)]$.

Die meisten Flüssigkeiten haben eine ungleichförmige Ausdehnung, welche aus Formeln oder aus Tabellen entnommen werden muſs. Die Volumina derselben Flüssigkeitsmenge seien für die Temperaturen T und t gleich V und v angegeben. Dann ist $S = s \cdot v/V$.

Vgl. Tab. 8a u. 9 sowie Hofmann-Schädler, Tabellen für Chemiker; Gerlach, Salzlösungen; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein Tab. 30 ff.

14. Volumenometer (Say; Kopp).

Eine konstante Luftmenge ist über Quecksilber zunächst unter dem atmosphärischen Druck H mm Quecksilber (Barometerstand) abgesperrt. Man vergröſsere bez. vermindere das Volumen um die gemessene Gröſse v und beobachte die dabei stattfindende Druckänderung h mm Quecksilber, so ist das ursprüngliche Volumen

$$V = v\frac{H-h}{h} \text{ bez. } = v\frac{H+h}{h}.$$

Nachdem so das Volumen des leeren Gefäſses gemessen worden ist, bringt man den Körper in dasselbe und verfährt

ebenso. Die Differenz der gefundenen Werte ist das Volumen des Körpers, die Dichtigkeit also ist sein Gewicht, dividirt durch diese Differenz.

v und *h* dürfen nicht zu klein sein, wenn ein brauchbares Resultat entstehen soll. — Man vermeide Temperaturänderungen der abgeschlossenen Luftmenge durch die Nähe des Körpers u. s. w. während des Versuches.

Ein bequemer Volumenometer, dem Jolly'schen Luftthermometer ähnlich angeordnet, s. bei Paalzow, Wied. Ann. 13, 332. 1881.

15. Berechnung der Dichtigkeit der Luft oder eines anderen Gases aus Druck und Temperatur.

Die Dichtigkeit *s* eines vollkommenen Gases für die Temp. *t* und den Druck *H* mm Quecksilber wird aus derjenigen für 0° und 760 mm nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz berechnet

$$s = \frac{s_0}{1+0{,}00367\cdot t}\cdot\frac{H}{760}.$$

Die Ausdrücke $1+0{,}00367t$ und $H/760$ siehe in Tab. 7. 0,00367 ist $=11/3000$ oder nahe $1/273$.

Die Dichtigkeit der trocknen atmosphärischen Luft für 0° und 760 mm unter 45° geogr. Breite ist $\lambda_0 = 0{,}001293$ (Regnault). Der Temperatur *t* und dem auf 0° und die Schwere unter 45° Br. nach 20 reducirten Quecksilberdruck *H* entspricht also die Dichtigkeit der Luft

$$(1) \qquad \lambda = \frac{0{,}001293}{1+0{,}00367\cdot t}\cdot\frac{H}{760}.$$

Man findet diese Gröfse in Tab. 6. Aus derselben wird man die Dichtigkeit eines anderen Gases für *H* und *t* durch Multiplikation mit der auf Luft bezogenen Gasdichte (Tab. 1 unten)[1]) am einfachsten berechnen.

Leichter kondensirbare Gase haben etwas gröfsere Aus-

1) Die Dichtigkeit der Luft hängt natürlich von ihrer Zusammensetzung ab. Wäre z. B. der Kohlensäure-Gehalt fünfmal so grofs als der normale, so wäre λ_0 etwa $=0{,}001294$. Für die meisten Zwecke würde selbst eine solche Änderung ohne Bedeutung sein. Für sehr feine Messungen mag man aber vorher lüften. Im Freien wurden die gröfsten relativen Abweichungen vom Mittelwert $=\pm 1/3000$ gefunden (Jolly).

dehnungskoefficienten. Mit steigendem Druck oder sinkender Temperatur wachsen dieselben ein wenig.

Ist ein Gasvolumen v über einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) gemessen, mit deren Dämpfen der Raum v gesättigt ist, so erhält man nach dem Dalton'schen Gesetz den Druck des trockenen Gases, indem man von dem gemessenen Gesamtdruck die Dampfspannung der Flüssigkeit abzieht. Für Wasser vgl Tab. 13, für andere Flüssigkeiten s. Landolt und Börnstein Tab. 22 ff.

Dichtigkeit feuchter Luft. Wasserdampf ist nahe $^5/_8$ so dicht wie Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur. Man findet also die Dichtigkeit feuchter Luft, wenn die Spannkraft (der Druck) des Wasserdampfes in derselben $= e$ ist (**28**), indem man $^3/_8 e$ von dem gesamten Druck (Barometerstand) abzieht und mit dem so korrigirten Werte H in Tab. 6 oder die obige Formel eingeht.

In Ermangelung der Kenntnis von e mag man im Mittel die Luft zur Hälfte mit Wasserdampf gesättigt annehmen. Diese Annahme ist für Zimmertemperatur nahe gemacht, wenn man für H den ganzen Druck nimmt, aber rechnet

$$(2) \qquad \lambda = \frac{0{,}001295}{1+0{,}004 \cdot t} \cdot \frac{H}{760}.$$

Feuchte Luft kann bis 1% leichter sein als cet. par. trockene Luft.

16. Bestimmung der Dampfdichte.

Dampfdichte nennt man die Dichtigkeit eines Dampfes (oder Gases) bezogen auf trockene atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Spannung (Druck) als Einheit. Nach dem Avogadro'schen Gesetz enthalten gleiche Volumina der verschiedenen Gase und Dämpfe bei gleichem Druck und gleicher Temperatur eine gleiche Anzahl Moleküle: mit anderen Worten, die Molekularvolumina aller Gase und Dämpfe sind einander gleich. Die Dampfdichte ist gleich dem Molekulargewicht geteilt durch 28,9; z. B. für Wasser H_2O gleich $18/28{,}9 = 0{,}623$.

Die Chemie pflegt statt der Luft ein Gas von der halben Dichtigkeit des Wasserstoffs als Einheit zu nehmen, d. h. die auf Luft bezogene Dampfdichte mit 28,9 zu multipliciren (da

Wasserstoff 14,44 mal leichter ist als Luft). Dann ist die Dampfdichte einfach gleich dem Molekulargewicht.

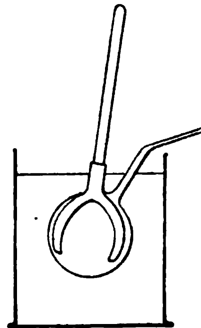
Jedes Gramm-Molekül, d. h. so viel Gramme, wie das chemische Molekulargewicht des Körpers angiebt, hat bei 760 mm Quecksilberdruck und der Temperatur t in Dampfform das Volumen $22{,}4\,(1 + 0{,}00367\,t)$ Liter.

Ist die wirkliche Dampfdichte d gröfser oder kleiner als die berechnete d_0, so hat der Körper als Dampf ein in dem gefundenen Verhältnis d_0/d gröfseres oder kleineres Molekül, als die chemische Formel annimmt. Bei manchen Dämpfen wird das Molekül mit wachsender Temperatur kleiner (Dissociation). Bei dem Zerfall in zwei Moleküle nennt man $\frac{d_0}{d} - 1$, allgemein bei dem Zerfall in n Moleküle $\left(\frac{d_0}{d} - 1\right) \cdot \frac{1}{n-1}$ den Dissociationsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der Moleküle, welche sich gespalten haben, zu der ursprünglichen Gesamtzahl.

A. Durch Wägung eines bekannten Dampfvolumens (Dumas).

Ein leichter, ausgetrockneter Glaskolben von $^1/_{10}$ bis $^1/_4$ Liter Inhalt, z. B. eine Glaskugel mit angeblasener und nach dem Austrocknen in eine Spitze von etwa 1 qmm Öffnung ausgezogener Röhre wird gewogen. Alsdann bringt man einige gr der zu bestimmenden Flüssigkeit in das Gefäfs. Zu diesem Zweck erwärmt man dasselbe und läfst die Flüssigkeit während des Abkühlens einsaugen.

Das Gefäfs wird dann mit einem geeigneten Halter (Fig.) gefafst und so in ein Bad gebracht, dafs die offene Spitze herausragt; das Bad wird 10—20° über den Siedepunkt der Flüssigkeit erhitzt. Ist alle Flüssigkeit verdampft, so schmelzt man den Ballon mit der Stichflamme vollständig zu, am sichersten durch Abziehen der Spitze. Die Temperatur des Bades und der Barometerstand wird in diesem Augenblicke abgelesen.



Nach dem Entfernen aus dem Bade läfst man durch Um-

kehren den durch Abkühlen verdichteten Tropfen an die Spitze fließen und überzeugt sich, daß die letztere keine Luft eintreten läßt. Darauf wird der abgekühlte und gut gereinigte Ballon, ev. nebst der abgezogenen Spitze, wieder gewogen, unter Beobachtung des Barometerstandes und der Temperatur der Luft im Wagekasten.

Endlich hält man die Ballonspitze in vorher ausgekochtes oder unter der Luftpumpe luftfrei gemachtes Wasser [oder in Quecksilber], feilt sie an und bricht sie ab, worauf die Flüssigkeit in den Ballon steigt. Der gefüllte Ballon nebst der abgebrochenen Spitze wird wiederum gewogen. Über die zurückgebliebene Luft siehe Nr. III.

Statt der Glaskugel kann vorteilhaft ein Gefäß mit zwei Röhren und aufgeschliffenen Stöpselchen dienen, welches sich bequemer austrocknen und füllen und wiederholt verwenden läßt. (Pawlewski.)

Es sei 1. m das Gewicht des mit Luft gefüllten Ballons;
2. m' „ „ „ „ Dampf „ „
3. M „ „ „ „ Wasser [od. Quecks.] „
4. t und b bei dem Zuschmelzen Temperatur des Dampfes und Barometerstand;
5. t' und b' bei der Wägung mit Dampf Temperatur im Wagekasten und Barometerstand. Von b' (aber nicht von b) sei $^3/_8$ der Spannkraft des Wasserdampfes (28) im Wagezimmer abgezogen (vgl. **15**);
6. λ' die Dichtigkeit der Luft, wie sie zu t', b' aus **15** oder aus Tab. 6 gefunden wird.

I. Näherungsformel. Die Dampfdichte ist, wenn mit Wasser gewogen wurde,

$$d = \left(\frac{m' - m}{M - m}\,\frac{1}{\lambda'} + 1\right)\frac{b'}{b}\,\frac{1 + 0{,}00367 \cdot t}{1 + 0{,}00367 \cdot t'}.$$

[Für Quecksilber $13{,}56/\lambda'$ anstatt $1/\lambda'$.]

Beweis. Bezeichnen D und L den Dampf bez. die Luft im Ballon, so ist offenbar $D - L = m' - m$, also $D = m' - m + L$. Die Dampfdichte d würde, wenn der Dampf wie die Luft t' und b' gehabt hätte, einfach dargestellt werden durch $d = D/L = (m' - m)/L + 1$, oder, da $L = \lambda'(M - m)$ ist, durch $d = \frac{m' - m}{M - m}\cdot\frac{1}{\lambda'} + 1$. Der Faktor $\frac{b'}{b}\,\frac{1 + 0{,}00367 \cdot t}{1 + 0{,}00367 \cdot t'}$ kommt hinzu, da der abgesperrte Dampf nicht t' und b', sondern t und b gehabt hat.

II. Genauere Formel: mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Glases und des Wassers und auf den Gewichtsverlust des Wassers in der Luft. (Aber nicht auf Änderungen im Luftauftrieb der Gefäſswände und der Gewichtstücke oder darauf, daſs der Tropfen, welcher in dem Ballon bleibt, nicht die Dichtigkeit des Wassers hat.)

Es sei 7. Q die Dichtigkeit des zur Wägung angewandten Wassers (Tab. 4) [oder Quecksilbers (Tab. 1 u. 9)];

8. 3β der kubische Ausdehnungskoefficient des Glases $= 0{,}000025 = 1/40000$ (vgl. auch **7**, 5); so ist

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\,\frac{Q-\lambda'}{\lambda'} + 1\right)\left[1 - 3\beta(t-t')\right]\frac{b'}{b}\,\frac{1+0{,}00367\cdot t}{1+0{,}00367\cdot t'}.$$

Beweis ähnlich wie in **18**.

III. Wenn der Ballon sich nach Abbrechen der Spitze unter Wasser nicht ganz füllt, so hat der Dampf die Luft nicht vollständig verdrängt. Will man hierauf keine Rücksicht nehmen, so fülle man vor der Wägung vollständig mit der Spritzflasche und rechne nach den früheren Formeln. Anderenfalls tauche man den Ballon nach dem Abbrechen der Spitze so weit ein, daſs die innere und äuſsere Oberfläche gleich hoch steht, und wäge ihn so weit gefüllt. Erst dann füllt man den Rest mit Flüssigkeit und führt die Wägung M aus. Wir setzen

9. Das Gewicht des partiell mit Wasser [oder Quecksilber] gefüllten Ballons $= M'$.

Dann ist die Dampfdichte

$$d_0 = \frac{(m'-m)\,Q/\lambda' + M' - m'}{(M-m)\frac{b}{b'}\,\frac{1+0{,}00367\,t'}{1+0{,}00367\,t}\left[1+3\beta(t-t')\right] - (M-M')}.$$

Vgl. R. Kohlrausch, Prakt. Regeln z. genaueren Bestimmung d. spec. Gewichtes.

Beweis. Das Volumen der Luftblase folgt aus den Wägungen M und M' bei der Temperatur der Füllung $= (M-M')/(Q-\lambda')$; dasselbe war also bei dem Zuschmelzen

$$v = \frac{M-M'}{Q-\lambda'}\,\frac{b'}{b}\,\frac{1+0{,}00367\,t}{1+0{,}00367\,t'}.$$

Der Ausdruck d unter II ist demnach die Dampfdichte eines Gemisches der Volumina v Luft und $V-v$ Dampf, und es ist, wenn wir die Dichte des reinen Dampfes durch d_0 bezeichnen, $Vd = v + (V-v)d_0$, woraus $d_0 = (Vd - v)/(V-v)$.

Hierein den Wert für d unter II, den obigen Wert für v, endlich $V = (M - m)/(Q - \lambda') \cdot [1 + 3\beta(t - t')]$ eingesetzt, findet sich nach einigen Umformungen, zum Teil mittels der Formeln S. 9 der Ausdruck unter III.

Beispiel. Es wurde gefunden:

$m = 29{,}6861$ g (Luft), $M = 142{,}41$ g (ganz mit Wasser);
$m' = 29{,}8431$ g (Dampf), $M' = 141{,}32$ g (teilweise mit Wasser);
ferner $b = 745{,}6$ mm, $t = 99{,}^{\circ}5$ (beim Zuschmelzen);
$b' = 742{,}2$ mm, $e = 9{,}4$ mm. $t' = 18{,}^{\circ}7$ (beim Wägen mit Dampf).

Das Wasser zur Wägung hatte $17{,}^{\circ}4$, also (Tab. 4) $Q = 0{,}9988$.

Man findet (15) $\lambda' = 0{,}001182$ ohne Rücksicht auf e,
$\lambda' = 0{,}001176$ mit " " "

Nach der richtigen Formel III erhält man die Dampfdichte 2,777; II ergiebt 2,755, I 2,765. Die Vernachlässigung von e macht die Zahlen um 0,006 gröfser.

Die auf Wasserstoff = 2 bezogene Dampfdichte oder das Molekulargewicht des Dampfes ist also (S. 66) $2{,}777 \cdot 28{,}9 = 80{,}3$.

Den Ausdruck $1 + 0{,}00367\, t$ siehe in Tab. 7. Sonst schriebe man bequemer

$$\frac{272{,}5 + t'}{272{,}5 + t} \text{ statt } \frac{1 + 0{,}00367\, t'}{1 + 0{,}00367\, t}.$$

B. Durch Messung des Dampfvolumens einer gewogenen Flüssigkeitsmenge. (Gay-Lussac. Hofmann.)

Ein dünnwandiges Glaskügelchen, welches man nach dem Füllen zuschmelzt, oder ein Kügelchen mit offenem Kapillarrohr, oder ein ganz kleines Fläschchen mit eingeriebenem Stöpsel, von etwa 0,1 bis 0,2 cbcm Inhalt, wird zuerst leer und dann mit der Flüssigkeit, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, gewogen. Gläschen und Inhalt läfst man in einer mit trockenem und luftfreiem Quecksilber (**19**) gefüllten und über Quecksilber umgestürzten Glasröhre aufsteigen, die von dem geschlossenen Ende an geteilt ist, entweder nach cbcm oder einfach in mm, die nach **19** in Volumen verwandelt werden. Ist die Flüssigkeit leicht flüchtig, so springt das Kügelchen oder der Stöpsel während des Aufsteigens von selbst; in diesem Falle mufs man während des Aufsteigens, um ein Zertrümmern zu vermeiden, die Glasröhre so weit neigen, dafs das Quecksilber oben fest anliegt!

Nun erwärmt man den oberen Teil der Röhre in einem geeigneten Dampfbade (Figur; Wasser, Amylalkohol 130°, Amylacetat 140°, Anilin 183°, Äthylbenzoat 212°, Amylbenzoat 260°; vgl. Tab. 16a; die letzteren Flüssigkeiten mit Rückflufskühler s. 7, 27) zu einer Temperatur, die mindestens etwa 10° über derjenigen liegt, bei welcher die ganze Flüssigkeit gerade verdampft ist. Nennen wir

m das Gewicht der verdampften Substanz in Grammen,
t, v Temperatur und Volumen des Dampfes in cbcm; ist v_0 das Volumen der Dampf-gefüllten Glasröhre bei 15°, so ist $v = v_0 [1 + 0{,}000025\,(t - 15)]$,
b den äufseren Barometerstand,
h die Höhe der Quecksilbersäule, über welcher der Dampf sich befindet; b und h auf 0° und bei feineren Messungen auf 45° geogr. Breite reducirt (**20**),
e die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur t (Tab. 14),

so ist die gesuchte Dampfdichte (vgl. Anf. des Art.)

$$d = \frac{m}{v} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \cdot t}{0{,}001293} \cdot \frac{760}{b - h - e} \quad \text{oder} \quad = \frac{m}{v} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

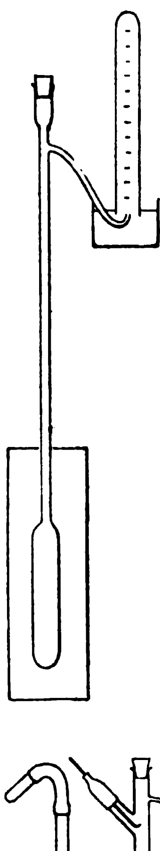
λ siehe in Tab. 6, wo $b - h - e$ für H einzusetzen ist.

C. Verdrängungsmethoden.

1. **Luftverdrängung** (V. Meyer). Das Dampfvolumen einer gewogenen kleinen Menge der Substanz wird aus der bei der Verdampfung verdrängten Luftmenge ermittelt.

Ein Glas-, oder für hohe Temperatur Porzellan-Kölbchen mit Steigrohr und einem engen, etwa 1 mm weiten Gas-Entbindungsrohre, gut ausgetrocknet, mit etwas Asbest am Boden wird — im Luftbade oder im Dampfbade von Wasser, Anilin 183°, Schwefel 448°, oder auch in geschmolzenem Paraffin (bis über 300°) oder Salpeter, Blei über 330° etc. (Tab. 16a und 7, 27) — auf die erforderliche Temperatur oberhalb des Siedepunktes der untersuchten Substanz gebracht. Man wartet, bis die Temperatur konstant geworden ist, d. h. bis aus dem Entbindungsrohre unter Wasser keine Luftblasen mehr entweichen.

Die Substanz hat man, wenn nötig, in ein Körbchen oder Glasröhrchen, wenn sie flüssig ist, in ein Fläschchen oder in



ein ganz gefülltes, zugeschmolzenes Glaskügelchen (welches durch die Ausdehnung der Substanz springt) eingewogen. Man lüftet den Kork, wirft rasch die Substanz in den Kolben und schliefst die Öffnung sofort wieder. Alsdann schiebt man über das Gasentbindungsrohr einen mit, am besten ausgekochtem, Wasser gefüllten Mefscylinder, fängt in demselben die Luft auf, welche durch die verdampfende Substanz verdrängt wird, und liest ihr Volumen ab.

In mancher Hinsicht bequemer als der Kork, bei welchem man sehr rasch verfahren mufs, ist ein über den Rand des Verdampfungsrohres gestülpter kurzer, gut schliefsender Kautschukschlauch mit einem unten geschlossenen, oder, damit man bei zufälliger Temperaturerniedrigung das Eintreten von Wasser in das Rohr vermeiden kann, mit einem verschliefsbaren Hahn versehenen Glasröhrchen. (Fig.) In das letztere hat man den einzuwerfenden Körper gebracht und läfst ihn im geeigneten Zeitpunkt durch Aufrichten des Röhrchens hinunterfallen. Oder man hält den Körper mit einem luftdicht von der Seite eingeführten Stäbchen, durch dessen Zurückziehen man ihn hinunterfallen läfst. (Fig.)

Es ist wesentlich, dafs der Vorgang in kurzer Zeit verlaufe, damit z. B. kein Dampf in die kälteren Teile des Rohres gelangt, wo er sich kondensirt und das Volumen zu klein finden läfst. Daher soll die Temperatur des Bades beträchtlich über dem Siedepunkte der Substanz liegen. (Länger dauernde Luftentbindung kann eine Zersetzung der Substanz anzeigen.)

Es sei m die eingebrachte Substanz in Grammen,
v das gemessene Luftvolumen in cbcm,
t die Zimmertemperatur,
H der Druck, unter welchem die gemessene Luft steht, in mm Quecksilber von 0^0,

so ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{m}{v} \cdot \frac{760}{H} \cdot \frac{1+0{,}004\,t}{0{,}001293} = 587800 \frac{m}{Hv}(1+0{,}004\,t).$$

Der Dampf hat nämlich eine Luftmenge verdrängt, welche unter gleichen Verhältnissen das gleiche Volumen besafs. Folglich ist das Dampfgewicht m, geteilt durch das Gewicht dieser Luftmenge, die gesuchte Dampfdichte. Die gemessene Luft aber wiegt $v \frac{0{,}001293 \cdot H}{(1+0{,}004\,t) \cdot 760}$, wonach man ohne weiteres den obigen Ausdruck erhält. Der Faktor 0,004 ist anstatt des Ausdehnungskoefficienten 0,00367 genommen, um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen. Derselbe entspricht in gewöhnlicher Temperatur ungefähr der Annahme, dafs die Luft im Kolben zweidrittel gesättigt, diejenige, welche über dem Wasser gemessen wird, ganz gesättigt war. Vgl. V. Meyer, Ber. d. chem. Ges. 1878, S. 2253; auch dessen kritische Bemerkungen ib. 1888, S. 2018.

Der Druck H ist gleich dem Barometerstande b, vermindert um die in Quecksilber umgewandelte Druckhöhe h der Wassersäule unter der Luft. Also $H = b - \frac{1}{13{,}6} h$. Taucht man vor der Ablesung das Mefsrohr bis zur Gleichstellung der inneren und äufseren Oberfläche in das Wasser, so ist H der Barometerstand.

Behufs genauer Bestimmung und Rechnung hätte man noch das Volumen v' der eingeworfenen Substanz zu berücksichtigen. Nehmen wir ferner an, der Glaskolben sei vorher mit trockener Luft gefüllt worden, so rechnet man hinreichend genau

$$d = \frac{587800}{\frac{v}{1+0{,}00367\,t} + \frac{v'}{1+0{,}00367\,t'}} \cdot \frac{m}{H-e}.$$

e bedeutet die Spannkraft des Wasserdampfes bei der Temperatur t (Tab. 13); t' die Temperatur des Bades, die nur genähert bekannt zu sein braucht.

Über eine Anordnung, um mit vermindertem Druck zu arbeiten, s. Lunge u. Neuberg, Ber. Deut. Chem.-Ges. 1891 I, 729.

2. **Metallverdrängung.** Der verdampfende abgewogene Körper (vgl. B und C, 1) verdrängt eine Flüssigkeit, welche selbst eine geringe Dampfspannung besitzt (in niederer Temperatur Quecksilber, Hofmann, vgl. Tab. 14; in höherer Temperatur Wood'sches Metall, V. Meyer). Es bedeute

m das Gewicht der verdampfenden Substanz,

M, *s* und *M'*, *s'* das Gewicht bez. das specifische Gewicht des Metalls vor und bei der Verdrängung,

t die Zimmertemperatur,

T die Temperatur des Bades, z. B. 448° für siedenden Schwefel,

b den Barometerstand,

h die Druckhöhe des flüssigen Metalls im anderen Schenkel.

Dann erhält man die Dampfdichte

$$d = \frac{m}{\frac{M}{s}[1+0{,}000025\,(T-t)] - \frac{M'}{s'}} \cdot \frac{760\,(1+0{,}00367\,T)}{\left(b+\frac{h\,s'}{13{,}56}\right)0{,}001293}.$$

Den letzten Faktor siehe in Tab. 6. Die specifischen Gewichte sind bei einer Temperatur *t*

für Quecksilber	$13{,}60\,(1-0{,}00018\cdot t)$
für Wood'sches Metall	$9{,}6\ \ (1-0{,}00009\cdot t)$.

17. Gasdichte-Bestimmung.

Über die Herstellung einiger Gase und über das Trocknen derselben s. 7, 3.

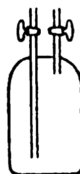
A. Durch Wägung.

Um die Dichte eines permanenten Gases zu bestimmen, fülle man mit demselben einen Glasballon mit angeschmolzenem Glasrohr (am bequemsten mit Hahnverschlufs), etwa indem man den Ballon zunächst mit Quecksilber füllt, ihn über einer Quecksilberwanne umstürzt und nun das Quecksilber durch das aufsteigende Gas verdrängen läfst. Der Ballon wird geschlossen und gewogen (*m'*). Dann wird das Gas durch einen hinreichenden Luftstrom (Luft des Wagezimmers, nicht getrocknet) verdrängt und der Ballon offen gewogen (*m*). Endlich habe die Wägung des mit Quecksilber gefüllten Ballons das Gewicht *M* ergeben. Wie in **16 A** sollen *b* und *t* den Barometerstand und die Temperatur im Augenblick des Abschliefsens des Gases bedeuten, wobei eventuell die Höhe der noch vorhandenen Quecksilbersäule bei *b* bereits in Abzug gebracht sei. *t'* und *b'* gelten für die Wägung des mit Gas gefüllten Ballons. Dann berechnet man die Gasdichte nach Formel I oder II, S. 68 u. 69.

Eine etwaige bei der Füllung mit Gas zurückgebliebene

Quecksilbermenge ist ohne Einfluſs, wenn man sie bei allen Wägungen ungeändert läſst.

Verfügt man über eine hinreichend groſse Menge des Gases, so kann man auch ein Glaskölbchen (oder das Pyknometer; Fig. zu 13) mit zwei Ansatzrohren verwenden, aus welchem man die Luft durch einen anhaltenden Gasstrom verdrängen läſst. Ist das Gas schwerer als Luft, so füllt man durch das lange Rohr und umgekehrt. Wiegt der Kolben, mit Luft gefüllt m, mit Gas gefüllt m', mit Wasser [oder Quecksilber] M, so hat man einfach nach den unter **16** A gegebenen Formeln zu rechnen.



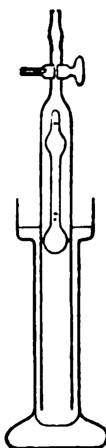
Richtet man es ein, daſs die Temperatur und der Luftdruck bei beiden Füllungen und Wägungen dieselben sind, so hat man (Formel unter **16** A II) die Gasdichte

$$d = \frac{m'-m}{M-m}\,\frac{Q-\lambda}{\lambda} + 1.$$

Die atmosphärischen Schwankungen fallen auch heraus, wenn man als Haupt-Gegengewicht für den Ballon ein ebenso groſses geschlossenes Gefäſs nimmt. Füllt man mit trockener Luft, so fallen dann die Korrektionen wegen b, e und t fort.

B. Durch Beobachtung der Ausströmungszeit (Bunsen).

Gasdichten verhalten sich nahe umgekehrt wie die Quadrate der Ausströmungsgeschwindigkeiten, mit denen die Gase unter gleichem Druck aus enger Wandöffnung austreten. Vergleicht man also die Zeit, welche eine bestimmte Gasmenge zum Ausströmen bedarf, mit der Zeit, welche ein gleiches Luftvolumen unter denselben Bedingungen braucht, so giebt das Zeitverhältnis, ins Quadrat erhoben, die Gasdichte.



Nach Bunsen nimmt man hierzu einen Glascylinder mit Hahn, der oben durch ein aufgeschmolzenes dünnes Metallblech mit ganz feiner Öffnung geschlossen ist, und füllt denselben über reinem Quecksilber (**19**) mit trockener, durch ein Wattefilter staubfrei gemachter Luft, bez. mit dem zu bestimmenden Gas. Ein doppelt durchbohrter Hahn ist zum Füllen bequem; sonst benutzt man die obere Öffnung nach Entfernung

des Schliffes mit dem Platinblech. Nun taucht man den Cylinder so tief in das Quecksilber ein, dafs der Schwimmer unsichtbar wird, und öffnet den Hahn. Den Gasstand, welchen das undurchsichtige Quecksilber nicht direkt ablesen läfst, beobachtet man mittels des Schwimmers, der von dem Quecksilber im Cylinder getragen wird und der einige gut sichtbare Marken hat, eine am oberen Ende, die andere einige cm über dem unteren Ende. Man beobachtet die Zeitpunkte, wann diese Marken eben aus der Quecksilberoberfläche austreten. Irgendwelche dicht über den Marken befindliche Zeichen sollen auf den Austritt der ersteren vorbereiten.

Beispiel.	Luft	Kohlensäure
Austritt der oberen Marke um	14,3 sec	42,5 sec
„ „ unteren „ „	51,2 sec	1^{min} 27,8 sec
Dauer =	36,9 sec	45,3 sec

Also Kohlensäure auf Luft bezogen $d = (45,3/36,9)^2 = 1,507$. Auf Wasserstoff = 2 bezogen oder Molekulargewicht = $1,507 \cdot 28,9 = 43,6$.

Vgl. Bunsen, Gasometrische Methoden.

Raummessung.

18. Längenmessung.

I. Strichmafsstab.

1. Freie Ablesung. Über diese gewöhnlichste Messung sei hier nur im Interesse der Hauptfehlerquelle, der Parallaxe beim Ablesen, bemerkt:

Um das zu messende Objekt in dieselbe Ebene wie die Teilung zu bringen, ist aufser den gewöhnlichen Mitteln besonders geeignet ein durchsichtiger Mafsstab, den man mit der Teilung an das Objekt anlegt.

Eine Spiegelteilung, vor welcher der Gegenstand sich befindet, läfst die Parallaxe vermeiden, indem man das Spiegelbild des beobachtenden Auges mit den abzulesenden Punkten zusammenfallen läfst. An andere Teilungen kann man ein Stückchen Spiegelglas anlegen.

Am vollkommensten wird die Ablesung frei von Parallaxe durch ein zur Teilung senkrecht blickendes Fernrohr mit Parallelverschiebung.

2. Komparator. a) Ein fester Mafsstab trägt einen parallel verschiebbaren Schlitten mit Mikroskop. Aus einem Kathetometer läfst sich in der Regel durch Anbringung eines Mikroskopes statt des Fernrohres und eventuell durch ein horizontales Gestell, in welchem der Stab befestigt wird, ein solcher „Komparator“ herstellen. Die an dem Mafsstab gemessene Verschiebung, wenn man das Mikroskop folgeweise auf die Enden der zu messenden Länge einstellt, ergiebt diese Länge. Die Bedingung genauer Parallelverschiebung des Schlittens mufs um so strenger erfüllt sein, je weiter der zu messende Gegenstand von der Teilung des Komparators entfernt ist.

b) Mit einem parallel verschiebbaren Mafsstab wird die zu messende Länge fest verbunden und mit ihren Endpunkten folgeweise unter dasselbe feststehende Mikroskop gebracht. Ein zweites festes Mikroskop liest die Gröfse der Ver-

schiebung auf dem Maſsstabe ab. Je gröſser der senkrechte Abstand der beiden Längen, desto fehlerhafter wirkt eine Abweichung vom Parallelismus.

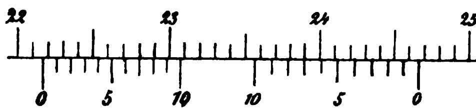
Daher wird vorteilhaft die zu messende Länge nicht neben, sondern in der Fortsetzung des Maſsstabes befestigt.

Vgl. z. B. den Komparator von Abbe; Pulfrich, Z. S. f. Instr. 1892, 307.

c) Unabhängig von der Parallelverschiebung ist die Messung, wenn das Objekt und der Normalmaſsstab unter dem Komparator ausgewechselt werden. Als solcher dient entweder wieder das verschiebbare Mikroskop auf der Teilung oder ein Paar von feststehenden, etwa auf einer Schiene angeklemmten Mikroskopen.

Überschüsse über ganze Teilstriche des Maſsstabes können in allen Fällen durch Okularmikrometer von bekanntem Teilwert in den Mikroskopen (vgl. unten) bestimmt werden. Im ersteren Falle auch mit dem am Schlitten befindlichen Nonius.

Bei einer feineren Messung mit Anwendung eines Nonius übersehe man nicht, erstens, daſs der Nonius selbst geprüft sein muſs, zweitens, daſs man aus der etwaigen Fehlertabelle des Maſsstabes den Fehler desjenigen Striches zu nehmen hat, an welchem die Noniusteilung einsteht.



Nonien, die auf Zehntel geteilt sind, haben entweder 9/10 oder 11/10 des Intervalles der Haupt-Teilung als Einheit. Beide gezeichnete Nonien zeigen 0,7 *p* an. — An Zehntel-mm-Nonien lassen sich leicht aus den Abständen benachbarter Striche auch die Hundertel schätzen.

Den Horizontalabstand zweier Punkte kann man mittels zweier von ihnen herabhängender Coconfäden mit angehängten Gewichten messen, die, um Schwankungen zu vermeiden, in Wasser tauchen mögen. Ebenso miſst man den Durchmesser eines horizontalen Cylinders.

Einen Komparator für Abstände beliebiger Neigung s. bei F. Braun, Wied. Ann. 41, 627. 1890.

3. Teilmaschine. Dieselbe kann zur Messung, besonders auch kleiner Längen dienen, wenn an dem Schlitten oder an dem Gestell ein Mikroskop mit Fadenkreuz sitzt. Den Wert eines Schraubenganges bestimmt man auf einem Strichmaſsstabe. Wegen des toten Ganges stellt man immer von derselben Seite ein.

4. Mikroskop. Für kleine Längen wird am besten ein Mikroskop mit Okularmikrometer angewandt. Mit einem als Objekt untergelegten Glasmikrometer von bekanntem Werte wird zuerst der Teilwert des Okularmikrometers bestimmt und dann in leicht ersichtlicher Weise verfahren. Das Okularmikrometer kann selbst aus einer Glasteilung bestehen oder aus einem mit Mikrometerschraube beweglichen Faden oder Fadenpaar. An der Trommel wird die Verschiebung abgelesen.

Es ist nicht zu übersehen, dafs konstante Mikroskopvergröfserung eine ungeänderte Stellung des Okularmikrometers gegen das Objektiv voraussetzt.

5. Prüfung eines Strichmafsstabes. Besitzt man einen schon verificirten Mafsstab[1]), so ist die Aufgabe, für einen anderen Stab eine Korrektionstabelle aufzustellen, oben bereits erledigt. Andernfalls vergleicht man die angeblich gleichen Strecken des Mafstabes mit einer und derselben Länge a und bestimmt dadurch ihr gegenseitiges Verhältnis. Beide unter Nr. 2 erwähnte Komparatoren liefern das Mittel für genaue derartige Messungen. Enthält die Länge L n Unterabteilungen $a_1 a_2 \cdots a_n$ und wurde gefunden $a_1 = a + \delta_1$, $a_2 = a + \delta_2$ etc. bis $a_n = a + \delta_n$, so sei $\delta = 1/n \cdot (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)$. Dann ist

$$a_1 = L/n - \delta + \delta_1 \qquad a_2 = L/n - \delta + \delta_2 \text{ etc.}$$

Um die bei einer grofsen Zahl von Vergleichungen sich häufenden Fehler zu vermeiden, wird man sowohl gröfsere wie kleinere Strecken vergleichen, z. B. bei einem in mm geteilten Stabe alle dm, alle cm und alle mm; die letzteren wohl nach Nr. 4. Jede gröfsere gemessene Abteilung wird bei der Rechnung ihren Unterabteilungen gegenüber zunächst als Ganzes behandelt.

Über genauere Methoden s. Thiesen, Carl Rep. 15, 680. 1879; Abh. d. Phys. Techn. Reichsanst. II, 97. 1895; Benoît, Trav. et Mém. du Bureau internat. des poids et mesures II, pag. C 85 ff.; Pernet, ib. 4, 87. 1885.

6. Herstellung von Strichmafsen. Die gewöhnliche Teilmaschine benutzt den auf einer Schraube von bekannter Ganghöhe verschiebbaren Schlitten mit Reifserwerk. Um den „toten Gang“ zu eliminiren, stelle man vor jedem Strich immer

1) Durch Vermittelung der Normalaichungskommissionen sind Normalmafsstäbe zu beziehen.

von derselben Seite ein. Für Holz, Elfenbein und weiches Metall dient der Stahlstichel, sonst der Diamant. Glas pflegt man warm mit einer dünnen Wachsschicht zu überziehen, in welche nach dem Erkalten die Teilung eingetragen wird. Die Striche ätzt man glatt ein durch Fluſssäurelösung oder „Diamanttinte“, die man mit dem Pinsel aufträgt, oder matt durch Dämpfe von Fluſssäure (aus Fluſsspatpulver und Schwefelsäure) in einem Bleitroge.

Nach Bunsen kopirt man Teilungen von einem Originalmaſsstabe mittels einer langen Stange mit zwei Spitzen. Das Original und der zu teilende Stab werden in dieselbe gerade Linie festgelegt, die eine Spitze wird in die Teilstriche gesetzt, mit der anderen werden kurze Striche gezogen.

II. Kontaktmaſsstäbe.

Den gegenseitigen Abstand zweier Endflächen eines Körpers zu messen, dienen zunächst mit geringerer oder gröſserer Genauigkeit die unter dem Namen Schustermaſs, Fühlhebel, Kontaktschraube käuflichen Längen- und Dickenmesser. Man achte auf die Richtigkeit ihres Nullpunktes, bez. bringe die notwendige Korrektion an.

Einen genauen Dickenmesser nach Abbe s. Z. f. Instr. 1892, 310.

7. Sphärometer. Zu feinen Dickenmessungen dient die Schraube im Sphärometer. Diesem in der Konstruktion mannichfaltigen Instrumente liegt als gemeinsames Beobachtungsmittel zu Grunde, daſs eine bestimmte Höhe genau erkennbar gemacht ist, auf welche zuerst eine Spitze der vertikal verschiebbaren Meſsschraube gebracht wird, alsdann die eine Begrenzung des zu messenden Körpers, während die gegenüberliegende Begrenzung mit derselben Schraubenspitze in Kontakt ist. Im letzteren Falle wird die Schraube um eine Anzahl Umgänge zurückgedreht sein müssen. Die Ganzen werden gezählt oder an dem seitlichen Maſsstäbchen abgelesen; Bruchteile liefert die Kreisteilung, die sich mit der Schraube vor einem Index dreht. Die Zahl der Umgänge, mit der Höhe eines Schraubenganges multiplicirt, giebt die Körperdicke. — Drahtdicken u. dgl. werden zwischen Schneiden oder Platten gemessen.

Bei der einfachsten Form des Sphärometers tritt die untere

Spitze der Schraube in Berührung mit der Planfläche, auf welche die drei festen Fufsspitzen aufgesetzt werden. Der eingetretene Kontakt wird daran erkannt, dafs das Instrument nicht mehr feststeht, sondern um die verstellbare Spitze wackelt oder sich leicht auf derselben drehen läfst. Legt man zwischen Spitze und Unterlage noch eine Glasplatte, deren obere Fläche jetzt die Höhenmarke darstellt, so wird die eintretende Berührung scharf wahrnehmbar durch eine Verschiebung der zwischen der Platte und der Unterlage entstandenen Interferenzstreifen, die bei der Beleuchtung mit Natronlicht besonders deutlich hervortreten.

Oder es ist ein Fühlhebel oder ein Fühlniveau der Gegenstand, mit welchem der Kontakt stattfindet. Man stellt dann stets auf denselben Teilstrich des Zeigers oder auf dasselbe Einspielen der Libellenblase ein.

Die Höhe des Schraubenganges wird mit einem Körper von bekannter Dicke oder nach I, 2 oder 3 bestimmt.

Über die genaue Prüfung von Schrauben vgl. das Bessel'sche Verfahren in Weinstein, Mafsbestimmungen, 2, 290. 1888.

Über die Messung eines Krümmungshalbmessers s. **43** I.

Feinere Konstruktionen von Sphärometern nach Mayer und Bamberg s. z. B. bei Czapski, Z. S. f. Instr. 1887, 297.

8. Der Kontaktkomparator für Vergleichung gröfserer Endmafse hat ebenfalls Fühlhebel oder Fühlniveau, eventuell in Verbindung mit einer Mikrometerschraube. Die Messungsmethoden sind im Princip einfach.

Korrektionen.

9. Temperatur. Die Längen ändern sich mit der Temperatur. Ist β der Ausdehnungskoefficient eines Stabes (**26**; Tab. 9), l die Länge bei einer Temperatur t, l' bei t', so ist $l' = l(1 + \beta(t' - t))$.

Hat man mit einem Mafsstabe vom Ausdehnungskoefficient β_0 und der Normaltemperatur t_0 bei einer Temperatur t eine scheinbare Länge l gefunden, so ist ebenso die wahre Länge

$$= l(1 + \beta_0(t - t_0)).$$

Vgl. auch das Beispiel zu **3**, I.

10. Luftfeuchtigkeit. Holz und Elfenbein ist in seiner Gestalt auch von der Feuchtigkeit abhängig. Wenig beeinflufst

wird in der Richtung der Faser Ahorn und Fichte, stark dagegen Mahagoni, Eiche und Nufsbaum. Paraffiniren des Holzes (7, 19) schützt gegen Hygroskopie unvollständig, ein Schellacküberzug oder besser Tränken mit Schellack ist wirksamer.

11. Durchbiegung. Die Länge der Axe eines Stabes ändert sich durch mäfsige Durchbiegungen nur wenig. Die Abstände von Punkten aufserhalb der Axe können dadurch aber in leicht ersichtlicher Weise vergröfsert oder verkleinert werden. Es empfiehlt sich im allgemeinen, einen Mafsstab, wenn er in horizontaler Lage gebraucht wird, in zwei Querschnitten zu stützen, die je um 2/9 der Länge von den Enden abstehen. Auch die Aufbewahrung geschieht so am besten.

18a. Kathetometer (Dulong und Petit).

Das Kathetometer dient zur Messung von Vertikalabständen. Ein horizontales, um die Vertikale drehbares Fernrohr ist mittels Schlitten an einem vertikalen Mafsstabe verschiebbar. Auf gröfsere Entfernungen ist das Kathetometer wegen der Ungenauigkeit der Einstellung, wegen der Krümmung des Mafsstabes und wegen der grofsen Fehler durch Schwankungen nur mit Mifstrauen zu verwenden. Die Justirung des Instruments geschieht folgendermafsen.

1. Das Fernrohr ist um seine Sehrichtung drehbar: das Fadenkreuz wird so gestellt, dafs bei dieser Drehung der anvisirte Punkt sich nicht gegen das Fadenkreuz verschiebt.

2. Die Kongruenz der beiden Cylinder, in denen das Rohr sich dreht, wird mit der aufzusetzenden Wasserwage konstatirt, welche dieselbe Einstellung zeigen mufs, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern umlegt und nun die Libelle in ihrer alten Lage aufsetzt.

3. Die Drehungsaxe des Kathetometers wird vertikal gemacht, indem man die Fufsschrauben so regulirt, dafs die Libelle des Instruments bei der Drehung eine konstante Einstellung gegen ihre Teilung ergiebt. Über die beste Reihenfolge bei der Einstellung der Fufsschrauben und über das Justiren der Libelle selbst vgl. 88.

4. Die vertikale Stellung des Mafsstabes wird hinreichend genau mit einem Senkel erkannt, bezüglich danach regulirt.

5. Die horizontale Richtung der Fernrohraxe erkennt man, da nach Nr. 1 die Sehaxe mit der geometrischen Axe übereinstimmt, und wenn nach Nr. 2 die beiden Lagercylinder des Rohres gleich dick sind, mit der Fernrohrlibelle, die bei dem Umsetzen die frühere Einstellung der Blase auf ihrer Teilung zeigen muſs. Oder auch, da nach Nr. 3 die Drehungsaxe vertikal ist: man visirt einen Punkt an, dreht das Instrument um 180° und legt das Fernrohr um; dann muſs der vorher anvisirte Punkt dieselbe Höhe gegen das Fadenkreuz zeigen.

6. Daſs der Schlitten und das Fernrohr wirklich die vorausgesetzte Parallelverschiebung haben, erkennt man an der konstanten Einstellung der Libelle. Eventuell hat man, besonders bei gröſserem Abstande der zu messenden Höhe, entweder vor jeder Einstellung die Lage des Fernrohrs auf denselben Stand der Libellenblase zu korrigiren oder man miſst noch einmal mit umgelegtem Fernrohr und um 180° gedrehtem Instrument und nimmt aus beiden Ablesungen das Mittel.

7. Über Temperaturkorrektion siehe **18**, 9.

18b. Ophthalmometer (Helmholtz).

Dasselbe dient zur Messung kleiner Abstände. Das Instrument besteht aus zwei gleich dicken, nebeneinander vor dem Objektiv eines Fernrohres befindlichen Glasplatten, welche sich um eine gemeinsame Axe gleichzeitig um gleiche Winkel, aber gegeneinander drehen lassen. Die Gröſse der Drehung wird an Teilkreisen abgelesen. In der Nullpunktsstellung liegen beide Platten in der zur Sehlinie des Fernrohrs senkrechten Ebene.

Man stellt auf die beiden Punkte, deren gegenseitiger Abstand gemessen werden soll, gleichzeitig ein, indem man durch Drehung der Glasplatten die beiden durch die Lichtbrechung in den schrägen Gläsern abgelenkten Bilder zum Zusammenfallen bringt. Der Abstand des Objekts vom Instrument ist ohne Einfluſs.

Ist φ der Drehungswinkel aus der Nullstellung,
a die Dicke der Platten,
n das Lichtbrechungsverhältnis der Gläser,
so berechnet man den linearen Abstand e der beiden Punkte

$$e = 2a \cdot \sin\varphi \frac{\sqrt{(n^2 - \sin^2\varphi)} - \cos\varphi}{\sqrt{(n^2 - \sin^2\varphi)}}.$$

Die Konstanten des Ophthalmometers $2a$ und n kann man entweder einzeln direkt an den herausgenommenen Glasplatten bestimmen (**18**, insbesondere **18**, 7 bez. **39a** und **40** II); oder besser, man stellt auf einige Abstände einer mm-Teilung ein, mindestens natürlich auf zwei. Wenn auf mehrere, so ermittelt man $2a$ und n nach der Methode der kleinsten Quadrate (**3** III und IV).

Insofern man keine vollkommene Symmetrie des Instrumentes voraussetzen kann, ist es gut, jede Messung zweimal, mit entgegengesetzten Neigungen der Glasplatten auszuführen und aus den beobachteten φ das Mittel zu nehmen.

19. Bestimmung eines Hohlvolumens durch Auswägen.

Käufliche Meſsgefäſse sind oft sehr unrichtig[1]), Gewichtsätze viel zuverlässiger. Man bestimmt oder kontrolirt ein Volumen durch Auswägen mit Wasser oder Quecksilber, bei genaueren Bestimmungen durch Doppelwägung (**11**).

Die füllende Flüssigkeit zeige in der Luft das Nettogewicht m gr; dann ist das Volumen in cbcm

$$v = \frac{m}{s}\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right),$$

wenn s, σ und λ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, der Gewichtstücke und der Luft (0,0012; Tab. 6 und **15**) bedeuten; vgl. **11** II und Tab. 8.

Für Wasser siehe s in Tab. 4. Für Wasser mit Messinggewichten gewogen ist hinreichend genau $\frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma} = 0{,}00106$ (S. 50), und man kann einfach rechnen $v = m(2{,}00106 - s)$. Ein von der Wage angegebenes Gramm Wasser von 15° entspricht dem Volumen 1,0019 cbcm. Für andere Temperaturen findet man die Zahlen, alle auf das Glasvolumen bei 15° reducirt, in dem zweiten Teil von Tab. 4.

Für Quecksilber von der Temperatur t ist die Dichtigkeit

$$s = 13{,}596\,(1 - 0{,}000181\,t) \text{ und } \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma} = -0{,}000055.$$

Ein „Gramm" Quecksilber von 15° hat das Volumen 0,07375 cbcm.

1) Die Glasbläser pflegten bisher das cbcm von dem scheinbaren Gewicht des Wassers von 15° in Luft abzuleiten. Dadurch wird das Liter um 1,9 cbcm zu groſs!

Über Reinigung des Quecksilbers s. 7, 1; Genaueres über die Ausdehnung des Quecksilbers in 24.

Soll das Volumen des Gefäfses von der Beobachtungstemperatur t auf eine andere t_0 umgerechnet werden, so ist

$$v_0 = v\left(1 + 3\beta(t_0 - t)\right),$$

wenn β den linearen Ausdehnungskoefficient (Tab. 9) des Gefäfses bedeutet. Für gewöhnliches Glas im Mittel $3\beta = 1/40000$.

Bei Gefäfsen zur Volummessung mittels Ausgufs rechnet man natürlich das Gewicht des benetzten Gefäfses ab. Sorgfältig konstante Behandlung bezüglich der Art und Dauer des Abtropfens oder Ausblasens ist nötig, wenn dieser Gebrauch genaue Resultate geben soll.

Den Einflufs des Flüssigkeitsmeniskus eliminirt man thunlichst, indem man immer in gleicher Weise abliest und zwar in der Regel am besten in der den Meniskus berührenden Horizontalebene. Das zur Vermeidung der Parallaxe notwendige Visiren in einer und derselben Richtung wird durch ein Fernrohr erreicht, welches an einer vertikalen Stange verschiebbar ist; oder einfacher, indem man stets einen und denselben fernen Punkt als Augenpunkt nimmt.

Kalibrirung eines Gefäfses mit Quecksilber. Die konstante und bekannte Quecksilberfüllung (spec. Gewicht s. vor. S. oder **19a**) eines oben abgeschliffenen, mit einer Platte bedeckten kleinen Gefäfses, etwa eines unten geschlossenen Glasröhrchens wird wiederholt in das zu kalibrirende Gefäfs eingegossen und darin der Stand des Quecksilbers jedesmal abgelesen. Der Einflufs des Meniskus läfst sich ermitteln, indem man eine verdünnte Lösung von Sublimat auf das abgelesene Quecksilber aufgiefst, wodurch dessen Oberfläche sich abflacht. (Bunsen, gasometrische Methoden.)

19a. Kalibrirung einer engen Glasröhre.

Das gereinigte uud durch einen Luftstrom gut ausgetrocknete Rohr wird horizontal über einen Mafsstab (mit Spiegel zur Vermeidung der Parallaxe) gelegt und ein Faden von reinem Quecksilber eingebracht, den man verschieben kann. Letzteres geschieht durch Neigen und Klopfen, oder mittels eines Stückchens Kautschukschlauch am Rohre; man verschliefst

das Ende des Schlauches mit der einen Hand und kann nun mit der andern Hand durch Luftdruck oder auch, wenn man den Schlauch vorher gedrückt hatte, durch Saugen, den Faden vor- oder rückwärts bewegen.

Um die Röhre in gleiche Volumina abzuteilen, bringt man den Faden in nahe aneinander schliefsende Lagen und notirt seine Längen, denen dann gleiche Volumina entsprechen. Bei der Einteilung in viele Unterabteilungen häufen sich die Ablesefehler. Es ist in diesem Falle besser, Beobachtungen mit gröfseren und kleineren Fäden zu kombiniren. Um z. B. in 25 Teile zu teilen, mag man zuerst mit einem Faden von $^1/_5$ der Rohrlänge messen und die entstandenen Abteilungen dann mit einem 5mal kleineren Faden teilen.

Die Resultate wird man in einer Tabelle oder in einer Kurve auf Koordinatenpapier darstellen und für zwischenliegende Querschnitte die Werte interpoliren.

Über feinere Kalibrirungsmethoden vgl. Marek, Carl Rep. **15**, 300. 1879; Benoît, Trav. et Mém. du Bureau internat. des Poids et Mes. **2**, 35.

Absolutes Kaliber. Eine Quecksilbermasse von m mg (**11** und **19**) hat bei der Temperatur t das Volumen
$$v = m(1+0{,}000181\,t)/13{,}596 = m(1+0{,}000181\,t)\cdot 0{,}07355\,\text{cbmm}.$$
Der mittlere Querschnitt q der gemessenen Strecke beträgt, wenn l mm die Länge des Fadens ist, $q = v/l$ qmm.

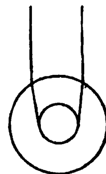
Der Halbmesser r einer kreisförmigen Röhre wird natürlich als $r = \sqrt{(q/\pi)}$ gefunden.

Meniskus. Wegen der Krümmung der Endflächen wird die Quecksilbermenge, also auch der oben berechnete Querschnitt zu klein sein, wenn man l zwischen den Kuppen der Menisken gemessen hat. Unter der für enge Röhren gestatteten Annahme, dafs die Endflächen Kugelkappen sind, berechnet man den mittleren Querschnitt
$$q = \frac{1}{l - \frac{1}{2}(h+h')}\left[m(1+0{,}000181\cdot t)\cdot 0{,}07355 - \pi\frac{h^3+h'^3}{6}\right].$$
h und h' sind die Höhen der beiden Menisken.

Querschnitt aus der Wägung eines Rohres. Hat ein Kreisrohr vom äufseren Durchmesser R, der Länge l und dem specifischen Gewicht s der Rohrsubstanz das Gewicht m, so ist der innere Querschnitt $= R^2\pi - m/ls$. Für dünnwandige Röhren

ist dieses Verfahren brauchbar. s bestimmt man oder setzt für gewöhnliches Glas $s = 2{,}5$.

Optische Bestimmung des inneren Durchmessers. Sieht man aus einiger Entfernung auf das Rohr, so ist der scheinbare innere Durchmesser gleich dem wirklichen multiplicirt mit dem Lichtbrechungsverhältnis des Rohres (Fig.) vorausgesetzt, dafs die innere und die äufsere Rundung des Rohres kreisförmig ist. Bei gewöhnlichem Glase also beträgt der wirkliche innere Durchmesser $^2/_3$ von dem scheinbaren. So kann man mit einem vorgehaltenen Mafsstab genähert oder mit dem Ophthalmometer (**18b**) genauer den Durchmesser von aufsen bestimmen. Um nicht durch Reflexe getäuscht zu werden, halte man das Rohr vor eine gleichmäfsig erhellte Fläche. Röhren, deren Durchmesser-Verhältnis kleiner als $^3/_3$ ist, kann man natürlich so nicht messen.



Aus der kapillaren Steighöhe. Steigt eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s und der Kapillarkonstante α (Wasser 7,8, Alkohol 2,3 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$) in dem gut benetzten Rohre um die Höhe H an, so ist der Halbmesser des Rohres $r = 2\alpha/Hs$. Vgl. **37b.**

Temperatur. Für 1^0 wächst für gewöhnliches Glas ein Durchmesser um $^1/_{120000}$, ein Querschnitt um $^1/_{60000}$.

19b. Schwerbeschleunigung. Länge des Sekundenpendels.

Schwerbeschleunigung g ist die Zunahme der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers in 1 sec. Dieselbe beträgt im Mittel für 45^0 980,6 und für die geographische Breite φ und die Höhe H Meter über dem Meere (Tab. 8a)

$$g = 980{,}6(1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H)\ \text{cm/sec}^2.$$

Die lokalen Abweichungen von dem so berechneten Werte dürften innerhalb 0,2 cm bleiben.

Bestimmung mit dem Pendel. Es wird im allgemeinen nicht leicht sein, g genauer zu bestimmen, als es aus der Formel berechnet wird. Als Übungsaufgabe soll die Messung mit einem Fadenpendel beschrieben werden. Eine gut abgedrehte, möglichst schwere Kugel von etwa 2 cm Durchmesser hänge an einem thunlichst leichten und weichen Faden über eine Schneide

bereits eine so lange Zeit, dafs eine konstante Pendellänge entstanden ist. Diese Länge l sei gezählt von der Schneide bis zum Mittelpunkt der Kugel, sie wird also mit einem spiegelnden Mafsstab (**18**, 1) oder mit dem Kathetometer (**18a**) gemessen als das arithmetische Mittel aus den Abständen bis zum obersten und dem untersten Punkte der Kugel.

Schwingungsdauer τ. Finden in t sec k Schwingungen statt, so ist $\tau = t/k$. Wenn die Länge zwischen 99 und 100 cm gewählt wird, so kommt die Dauer der Sekunde nahe, und man beobachtet nach der Methode der Koincidenzen. Liegt zwischen zwei auf einander folgenden Koincidenzen der Pendelschwingung mit einer vollen Sekunde eine Zeit $= n$ sec, so ist

$$\tau = \frac{n}{n-1} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{n}{n+1},$$

je nachdem das Pendel hinter der Uhr zurückbleibt oder ihr vorauseilt. Die Koincidenz wird mit dem Auge beurteilt oder nach dem Gehör auf die Umkehr des Pendels oder auf seinen Durchgang durch die Mitte bezogen. Eine gröfsere Beobachtungsreihe kann man nach **3** II berechnen, wenn die Amplitude klein oder wenig veränderlich war.

Korrektionen der beobachteten Schwingungsdauer τ. 1) Amplitude. Dieselbe sei $= \alpha$. Korrektion $= -\tau \cdot \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{4} \alpha$. Für α wird meistens das Mittel aus einer Beobachtung zu Anfang und zum Schlufs genügen. Vgl. auch **52**.

2) Trägheitsmoment der Kugel. Eine punktförmige Masse würde rascher schwingen als die Kugel vom Radius r. Korrektion $= -\tau \cdot \frac{1}{5} r^2/l^2$.

3) Faden. Der mitschwingende Faden hat die Schwingungsdauer der Kugel allein vermindert. Korrektion $= +\tau \cdot \frac{1}{12} \mu/m$, wenn μ und m die Masse des Fadens und der Kugel.

Beweis. Ein Pendel mit punktförmiger Masse von der Länge l würde haben $\tau_0 = \pi \sqrt{l/g}$. Unser Pendel, wenn K sein Trägheitsmoment (**54**), D die Direktionskraft ist (Anh. 9), hat (Anh. 10)

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{D}} = \pi \sqrt{\frac{m l^2 + \frac{2}{5} m r^2 + \frac{1}{3} \mu l^2}{g(m l + \frac{1}{2} \mu l)}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5} r^2/l^2 + \frac{1}{3} \mu/m}{1 + \frac{1}{2} \mu/m}} = \tau_0 \sqrt{(1 + \cdots)}$$

Anwendung der Näherungsformeln S. 9 ergiebt leicht die Korrektionen 2 und 3.

4) Auftrieb in der Luft. Die Schwere der Kugel wäre im leeren Raum im Verhältnis $1 + \lambda/s$ gröſser gewesen, wenn λ und s die Dichtigkeit der Luft (**15**) und der Kugel (Tab. 1). Korrektion der Schwingungsdauer $= -\tau \cdot \frac{1}{2}\lambda/s$.

5) Inhomogeneität der Kugel. Man hängt dieselbe, oben und unten vertauscht, um, beobachtet wieder und nimmt das Mittel.

Nicht berücksichtigt sind Fadensteifheit und mitschwingende Luftmasse.

Die korrigirte Schwingungsdauer heiſse τ_0, dann ist $g = \pi^2 l/\tau_0^2$. Die Länge l_s des Sekundenpendels würde sein $l_s = l/\tau_0^2$.

Druck.

19c. Druckmessung. Manometer.

Druck nennt man die Kraft auf die Flächeneinheit; Anh. 6a.

I. Flüssigkeitssäulen.

Dieselben bilden den Ausgang für alle genaueren Druckmessungen; sie bieten eine im ganzen Meſsbereich konstante Empfindlichkeit. Eine Säule von der Höhe h cm und dem spec. Gewicht s stellt den Druck hs gr-Gew./cm^2 $= ghs$ Dyne/cm^2 dar; g ist die Schwerbeschleunigung in cm/sec^2, für 45^0 Breite $= 980{,}6$ (**19b**; Tab. 8a).

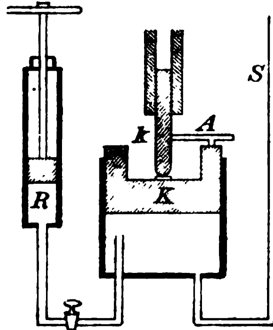
Als Flüssigkeiten werden Quecksilber, Wasser, auch wohl Glycerin ($s = 1{,}26$) am meisten gebraucht. Man erhält aus einer beobachteten Druckhöhe h einer Flüssigkeit vom spec. Gewicht s diejenige h' einer anderen Flüssigkeit s' als $h' = hs/s'$; also um dieselbe Flüssigkeit von der Temperatur t auf t' umzurechnen, $h' = h(1 + \alpha(t' - t))$, wenn α der Ausdehnungskoefficient zwischen t und t' ist (Hg 0,000181; s. **26** III; Tab. 4 u. 9).

Über Korrektionen für Hg wegen Kapillardruck s. Tab. 15. Vgl. auch **20** 1 bis 5 und Tab. 11.

Die Höhen werden auf einen hintergestellten Maſsstab projicirt, mit dem Auge unter Vermeidung der Parallaxe durch einen Spiegel, oder mit einem parallel verschiebbaren Fernrohr; oder sie werden mit dem Kathetometer gemessen (**18a**). Abgelesen wird immer die horizontale Tangente des Meniskus, also an Quecksilberflächen der obere, an den übrigen Flüssigkeiten der untere Rand. Die Kuppen sind oft schwierig zu erkennen; eine dicht über der Quecksilberfläche angebrachte Stahlspitze kann dies erleichtern, indem man auf die Mitte zwischen ihr und ihrem Spiegelbild einstellt. Bei dem Ablesen auf einem hintergestellten Maſsstab kann bei einer breiten, also in der Mitte ebenen Fläche ebenso die Mitte zwischen einem Teilstrich und seinem Spiegelbild zur Einstellung und zur Schätzung oder Messung des Abstandes der Kuppe vom nächsten Teilstrich benutzt werden (Thiesen).

Grofse Drucke. Das Quecksilbermanometer aus einem Stück wird oberhalb weniger Atmosphären unhandlich. Man kann dann wohl die Drucke mehrerer Säulen in **U**förmigen Röhren durch Wasser aufeinander übertragen und summiren (Thiesen, Z. S. f. Instr. 1, 114. 1881).

Druck-Reduktion durch Kolbenübertragung. Drucke von Hunderten oder Tausenden von Atmosphären mufs man bei der Übertragung auf Quecksilber verkleinern. Man benutzt das umgekehrte Princip der hydraulischen Presse. Der grofse Druck wirkt auf den Kolben k vom kleinen Querschnitt q, welcher die Kraft auf den Kolben K vom grofsen Querschnitt Q überträgt und unter K den Druck im Verhältnis q/Q reducirt auftreten läfst. Die übertragenden Flüssigkeiten sind Ricinusöl oder bei sehr grofsen Drucken Melasse.



Die Reibung wird durch drehende Bewegungen vermindert, welche man während der Messung dem Kolben durch einen eingeschraubten Arm A mitteilt. Der weite Cylinder enthält unten Quecksilber, welches mit dem Steigrohr S kommunicirt.

Die mit Ricinusöl gefüllte Regulirpumpe R läfst den Druck, trotz Austreten von etwas Flüssigkeit an den Kolbenwänden, konstant erhalten.

Näheres bei Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) 29, 68. 1893.

Glasröhren sind für inneren einseitigen Druck über etwa 400 Atm. nicht brauchbar zu machen. Volumänderungen von Gasen oder Flüssigkeiten in solchen Röhren (Piezometern) können, ohne dafs dieselben sichtbar sind, durch elektrische Kontakte beobachtet werden, die in die Röhre eingeschmolzen und durch dünnen Platindraht hintereinander verbunden sind. Jedes Herantreten des Sperr-Quecksilbers an einen folgenden Kontakt schaltet Widerstand aus und ist dadurch (**70** bis **71b**) zu erkennen (Amagat l. c.).

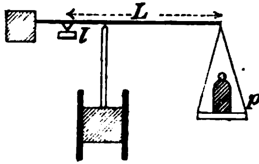
Bei Messungen mit hohen Drucken ist die Kompressionswärme zu beachten und ist also mit der Beobachtung bis zum wieder erfolgten Temperaturausgleich zu warten.

Zur Hervorbringung hoher Drucke (bis 1000 Atm.) dient die Cailletet'sche Pumpe (Ducretet und Lejeune, Paris).

Über die Anordnung von Versuchen mit hohem Druck s. u. a.: Elektr. Leitvermögen: Fink, Wied. Ann. 26, 481. 1885; Zusammendrückbarkeit: Röntgen u. Schneider, ib. 33, 644. 1888; Lichtbrechung: Röntgen u. Zehnder, ib. 44, 24. 1891; Dielektr.-Konstanten: Röntgen, ib. 52, 593. 1894.

II. Wagemanometer.

Der Druck auf den Kolben vom Querschnitt q wird auf einen äquilibrirten Wagebalken mit Wagschale übertragen und durch Gewichte p gemessen. Der Druck ist (Fig.) $= \frac{p}{q} \cdot \frac{L}{l}$.



III. Gasmanometer.

Der Druck wird auf eine abgesperrte Gasmenge in einem kalibrirten Rohr durch eine Flüssigkeit übertragen, welche das Gas nicht absorbirt. Der Druck ist dem Volumen umgekehrt proportional. Veränderliche Druckhöhen der Sperrflüssigkeit lassen sich nötigenfalls leicht in Rechnung setzen. Die Empfindlichkeit der Messung nimmt dem Drucke proportional ab. Für grofse Drucke müssen die Abweichungen des Gases vom Mariotte'schen Gesetz bekannt sein.

IV. Metallmanometer.

Der Druck wird durch die Durchbiegung einer Metallmembran oder die Krümmung einer Metallröhre (Bourdon) gemessen, deren Bewegung auf einen Zeiger übertragen ist. Die Aichung erfolgt empirisch mittels des Quecksilbermanometers. Geringe Druck-Variationen können mit einem drehbaren Spiegelchen, welches durch das Manometer bewegt wird, mit Fernrohr und Skala beobachtet werden.

Röntgen, Pogg. Ann. 148, 624; F. K. ib. 150, 423. 1873.

V. Drucklibelle für sehr kleine Drucke (Toepler).

Ein unter sehr stumpfem Winkel $180^0 - 2\alpha$ geknicktes Glasrohr von etwa 3 mm Weite enthält eine etwa $^1/_4$ m lange Säule Petroleum oder Xylol vom spec. Gewicht s. Ein einseitiger Druck, welcher eine Verschiebung um l cm bewirkt, ist



gleich $(2s \cdot \sin\alpha)\, l$ gr-Gew./cm². Den konstanten Faktor $2s \cdot \sin\alpha$ kann man beliebig klein machen.

Oder, wenn der Abstand der beiden Kuppen $= a$ ist, und wenn ein Druck d kompensirt wird durch eine Neigung des Rohres um den Winkel φ, so ist $d = sa \cdot \sin\varphi$. Der Neigungswinkel wird durch die Drehung der Fuſsschraube an der Libelle hervorgebracht und gemessen.

Mit mikroskopischer Ablesung ist eine Druckänderung von 10^{-8} Atmosphäre noch bemerkbar und selbst die Temperatur drückender Gassäulen scharf zu messen.

Toepler, Wied. Ann. 56, 611. 1895.

20. Atmosphärischer Druck (Barometerstand).

Unter Barometerstand versteht man allgemein die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Wegen der Veränderlichkeit der Schwere, die etwa ½% betragen kann, fügt man für genaue Zwecke hinzu, daſs die auf das Quecksilber wirkende Schwere diejenige unter 45° Breite am Meeresspiegel sein soll. Vgl. 5.

Daſs das Barometer luftfrei ist, erkennt man an dem scharfen Klange, mit welchem das Quecksilber bei dem Neigen des Instrumentes oben anstöſst. Das Vorhandensein von Wasserdampf über dem Quecksilber ist nur bei gröſseren Mengen durch den Beschlag zu erkennen, der sich bei dem Neigen an der Glaswand bildet. Kann man durch Nachgieſsen von Quecksilber oder Tiefereinsenken des Rohres den Raum über dem Quecksilber verkleinern und zugleich die Druckhöhen beobachten, so kann man das Vorhandensein von Luft oder kleinen Dampfmengen daran erkennen, daſs die Druckhöhen sich vermindern. Vgl. 6.

Am Heberbarometer werden beide Kuppen abgelesen und ihre Höhendifferenz genommen. Am Gefäſsbarometer stellt man den durch eine Stahl- oder Elfenbeinspitze gebildeten Nullpunkt des Maſsstabes auf die, am Reflex scharf zu erkennende Berührung mit der unteren Quecksilberfläche ein und liest oben ab (Fortin). Hat aber das Gefäſsbarometer einen feststehenden Maſsstab, so sind die beobachteten Schwankungen mit $1 + q/q'$ zu multipliciren, wenn q bez. q' den Querschnitt des Rohres

bez. des Gefäſses bedeuten. Oder es ist die Teilung an derartigen Instrumenten gleich in diesem Verhältnis verkleinert.

Die Ablesung der Kuppe geschieht mit bloſsem Auge oder durch Einstellung eines verschiebbaren Index, unter Anwendung eines Spiegels zur Vermeidung der Parallaxe (**18**, 1), oder mit einer Visirvorrichtung aus gespannten Fäden oder dem Mikroskop. Ein Barometerrohr ohne Maſsstab beobachtet man mit dem Kathetometer (**18a**). Über den Nonius siehe **18**.

Wegen der Reibung des Quecksilbers klopft oder neigt man vor der Ablesung.

Barometerablesungen verlangen folgende Korrektionen.

1. Temperatur des Quecksilbers. Das Quecksilber dehnt sich für 1° C. um 0,000181 seines Volumens aus. Ist demnach l der bei der Temperatur t im Barometer abgelesene Barometerstand, so ist der auf 0° reducirte (**4**, Beispiel Nr. 2)

$$b = l - 0{,}000181 \cdot lt.$$

Gewöhnlich genügt es, indem man für l in dem Korrektionsgliede den Wert 750 mm annimmt, die Korrektion durch Subtraktion von $0{,}135 \cdot t$ mm anzubringen.

2. Temperatur des Maſsstabes. Bei genauen Messungen muſs auch die Länge des Maſsstabes auf seine Normaltemperatur t_0 reducirt werden, was durch Addition von $\beta(t-t_0)l$ erreicht wird, worin β den Ausdehnungskoefficienten des Maſsstabes (0,000019 für Messing; 0,000008 für Glas) bedeutet.

Wenn wie gewöhnlich die Normaltemperatur des Maſsstabes = 0°, so wird der wegen der Temperaturausdehnung vollständig korrigirte Barometerstand

$$b = l - (0{,}000181 - \beta) \cdot lt.$$

Die gesamte Korrektion des abgelesenen Standes l beträgt also

für eine Messingskale $-0{,}000162 \cdot lt$
für eine Glasskale $-0{,}000173 \cdot lt$,

welche Werte in Tab. 11 zu finden sind.

3. Kapillardepression eines Gefäſsbarometers. Um diese zu korrigiren, mag man zu dem an der Kuppe des Meniskus abgelesenen Stande den aus Tab. 15 zu dem inneren Durchmesser der Röhre und der Höhe des Quecksilbermeniskus entnommenen Wert hinzufügen (vgl. 6).

4. Spannkraft des Quecksilberdampfes. In höherer Temperatur t bewirkt diese eine kleine Depression (Tab. 14), welche hinreichend genau korrigirt wird, indem man zu dem beobachteten Stande $0{,}001\,t$ mm addirt.

5. Schwere-Reduktion auf 45°. Der Druck einer und derselben Quecksilbersäule an verschiedenen Orten ist der Schwere proportional. Mit dem Ausdruck (**19 b**) $1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H$, dessen letztes Glied übrigens nur in sehr bedeutenden Höhen merklich wird, ist ein beobachteter Barometerstand zu multipliciren, um denjenigen zu erhalten, welcher demselben Luftdruck unter 45° am Meeresspiegel entspricht.

Aus dem reducirten Barometerstand b in cm berechnet man den Druck in gr-Gewicht/cm² als $b \cdot 13{,}596$. Der Druck im absoluten cm-gr-sec-System, d. h. die Kraft in Dynen/cm² oder in $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{sec}^{-2}]$ (Anh. 6) ist $b \cdot 13{,}596 \cdot 980{,}6 = b \cdot 13332$.

Eine normale Atmosphäre entspricht dem Drucke $76 \cdot 13{,}596 = 1033$ gr-Gew./cm² oder $76 \cdot 13332 = 1013200$ $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{sec}^{-2}]$ oder Dyne/cm².

Die Bemerkungen Nr. 1 bis 5 sind auf jede genaue Druckmessung mit Quecksilbersäulen anzuwenden.

6. Normalbarometer. Die aus der Kapillardepression entstehende Unsicherheit läfst sich vollständig nur durch ein weites Rohr (25 mm) vermeiden, welches die Depression ausschliefst. Die Füllung geschieht zur Vermeidung von Luft oder Wasserdampf mit der Quecksilberluftpumpe. Über reines Quecksilber s. 7, 1. Durch Vergleichung eines anderen Instrumentes mit dem Normalbarometer eliminirt man die Depression des ersteren durch Kapillarität und Luft- oder Dampf-Gehalt.

Über Formen von Barometern, deren Luftgehalt stets zu kontroliren oder zu beseitigen ist, vgl. L. Weber, Z. S. f. Instr. 13, 63. 1893.

7. **Aneroidbarometer** werden durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer justirt bez. mit einer Korrektionstabelle versehen. Man bringt das Instrument z. B. unter die Luftpumpe, verbindet mit dem Recipienten ein hinreichend weites Glasrohr, in welchem Quecksilber angesaugt wird, und zieht die Höhe der langsam gehobenen Säule von dem äufseren Barometerstande ab; an den abgelesenen Quecksilberdrucken werden die Korrektionen Nr. 1 bis 5 angebracht. Die Temperaturkorrektion eines Aneroids ist empirisch zu bestimmen.

21. Barometrische Höhenmessung.

Die Höhendifferenz zweier Stationen, deren Barometerstand gleichzeitig beobachtet worden oder dem mittleren Werte nach bekannt ist, ergiebt sich nach folgenden Regeln. Es seien

b_0 und b_1 die beiden Barometerstände [auf dieselbe Temperatur reducirt und ev. wegen des Dampfdrucks des Quecksilbers (**20**, 4) oder etwaiger Differenz zwischen beiden Instrumenten korrigirt],

t_0 und t_1 die Lufttemperatur an beiden Orten,

$t = \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$ deren Mittel,

h die gesuchte Höhendifferenz in Metern.

I. Für gewöhnlich rechnet man dann

$$h = 18450^{\text{met}} \cdot (\log b_0 - \log b_1)(1 + 0{,}0045\, t),$$

wofür bis zu Höhendifferenzen von etwa 1000 m auch der bequemere genäherte Ausdruck gesetzt werden kann

$$h = 16000^{\text{met}} \cdot (1 + 0{,}004\, t) \cdot (b_0 - b_1)/(b_0 + b_1).$$

II. Unter I wird die Schwere unter 45° Breite am Meere und ein mittlerer Feuchtigkeitsgehalt der Luft vorausgesetzt. Es sei jetzt

φ die geographische Breite,

H die mittlere Meereshöhe der beiden Orte in Metern (der Einfluſs wird kaum jemals merklich);

e_0 und e_1 die Spannkraft des Wasserdampfes an den beiden Stationen (**28**) und zur Abkürzung

$k = \frac{1}{2}(e_0/b_0 + e_1/b_1)$.

Dann berechnet man die Höhendifferenz

$$h = 18430^{\text{met}} \cdot (\log b_0 - \log b_1)(1 + 0{,}00367\, t) \cdot (1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi + 0{,}0000002\, H + \tfrac{3}{8} k).$$

Die Logarithmen sind die gewöhnlichen Briggischen.

Reduktion eines Barometerstandes auf Meereshöhe. Die Korrektion geschieht in der internationalen Meteorologie durch Addition von $b(10^m - 1)$, wo

$$m = \frac{H(1 - \frac{3}{8} e/b)}{(18429 + 67{,}5\, t + 0{,}003\, H)\,(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)}.$$

Hypsometer. Des bequemeren Transportes der Instrumente wegen wird bei Höhenmessungen der Barometerstand

auch aus der Siedetemperatur des Wassers abgeleitet. Die Tabellen 13a u. 13b geben die zusammengehörigen Siedetemperaturen und Barometerstände. Da 1 mm Barometerstand etwa $^1/_{25}$ Grad entspricht, so erreicht man nur mit den gröfsten Vorsichtsmafsregeln der Temperaturbestimmung (22) einige Genauigkeit.

Beweis der Formeln. Die Dichtigkeit der Luft ist (15 und 19b), wenn wir $0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi = \delta$, $0{,}0000002 = \varepsilon$ und $0{,}00367 = \alpha$ setzen, gleich

$$\frac{0{,}001293}{1+\alpha t}\,\frac{b-\frac{3}{8}e}{760}\,(1-\delta-\varepsilon H).$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0° beträgt 13,596. Folglich ist, wenn für die Höhenänderung dH der Barometerstand b sich um db ändert (d. h. dH bez. db die Höhe einer Luft- bez. einer Quecksilbersäule bedeuten, die sich im Gleichgewicht halten),

$$-\mathrm{d}b = \frac{0{,}001293}{13{,}596 \cdot 760}\,(b-\tfrac{3}{8}e)\,\frac{1-\delta-\varepsilon H}{1+\alpha t}\,\mathrm{d}H.$$

Hierin sind e und t eigentlich mit H veränderlich, aber nach einem unbekannten Gesetze. Wir führen für t den konstanten Mittelwert ein und setzen e in ein konstantes Verhältnis zum Barometerstand, $e = kb$. Rechnet man den Zahlenfaktor aus und behandelt die kleinen Gröfsen $\frac{3}{8}k$, δ und εH nach S. 9 als Korrektionsgröfsen, so kann man schreiben

$$-7993000(1+\alpha t)(1+\delta+\tfrac{3}{8}k)\cdot \mathrm{d}b/b = (1-\varepsilon H)\,\mathrm{d}H.$$

Wird jetzt integrirt, auf der linken Seite von b_0 bis b_1, auf der rechten von H_0 bis H_1, so kommt

$$7993000(1+\alpha t)(1+\delta+\tfrac{3}{8}k)(\log\mathrm{nat}\, b_0 - \log\mathrm{nat}\, b_1)$$
$$= (H_1-H_0)\,[1-\tfrac{1}{2}\varepsilon(H_1+H_0)].$$

Endlich setzen wir $\log\mathrm{nat}\, b = 2{,}3026 \log\mathrm{brigg}\, b$, behandeln $\frac{1}{2}\varepsilon(H_1+H_0) = \varepsilon H$ als Korrektionsglied und erhalten

$$H_1 - H_0 = h = 18400000^{\mathrm{mm}} \cdot (\log b_0 - \log b_1)(1+\alpha t)(1+\delta+\varepsilon H+\tfrac{3}{8}k).$$

Der Faktor 18400 m ist wegen der bisher vernachlässigten Abnahme der Schwere des Quecksilbers mit der Höhe noch um $\frac{1}{6}$%, also auf 18430 zu vergröfsern. Denn auf 1 m Erhebung beträgt jene $^1/_{5000000}$, während der Druck um $^1/_{8000}$ abnimmt. Also war die Höhen-Abnahme des Barometerstandes um $^{8000}/_{5000000} = {}^1/_{600}$ zu grofs angesetzt.

Die Näherungsformel I ergiebt sich, wenn man halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf annimmt, nach 15 Formel 2.

Die Näherungsformel unter I für kleine Höhenunterschiede ist nichts anderes als die obige Differentialformel, welche nach Vernachlässigung von δ, ε und k lautet $-7993000(1+\alpha t)\,\mathrm{d}b/b = \mathrm{d}H$. d$H$ ist der Höhenunterschied; für den Unterschied der Barometerstände $-\mathrm{d}b$ schreiben wir $b_0 - b_1$, setzen den mittleren Stand $b = \frac{1}{2}(b_0+b_1)$, lassen beim Übergange vom mm zum m 3 Nullen fort und runden 7993 zu 8000 ab.

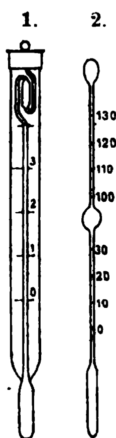
Wärme.

21a. Formen von Thermometern. Allgemeines.

Über Temperaturbäder etc. s. 7, 27.

„Luftfreie" Quecksilberthermometer sind von -39^0 bis höchstens $+350^0$ brauchbar; häufig tritt bereits unterhalb 350^0 ein Zerreifsen des Fadens ein. Zum Ablesen bequem sind die „Einschlufsthermometer" mit eingekitteter Skale. Die Kapillare soll nicht platt gedrückt sein, damit keine unregelmäfsige Kuppenbildung und kein „toter Gang" beim Sinken eintritt. Stabthermometer liest man mit dem Fernrohr ab.

Um Luftspuren über das Quecksilber befördern zu können, ohne zu dem Hilfsmittel der Abkühlung durch Kältemischungen, verdampfenden Äther, feste Kohlensäure, bis zur Zusammenziehung des Quecksilbers in die Kugel greifen zu müssen, endigt die Kapillare oben in eine Erweiterung mit verengter Mündung. Die Erweiterung dient oft auch zur Abtrennung eines Teiles von Quecksilber, um dasselbe Instrument in höherer Temperatur gebrauchen zu können, als seine Skale angiebt. Man vergleicht nachher einen Punkt der Skale mit einem Normalthermometer. Aufserdem ist aber der Skalenwert, wenn man a Grade abgetrennt hat, im Verhältnis $1+0{,}00016\,a$ gröfser anzunehmen.



Unter dem Namen Beckmann'sches Thermometer ist, besonders bei Gefrierpunktsbestimmungen, die Form 1 gebräuchlich, welche eine sehr weite Teilung hat. — Erweiterungen haben auch wohl den Zweck, die beiden Fixpunkte kontroliren zu können und doch sehr lange Skalenteile zu haben. In diesem Sinne ist Nr. 2 von 0 bis 30^0 und von 100 bis 130^0 brauchbar. Die obere Erweiterung läfst aufserdem Quecksilber abtrennen, um die verwendbaren Intervalle von 30^0 höher legen zu können.

Ein luftfreies Quecksilberthermometer zeigt wegen des

„toten Ganges“ bei sinkender Temperatur weniger sicher als bei steigender. Klopfen mit einem Stückchen Holz vor der Ablesung ist bei genauen Messungen stets anzuraten.

Hochgehende Thermometer enthalten über dem Quecksilber Stickstoff oder Kohlensäure. Mit Hilfe der letzteren werden durch das schwer schmelzbare Jenaer Glas Nr. 59 jetzt Skalen bis 550° ermöglicht, wobei der Druck über dem Quecksilber wegen dessen Dampfspannung 12 Atmosphären übersteigen mufs.

Von —39° abwärts dient Alkohol oder Toluol zur Füllung. Letzteres wird vorgezogen, weil es leichter rein (wasserfrei) herzustellen ist, und auch, weil sein Siedepunkt über +100° liegt Gegen Quecksilber aber haben beide Flüssigkeiten die Nachteile erstens gröfserer Trägheit wegen schlechter Wärmeleitung, zweitens der Benetzung des Glases, welche z. B. auch die Kalibrirung nach der Füllung hindert. Ferner wachsen die Gradlängen beträchtlich mit der Temperatur. Die Teilung kann nach den Ausdehnungsformeln (Tab. 9) geschehen, ist aber durch Vergleich mit dem Luftthermometer zu korrigiren.

Für die Quecksilbergefäfse kann zur Erwägung kommen: eine grofse Oberfläche im Interesse raschen Wärmedurchganges, unter Umständen eine gestreckte Form auch zu dem Zwecke, die Mitteltemperatur eines Raumes anzuzeigen; geringe Wanddicke für Wärmedurchlafs, andererseits nicht zu geringe wegen Zerbrechlichkeit und Einflufs des Druckes und der Neigung (22 C 1). Gröfsere Quecksilbermassen sind wegen der zum Wärmeausgleich nötigen Zeit vorsichtig zu gebrauchen.

In hoher Temperatur achte man auch noch auf etwaiges Abdestilliren von Flüssigkeit.

Ablesung des Thermometers. Feinere Ablesungen werden am besten mit dem Fernrohr gemacht: man richtet das Thermometer durch Visiren nach einem Senkel, Fensterrahmen u. dergl. vertikal und stellt das Fernrohr in der Höhe des abzulesenden Teilstriches auf. Einfacher dient zur Vermeidung der Parallaxe ein hinter das Thermometer angedrücktes Spiegelstreifchen. Man hält das Auge so, dafs sein Spiegelbild in der Höhe der Quecksilberkuppe liegt. Bei der Ablesung mit einer Lupe bietet auch die Krümmung der in unrichtiger Höhe liegenden Striche ein Mittel zur richtigen Augenstellung.

22. Quecksilberthermometer. Eispunkt und Siedepunkt.

Wissenschaftlich definirt man die Temperatur nach der Ausdehnung eines vollkommenen Gases (Wasserstoff), indem man gleichen Volum- (oder Druck-)Zuwachsen des Gases gleiche Temperatur-Zuwachse zur Seite stellt. Wir rechnen nach Centigraden, d. h. wir nennen die Temperatur des schmelzenden Eises Null und die Siedetemperatur des Wassers bei 760 mm Luftdruck (20) Hundert.

Das Quecksilberthermometer hält nicht ganz gleichen Schritt mit dem Luftthermometer, weil Quecksilber und Glas sich nicht gleichmäfsig ausdehnen[1]). Vgl. hierüber 24. Zunächst handelt es sich darum, das Quecksilberthermometer für sich zu berichtigen.

A. Eispunkt.

Man taucht das Thermometer in reinen schmelzenden Schnee oder reines (gewaschenes) fein zerstofsenes, besser geschabtes oder auf einem Reibeisen zerkleinertes Eis, mit destillirtem Wasser zu einem Brei angefeuchtet. Die Quecksilbersäule soll möglichst ganz in das Eis eintauchen; Einschlufsthermometer sind bis über den Nullpunkt einzusenken und nur während der Ablesung oben soweit nötig vom Eise zu befreien, nicht etwa herauszuziehen, da hierbei die warme Luft einströmt. Besondere Beachtung verlangt das etwaige Abschmelzen des Eises von der Quecksilberkugel, welches in warmer Umgebung beträchtliche Fehler bewirken kann.

Dem Punkte, auf welchen sich die Quecksilbersäule einstellt, nachdem das Thermometer die Temperatur des Eises angenommen hat, entspricht die Temperatur Null.

Je wärmer die umgebende Luft ist, desto sorgfältiger mufs man die obigen Vorsichtsmafsregeln beobachten.

B. Siedepunkt.

Man bringt das Thermometer in die Dämpfe von Wasser, welches in einem Metallgefäfs oder auch einem Glasgefäfs mit

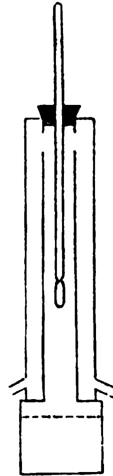
---

1) Die physikalisch-technische Reichsanstalt in Berlin aicht eingesandte Thermometer nach dem Luftthermometer, auch mit Rücksicht auf die Depression des Nullpunkts (22 C).

hineingeworfenen Metallstücken kräftig siedet. Die Temperatur des Wasserdampfes ergiebt sich aus dem Druck, unter welchem das Wasser siedet, d. h. aus dem nach **20** reducirten Barometerstande mit Hilfe von Tab. 13b. Bis auf $\frac{1}{100}$ Grad richtig kann man zwischen 715 und 770 mm für jeden Barometerstand *b* die Siedetemperatur *t* des Wassers auch ohne Tabelle berechnen nach der Formel

$$t = 100^0 + 0{,}0375^0 \cdot (b - 760).$$

Die Thermometerkugel wird nicht in das siedende Wasser gebracht, sondern etwas über die Oberfläche. Ist das Wasser nicht rein, so mufs das Anspritzen des Thermometers verhütet werden. Übrigens soll auch hier möglichst die ganze Quecksilbersäule in Dampf befindlich sein. — Der Ausgang für die Dämpfe mufs so weit sein, dafs nicht im Innern des Gefäfses ein Überdruck entsteht, oder man mifst diesen Überdruck mittels eines aus dem Innern des Gefäfses kommenden Wassermanometers. Der 14te Teil der gehobenen Wassersäule wird zu dem Barometerstande hinzugezählt. — Die Flamme wird von den nicht benetzten Teilen der Gefäfswände in einiger Entfernung gehalten. — In dem neben gezeichneten Gefäfs braucht die Quecksilberkugel nicht dicht über dem Wasser zu stehen. — Die Durchwärmung bedarf besonders bei Einschlufsthermometern einige Zeit. Man soll mit der Ablesung warten, bis der Stand unveränderlich ist.



Beispiel. Reducirter Barometerstand (**20**) = 742 mm. Das Thermometer zeigte 99,8. Siedetemperatur (Tab. 13b) = 99,33° (aus der Formel 100 — 0,0375 · 18 = 99,33°). Folglich liegt die Temperatur 100° bei dem Teilstrich 99,8 + 0,67 = 100,47; Korrektion der Ablesung = — 0,47°.

C. Veränderlichkeit der Fixpunkte.

1. Neigung und Druck. Einen kleinen Einflufs auf die Einstellung des Quecksilbers hat bei langen Säulen wegen des Quecksilberdruckes die Lage des Thermometers gegen die Vertikale. Dieser Einflufs ist empirisch zu bestimmen. Findet man, dafs das Thermometer dieselbe Temperatur in horizontaler Lage um δ höher angiebt als in vertikaler Lage, so hat die

Korrektion des Thermometers auf vertikale Lage bei einer Neigung um den Winkel φ den Betrag $\delta \cdot \sin \varphi$. Der Faktor δ ist der Höhe der Quecksilbersäule proportional. Auf empfindliche Thermometer hat auch veränderlicher Druck, z. B. die Tiefe des Eintauchens oder der wechselnde Barometerstand einen der Änderung proportionalen Einfluſs, den man empirisch ermittelt.

2. Allmähliches Aufrücken der Fixpunkte. Wegen der langsamen Zusammenziehung des geblasenen Glases rücken die beiden festen Punkte neuer Thermometer zunächst aufwärts, und zwar um nahe gleich viel. Das Aufrücken dauert mit verminderter Geschwindigkeit unter Umständen Jahre lang fort und kann mehr als 1^0 betragen. Durch langes Erwärmen, etwa auf Siedetemperatur, kann man den Proceſs beschleunigen.

3. Depression der Einstellung nach Erwärmungen. Da die Ausdehnung des Glases nach jeder Erwärmung des Thermometers eine Nachwirkung hat, welche erst mit der Zeit verschwindet, so läſst jede Erwärmung eine Erweiterung des Gefäſses (Nachwirkungs-Dilatation) und dadurch einen tieferen Stand des Quecksilbers, eine nach der Glassorte und der Gröſse und Dauer der Erwärmung verschiedene „Depression des Nullpunktes“ zurück. Dieselbe verliert sich anfangs rascher, später langsamer mit der Zeit und kann nach längerer stärkerer Erwärmung nach Wochen noch merkbar sein.

Allgemein beginnt ein erwärmt gewesenes Thermometer in konstanter niederer Temperatur bald langsam zu einem Endwert zu steigen.

Wird das Thermometer nach längerem Verweilen (etwa $^1/_2$ St.) in siedendem Wasser in Eis gebracht, so nimmt es bald vorübergehend einen tiefsten Stand an. Diesen nennt man wohl den „für 100^0 maximal deprimirten Nullpunkt“. Derselbe charakterisirt ein Thermometer mit derselben Bestimmtheit wie der Eispunkt, welcher nach sehr langem Verweilen im Eise entsteht; und da der letztere bei Thermometern, welche beträchtlich erwärmt worden waren, eine sehr groſse Zeit zur Beobachtung in Anspruch nimmt, so kann die Beobachtung des so maximal deprimirten Eispunktes vorzuziehen sein.

Die Anfangsdepression nach langer Erwärmung auf t^0 läſst sich durch den Ausdruck $at + bt^2$ darstellen; a und b hängen von der Glassorte ab.

Zwischen 0 und 100° ist für mittleres Thüringer Glas (welches Kali und Natron enthält) *a*, für Jenaer Thermometerglas und das französische Thermometerglas Verre dur (die wesentlich nur 1 Alkali enthalten) *b* klein gefunden. Nach längerer Erwärmung auf t^0 beträgt die Depression in Hunderteln Grad für Jena 16 $0{,}065\,t + 0{,}0003\,t^2$; Jena 59 $0{,}049\,t - 0{,}00015\,t^2$; Verre dur $0{,}100\,t + 0{,}00009\,t^2$. (Thiesen, Scheel und Sell, Z. S. f. Instr. 1896, 58.) Für $t = 100^0$ bez. 0,09, 0,03 und 0,11°; gewöhnl. Thür. Glas etwa 0,5°; Jena 122 (alkalifrei) 0,01 bis 0,02°.

4. Aufrücken durch Erhitzen. Verweilen in sehr hoher Temperatur kann unter der Einwirkung des Luftdrucks ein dauerndes, unter Umständen erhebliches Hinaufrücken (bis + 20°) der festen Punkte zur Folge haben. Thermometer für hohe Temperaturen sind vor dem Gebrauch einige Tage lang zu erhitzen und langsam zu kühlen. Öfteres Kontroliren des Nullpunkts ist stets anzuraten.

D. Definition und Berechnung der Temperatur.

Wir setzen ein richtig kalibrirtes Thermometer (23) voraus. Die gewöhnliche Definition der Temperatur läfst das Thermometer in allen Temperaturen zur Ruhe kommen. Nullpunkt ist derjenige Punkt, an welchem die Einstellung nach langem Verweilen im Eise anlangt; von hier bis zu der Einstellung bei längerem Sieden sind 100 Grade und nun wird die Temperaturskale einfach nach gleichen Volumteilen zwischen diesen festen Punkten gerechnet.

Insofern aber der Abstand zwischen dem Siedepunkt (100°) und dem gleich nach diesem bestimmten Nullpunkt konstanter und aufserdem leichter zu bestimmen ist, als das eben benutzte Intervall, weil die vorige Operation lange Zeiträume erfordert; weiter, da vorausgegangene andere Temperaturen die folgenden Einstellungen beeinflussen; endlich, da die Depression des Nullpunktes nicht der Temperatur proportional ist, wodurch in der obigen Definition sogar ein kleiner Fehler entsteht, so brauchen feine thermometrische Messungen neuerdings folgende Definitionen (Pernet):

1. Grad ist der 100te Teil der Strecke zwischen dem Siedepunkt und dem gleich nach dem Sieden gefundenen Eispunkt.

2. Die Temperatur *t* wird immer von demjenigen Nullpunkt gerechnet, welchen man unmittelbar nach der Temperatur-

beobachtung findet oder finden würde. (Der Nullpunkt ist in dieser Definition also eine veränderliche Gröfse.) Vergl. über die Berechnung C 3.

Literatur zu C u. D: Pernet, Thermometrie in Winkelmann, Handbuch II, 2; Guillaume, Traité prat. de la thermométrie, Paris 1889; Thiesen, Grunmach, Wiebe, Weinstein, metronom. Beiträge Nr. 3, 1881; Wiebe, Z. S. f. Instr. 1888, 373; 1890, 207; und Böttcher ib. 1888, 409; Chappuis, Mém. du bur. internat. des poids et mesures 1893, 165; Z. S. f. Instr. 1894, 141; Pernet, Jaeger u. Gumlich, Abh. d. Phys. techn. Reichsanst. Bd. 1; Z. S. f. Instr. 1895, 2, 41, 81 u. 117.

E. Herausragender Faden.

Eine beträchtliche Schwierigkeit genauer Temperaturmessung entsteht in der Regel, sobald gröfsere Strecken des Quecksilberfadens nicht mit in den zu messenden Raum eintauchen. Da der „scheinbare Ausdehnungskoefficient" des Quecksilbers im Glase, d. h. der Unterschied der Volum-Ausdehnungskoefficienten beider Substanzen für gewöhnliches und Jenaer Thermometerglas Nr. 16 0,000156 bez. für Jen. Therm.-Glas Nr. 59 0,000165 oder Verre dur 0,000158 beträgt, so hat man zu der Ablesung t hinzuzufügen

$$0{,}000156 \text{ bez. } 0{,}000165 \text{ oder } 0{,}000158 \cdot a(t - t_0),$$

wenn t_0 die Temperatur, a die in Graden ausgedrückte Länge des herausragenden Fadens ist. Schwierig ist aber die genaue Feststellung der mittleren Temperatur des herausragenden Fadens.

1. Man nimmt ein kleines Hilfsthermometer, dessen Gefäfs etwa in der mittleren Höhe des herausragenden Fadens angebracht ist, oder vielleicht mehrere in verschiedenen Höhen angebrachte, und beurteilt die Temperatur des Fadens aus den Ablesungen am Hilfsinstrument.

Über die Anwendung einer Korrektionsröhre neben dem Thermometer vgl. Guillaume, C. R. 112 I, 87. 1891. Über ein Fadenthermometer hierfür s. Mahlke, Z. S. f. Instr. 1893, 58; 1894, 73.

2. Ein anderes Verfahren ist das folgende (Mousson, Wüllner). Man setzt für den herausragenden Faden die Temperatur des Zimmers, aber als Fadenlänge, welche auf dieser Temperatur sich befindet, nicht die ganze herausragende Länge, sondern man zieht von dieser Länge eine konstante Gröfse α ab, welche sich folgendermafsen bestimmt. Das Thermometer zeige in einem warmen Bade von konstanter Temperatur (etwa dem Siede-

gefäfs S. 101) die Einstellung T, wenn es ganz eingetaucht ist, während es, um A Grade herausgezogen, nach längerer Zeit nur t anzeige. τ_0 sei hierbei die Lufttemperatur. Dann ist

$$\alpha = A - \frac{1}{0{,}000156} \cdot \frac{T-t}{t-\tau_0}.$$

Das so gefundene α ist also bei dem Gebrauch dieses Thermometers immer von der herausragenden Fadenlänge a abzuziehen und dann die Korrektion nach der ersten Formel, aber mit t_0 als Lufttemperatur zu berechnen.

In höheren Temperaturen bei herausragenden Thermometerteilen auf Abdestillation von Quecksilber achten!

23. Kalibrirung eines Thermometers.

Es kommt vor, dafs ein Thermometer wegen des ungleichmäfsigen Querschnitts in hohen Temperaturen um 10^0 falsch ist.

Die Korrektionstabelle wird, unter der Voraussetzung einer richtigen Längenteilung und ungefährer Übereinstimmung mit der richtigen Temperatur durch Kalibrirung in Verbindung mit der Bestimmung der Fixpunkte folgendermafsen erhalten. Zur Kalibrirung, d. h. zur Vergleichung der Volumina, welche der Längenteilung entsprechen, dient ein von der übrigen Masse abgetrennter Quecksilberfaden. Vgl. auch **19a.**

Ablösen eines Fadens. Man hält das Thermometer verkehrt und führt einen leichten Stofs gegen das Ende aus. Dann löst sich ein Faden ab, oder es fliefst zunächst das ganze Quecksilber, indem es sich in der Kugel von der Wandung löst. Das Abreifsen wird meistens durch ein irgendwo dem Glase anhaftendes mikroskopisches Luftbläschen bewirkt, welches sich zu einer gröfseren Blase ausdehnt. Reifst das Quecksilber in der Kugel, so läfst man durch rasches Aufrichten des Thermometers die dort gebildete Blase in den Eingang der Röhre aufsteigen, was mit einiger Geduld immer gelingt. Dann reifst die Säule im Eingang der Röhre ab.

Der Faden wird etwa um p Grade länger sein, als gewünscht wird. Man erwärmt, während der Faden abgetrennt ist, die Kugel; die Luft wird vor dem ansteigenden Quecksilber fortgeschoben. Darauf läfst man den Faden rasch zu dem übrigen Quecksilber zurückfliefsen und merkt sich die Ein-

stellung im Augenblick des Zusammenstofses. Das Luftbläschen bleibt, wenn die beiden Quecksilbermassen in Berührung getreten sind, an dem Punkte der Glasröhre haften, wo der Zusammenstofs erfolgte. Läfst man also um p Grade abkühlen und wiederholt die Neigung und Erschütterung, so reifst jetzt ein Faden von der verlangten Länge ab.

Ist umgekehrt ein Faden um p zu kurz, so vereinigt man ihn mit der übrigen Masse, erwärmt nach der Vereinigung um p, dann reifst die gewünschte Länge ab.

Wenn auch nicht auf das erste Mal, so gelingt es nach einigen Wiederholungen immer, bis auf Bruchteile eines Grades genau Fäden von willkürlicher Länge zu erhalten. Nur für sehr kurze Fäden versagt das Verfahren wohl, so dafs man sich dann, wie unten gezeigt wird, durch kombinirte verschiedene Fäden helfen mufs.

Einstellung und Ablesung des Fadens. Durch gelindes Neigen und Erschüttern läfst sich das eine Ende des Fadens mit grofser Genauigkeit auf einen beliebigen Teilstrich einstellen. Für feinere Beobachtungen, insbesondere mit dem Fernrohr, begnügt man sich mit genäherter Einstellung und schätzt die Zehntel Grade an beiden Enden des Fadens. Dafs die Beobachtungen wiederholt werden und durch Mittelnehmen verbessert werden können, ist selbstverständlich.

Zur Vermeidung der Parallaxe legt man eine Spiegelplatte unter und hält das Auge so, dafs sein Bild mit dem abgelesenen Teilstrich zusammenfällt; legt man das Thermometer hierbei senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Augen, so braucht man kein Auge bei dem Ablesen zu schliefsen. Oder man stellt eine Lupe fest auf und verschiebt das Thermometer parallel mit sich selbst. Am genauesten ist die Ablesung mit dem Fernrohr.

Beobachtung und Berechnung. Die Kalibrirung kann man verschieden ausführen. In jedem Falle stelle man vor der Beobachtung den Plan fest, weil man sonst auf verwickelte Rechnungen geführt werden könnte. Eis- und Siedepunkt sollen als Endpunkte verglichener Volumina vorkommen. Beobachtungen nach dem folgenden Schema werden für gewöhnliche Zwecke genügen, um so mehr, da vollständig rektificirte Queck-

silberthermometer nach der Glassorte differiren können. (Vgl. 24 Schlufs.)

Das Intervall a, in welchem kalibrirt wird, sei in 100 teilbar, also $n = 100/a$ eine ganze Zahl. Wir lösen einen Faden von nahe der Länge a ab. Diesen legen wir folgeweise auf die Strecken von nahe 0 bis a, a bis $2a$ u. s. w. (vgl. über stark fehlerhafte Thermometer die Bemerkung weiter unten). Der Faden nehme die Anzahl Teilstriche ein:

$a + \delta_1$ auf der Strecke 0 bis a,
$a + \delta_2$ „ „ „ a „ $2a$,
. . . .
$a + \delta_n$ „ „ „ $(n-1)a$ „ 100,
u. s. w.

Ferner liege (22) die Temperatur 0° bei dem T.-Str. p_0,
„ „ 100° „ „ „ $100 + p_1$.

Die Gröfsen δ_1 $\delta_2 \ldots$ sowie p_0 und p_1 sind also kleine Zahlen, in Skalenteilen und deren Bruchteilen ausgedrückt, die positiv oder negativ sein können. Setzen wir zur Abkürzung

$$s = 1/n \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n),$$

(die Summe der δ nur zwischen 0 und 100 genommen!) so ist

für den Teilstrich	die Korrektion
0	$-p_0$
a	$s - p_0 - \delta_1$
$2a$	$2s - p_0 - \delta_1 - \delta_2$
.	. . . . . .
ma	$ms - p_0 - \delta_1 - \delta_2 \cdots - \delta_m$.

Oder auch: für den Teilstrich ma ist die Korrektion Δ_m, wenn Δ_{m-1} diejenige für den Teilstrich $(m-1)a$ ist,

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m.$$

Die unter „Korrektion“ enthaltenen Zahlen geben also, der nebenstehenden Ablesung hinzugefügt, resp. wenn negativ von ihr abgezogen, den Stand, welchen das Thermometer mit richtigem Kaliber, Nullpunkt und Siedepunkt zeigen würde. Vgl. aber noch 22 C und 24.

Für die zwischenliegenden Grade interpolirt man eine Tabelle auf gewöhnlichem Wege, am besten graphisch.

Beweis. Der Faden, $n$mal aneinandergelegt, nimmt das Volumen von Teilstrich 0 bis 100, vermehrt um $\delta_1 + \cdots + \delta_n$ ein. Da aber 0° bei p_0,

100^0 bei $100+p_1$ liegt, also der Vermehrung des Quecksilbervolumens von Teilstrich 0 bis 100 eine Temperaturzunahme von $100+p_0-p_1$ Graden entspricht, so bedeutet das Volumen des Fadens die Temperaturzunahme

$$1/n \cdot (100+p_0-p_1+\delta_1+\cdots+\delta_n) = a+s \text{ (s. oben).}$$

Also entspricht einem Steigen des Quecksilbers

vom T.-Str. 0 bis a die Temperatur-Zunahme $a+s-\delta_1$,

" " a " $2a$ " " " $a+s-\delta_2$ u. s. w.

oder vom T.-Str. 0 die Temperatur-Zunahme

bis a	$a+$	$s-\delta_1$
" $2a$	$2a+$	$2s-\delta_1-\delta_2$
. .	. .	. . . . .
" ma	$ma+$	$ms-\delta_1-\delta_2\cdots-\delta_m$.

Die Ausdrücke hinter dem Strich würden die Thermometer-Korrektionen sein, wenn der T.-Str. 0 richtig wäre. Da ihm die Temperatur $-p_0$ entspricht, so ist überall noch p_0 abzuziehen.

Beispiel. Ein Thermometer für hohe Temperaturen soll, was für gewöhnliche Zwecke genügt, von 50^0 zu 50^0 kalibrirt werden; also $n = 100:50 = 2$. Ein Faden nahm die Strecken ein

von T.-Str.	0,0	bis	50,9	$\delta_1 = +0{,}9$
	50,0	"	100,4	$\delta_2 = +0{,}4$
	100,1	"	150,3	$\delta_3 = +0{,}2$
	149,8	"	199,6	$\delta_4 = -0{,}2$ u. s. w.

Der Eispunkt war auf T.-Str. +0,6, die Temperatur 100^0 auf T.-Str. 99,7 gefunden; also $p_0 = +0{,}6$, $p_1 = -0{,}3$ und

$$s = 1/n \cdot (p_0-p_1+\delta_1+\delta_2) = \tfrac{1}{2}(+0{,}6+0{,}3+0{,}9+0{,}4) = +1{,}1.$$

Also für Teilstrich	beträgt die Korrektion	
0	−0,6	= −0,6
50	1,1 − 0,6 − 0,9	= −0,4
100	2,2 − 0,6 − 0,9 − 0,4	= +0,3
150	3,3 − 0,6 − 0,9 − 0,4 − 0,2	= +1,2
200	+1,2 + 1,1 + 0,2	= +2,5 u. s. w.

Die für 100 berechnete Korrektion liefert teilweise eine Probe der Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer mit gröfseren Korrektionen. Wie man sieht, setzt die obige Anweisung voraus, dafs das zu kalibrirende Thermometer nicht etwa in hohem Grade unkalibrisch ist. Denn wir haben nicht berücksichtigt, dafs $\delta_1\,\delta_2\cdots$ eigentlich nicht Temperaturgrade, sondern Skalenteile bedeuten; auch nicht, dafs manche Strecken von dem Faden nicht bedeckt oder doppelt bedeckt waren. Je unrichtiger das Thermometer wäre, desto weniger würde diese Vereinfachung gestattet sein.

Es wird meist genügen, in einem solchen Falle so zu verfahren: Man bestimmt zuerst Eispunkt und Siedepunkt des

Thermometers. Man nimmt sodann einen Faden nahe von solcher Länge, dafs derselbe, n mal aneinander gelegt, die Strecke vom Eispunkt bis zum Siedepunkt genau ausfüllen würde. Man beobachtet ihn endlich, von dem Eispunkt anfangend, in solchen Lagen, dafs die nächste sich der vorigen sehr nahe anschliefst. Alsdann rechnet man gerade so wie vorhin. Die in der Schlufstabelle gegebenen Korrektionen gelten aber nicht genau für die Teilstriche 0, a, $2a$ etc., sondern für die denselben benachbarten Stellen, von denen bezw. bis zu denen der Quecksilberfaden gegangen war. Die Herstellung einer bequemen Korrektionstabelle geschieht wieder graphisch.

Kalibrirung durch mehrere abgelöste Fäden. Nicht immer gelingt die Abtrennung eines so kurzen Fadens wie das Intervall a, in welchem kalibrirt werden soll. Dann mufs man sich mit mehreren Fäden helfen, deren Längen verschiedene Vielfache von a sind. Durch einen Faden von der Länge ka kann man den Skalenraum 0 bis a mit ka bis $(k+1)a$ vergleichen, indem man den Faden zuerst zwischen 0 und ka und dann zwischen a und $(k+1)a$ bringt etc.; denn das Volumen, welches bei der Verschiebung auf der einen Seite frei wird, ist gleich dem auf der anderen Seite neu eingenommenen. Zum Beispiel kann ein Faden von beiläufig 40° Länge dazu dienen, um 0 bis 20 mit 40 bis 60 zu vergleichen.

Um aber alle Teile auf dasselbe Mafs zurückzuführen, müssen mehrere Fäden genommen werden, z. B. von der Länge $2a$ und $3a$. Mit denselben führt man die zu vergleichenden Volumina alle auf möglichst kurzem Wege auf ein und dasselbe Intervall zurück, z. B. auf das mittelste und kann dann nach dem oben aufgestellten Schema die Korrektionstabelle ausrechnen. Ein Beispiel wird dies klar machen.

Beispiel. Ein Thermometer soll zwischen 0 und 100 von 20 zu 20° kalibrirt werden, mittels zweier Fäden von 40° resp. 60° Länge. Wir betrachten zunächst die Strecke 40 bis 60 als das Volumen, mit dem wir die übrigen Strecken vergleichen wollen. Wir reduciren also die Beobachtungen auf diejenigen Zahlen, welche ein Quecksilberfaden F geliefert haben würde, der das Volumen von T.-Str. 40 bis 60 gerade ausfüllt. Nach früherer Bezeichnung (S. 107) ist also $\delta_3 = 0$.

Nun nehme der ungefähr 40° lange Faden die Strecken ein

T.-Str. +0,3 bis 40,0   20,7 bis 60,0.

Der Faden F würde also gereicht haben

von T.-Str. +0,3 bis 20,7; also $\delta_1 = +0,4$.

Gerade so führt man durch Beobachtung von 40 bis 80 und 60 bis 100 die Strecke 80 bis 100 auf F zurück. Man finde $\delta_5 = -0,7$.

Jetzt nehmen wir einen Faden von 60° Länge, legen ihn zwischen 0 und 60, sowie 20 und 80. Dadurch wird 60 bis 80 auf 0 bis 20 reducirt, und da letztere Strecke bereits mit 40 bis 60 verglichen worden ist, auch auf den Faden F. Die eingenommenen Strecken seien T.-Str. 0,0 bis 60,2 und 20,0 bis 79,6; so ist 0 bis 20 gleich 60,2 bis 79,6. Der Faden F aber ist um 0,4 länger als 0 bis 20, würde also von 60,2 bis 80,0 gereicht haben, also $\delta_4 = -0,2$.

Endlich sei ebenso durch Beobachtungen zwischen 20 bis 80 und 40 bis 100 gefunden $\delta_2 = +0,8$.

Ferner sei die Temperatur 0° und 100° bei T.-Str. +0,1 und 100,8 gefunden, also $p_0 = +0,1$, $p_1 = +0,8$.

Die Anzahl der zwischen 0 und 100 verglichenen Strecken ist $n = 5$. Hieraus berechnen wir (S. 107)

$$s = \tfrac{1}{5}(+0,1 - 0,8 + 0,4 + 0,3 + 0,0 - 0,2 - 0,7) = -0,18.$$

Die Korrektionstabelle wird unter Benutzung der Formel

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m$$

Teilstrich	Korrektion
0	−0,10
20	−0,10 − 0,18 − 0,4 = −0,68
40	−0,68 − 0,18 − 0,3 = −1,16
60	−1,16 − 0,18 + 0,0 = −1,34
80	−1,34 − 0,18 + 0,2 = −1,32
100	−1,32 − 0,18 + 0,7 = −0,80.

Die letzte Zahl ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer für Kalorimeter. Bei diesen kommt höchstens die Strecke 11 bis 28 in Betracht. Um diese einfach zu erhalten, bestimmt man an einem Normalthermometer mit Fäden von 50° bez. 33,3°, deren Länge durch zwei-, bez. dreimaliges Ansetzen zwischen 0 und 100 ermittelt ist, die Punkte 50, 33,3 und 16,7°. Mit diesen Punkten wird dann das kalorimetrische Thermometer im Bade verglichen. Durch einen Faden von 11,1° ermittelt man an ihm selbst noch die Punkte 11,1, 22,2 u. 27,8. Die meisten kalorimetrischen Versuche kann man so leiten, daſs die Temperaturen den eben bestimmten Punkten nahe liegen.

Über feinere Kalibrirungsmethoden vgl. z. B. v. Oettingen, Über die Korrektion des Thermometers, Dorpat 1865; Thiesen, Carl. Rep. 15, 285. 1879; Marek ib. S. 300.

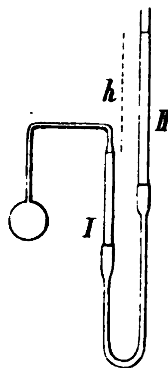
Vergleichung zweier Thermometer. Ein Thermometer läfst sich auch durch Vergleichung mit einem Normalthermometer korrigiren. Beide Instrumente werden, die Kugeln dicht nebeneinander, in ein gröfseres Gefäfs mit Flüssigkeit gebracht, welches, etwa mit Filz, gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist. Den Gang der Temperatur eliminirt man durch Wiederholung jeder Gruppe von Ablesungen in umgekehrter Reihenfolge. Vor jeder Ablesung wird gerührt. In hohen Temperaturen wird die Vergleichung auf diesem Wege leicht ungenau. Eine gröfsere Sicherheit als das Flüssigkeitsbad bietet eine siedende Flüssigkeit (Tab. 16a), am besten in einem Gefäfs mit Rückflufskühler (7, 27), in welche man beide Thermometer einführt. Vgl. auch 22E.

Über Bäder für sehr hohe und niedrige Temperaturen s. auch 7, 27.

24. Luftthermometer.

Das Normalinstrument, auf welches strenge Temperatur-Messungen bezogen werden müssen, ist das Luftthermometer. Ein vollkommenes Gas (Wasserstoff und nahe auch die trockene Luft) dehnt sich bei konstantem Druck für jeden Grad Temperatur-Zuwachs um 0,00367 (Wasserstoff 0,00366) seines Volumens bei 0° aus. In demselben Verhältnis wächst bei konstantem Volumen der Druck.

Das einfachste Luftthermometer (Modell von Jolly) beruht auf letzterem Satze. Ein mit trockener Luft gefüllter Glasballon von etwa 50 cbcm Inhalt steht durch ein Kapillarrohr mit einer vertikalen Glasröhre I in Verbindung, in welcher die Luft über Quecksilber abgegrenzt wird. Durch die Erhöhung oder Vertiefung des Quecksilberstandes in einem mit I durch einen Gummischlauch kommunicirenden Rohre II kann man die Oberfläche in I bis zu einer nahe an der Mündung des Kapillarrohres befindlichen Marke „einstellen“. Die Verhältnisse sind so zu wählen, dafs auch bei den niedrigsten Temperaturen der Schlauch überall unter innerem Überdruck steht, weil anderenfalls leicht Luft einsickert.



Erstes Verfahren. Um das Instrument zu graduiren, umgiebt man die Kugel mit schmelzendem Eise (**22** A), stellt das Quecksilber ein und beobachtet den Barometerstand b_0 und die Höhe h_0 der Kuppe in II über derjenigen in I. Setzen wir $b_0 + h_0 = H_0$, wo h_0 negativ ist, wenn das Quecksilber in II tiefer steht. Alle b und h werden auf dieselbe Temperatur, z. B. auf 0° reducirt (**20**).

Hat die Kugel eine andere zu messende Temperatur t bei dem Barometerstand b und der wieder „eingestellten" Quecksilberhöhe h, so ist, wenn $b + h = H$,

$$t = \frac{H - H_0}{0{,}00367 \cdot H_0 - 3\beta \cdot H}.$$

Ist der Ausdehnungskoefficient der Glassorte (**7**, 5; **26** II) nicht bekannt, so mag man $3\beta = 0{,}000025$ setzen. Bis zu etwa 60° kann dann hinreichend genau gerechnet werden $t = 275 \cdot (H - H_0)/H_0$.

Darf man nicht, wie hier geschehen ist, das Volumen der Kapillarröhre bis zur Einstellungsmarke (v') gegen dasjenige des Ballons (v) vernachlässigen, so ist obiges t zu multipliciren, wenn t' die Zimmertemperatur, mit

$$1 + \frac{v'}{v}\,\frac{H}{H_0}\,\frac{1}{1 + 0{,}00367 \cdot t'}.$$

Das **Verhältnis** $v' : v$ wird durch Auswägen mit Quecksilber gefunden.

Als Probe der Formel für t dient die Messung der Siedetemperatur des Wassers (Tab. 13b).

Beweise. Die Luftmenge bleibt konstant. Ist v das Volumen des Ballons bei 0°, d_0 die Dichtigkeit der Luft für 0° und 760 mm, so ist die Luftmenge, wenn wir $0{,}00367 = \alpha$ setzen,

bei 0° und H_0 — bei t und H

$$\frac{d_0 H_0}{760}\left(v + \frac{v'}{1+\alpha t'}\right), \qquad \frac{d_0 H}{760}\left(\frac{v(1+3\beta t)}{1+\alpha t} + \frac{v'}{1+\alpha t'}\right).$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke und Multiplikation beider Seiten mit $(1+\alpha t)/v$ kommt

$$H_0(1+\alpha t)\left(1 + \frac{v'}{v}\,\frac{1}{1+\alpha t'}\right) = H\left(1 + 3\beta t + \frac{v'}{v}\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\right),$$

oder $$t\left(\alpha H_0 - 3\beta H - \frac{v'}{v}\,\frac{\alpha}{1+\alpha t'}(H - H_0)\right) = (H - H_0)\left(1 + \frac{v'}{v}\,\frac{1}{1+\alpha t'}\right).$$

Schreibt man die linke Seite $t(\alpha H_0 - 3\beta H)\left(1 - \frac{v'}{v}\,\frac{\alpha}{1+\alpha t'}\,\frac{H - H_0}{\alpha H_0 - 3\beta H}\right)$

und vernachlässigt in dem Faktor der kleinen Gröfse v'/v das im Nenner vorkommende $3\beta H$ gegen αH_0, so entsteht (Formel 7, S. 9)

$$t = \frac{H - H_0}{\alpha H_0 - 3\beta H}\left(1 + \frac{v'}{v}\frac{H}{H_0}\frac{1}{1+\alpha t'}\right),$$

wie zu beweisen war.

Zweites Verfahren. Dasselbe ist von genauen Werten für die Ausdehnungskoefficienten und das Volumen der Kapillare weniger abhängig, weil (vgl. die Formel) der Faktor $(H_1 - H_0)/H_0$ bis $+150^0$ kleiner als $\frac{1}{8}$ bleibt. Man bestimmt Eispunkt und Siedepunkt des Instrumentes. Werden H_0 und H_1 als Druckhöhen für 0^0 und für die Temperatur t_1 des siedenden Wassers gefunden, so entspricht einer Druckhöhe H die Temperatur t

$$t = t_1 \frac{H - H_0}{H_1 - H_0}\left[1 - \frac{H_1 - H}{H_0}\left(\frac{3\beta}{0{,}00367} + \frac{v'}{v}\frac{1}{1 + 0{,}00367 \cdot t'}\right)\right].$$

Sehr tiefe Temperaturen sind mit (trockenem!) Wasserstoff zu bestimmen; über sehr hohe vgl. **25a.**

Über die Behandlung des Luftthermometers s. u. A. Chappuis, Trav et Mém. du Bur. internat. 6, 1888; Wiebe und Böttcher, Z. S. f. Instr. 10, 16 u. 233. 1890.

Quecksilber- und Luftthermometer. Das Quecksilber dehnt sich, verglichen mit der Luft, nicht genau gleichförmig aus.

Das Volumverhältnis ist, wenn t nach dem Luftthermometer gemessen wird, $v_t/v_0 =$

nach Regnault	$1 + 0{,}000179 \cdot t + 0{,}0_7 25 \cdot t^2$
„ Recknagel	$1 + 0{,}0001802 \cdot t + 0{,}0_7 094 \cdot t^2 + 0{,}0_{10} 5 \cdot t^3$
„ Wüllner	$1 + 0{,}0001812 \cdot t + 0{,}0_7 116 \cdot t^2 + 0{,}0_{10} 21 \cdot t^3$
„ Thiesen, Scheel und Sell	$1 + 0{,}0001816 \cdot t + 0{,}0_7 078 \cdot t^2$

Letztere Formel ist für Wasserstoff-Temperaturen von 0 bis 100^0 geprüft.

Den Ausd.-Koefficienten von mittlerer Temperatur auf 0^0 in Teilen von v_0 wird man hiernach gleich 0,0001815 setzen. Die relative Ausdehnung für 1^0 in Teilen des augenblicklichen Volumens ist bis über 200^0 wenig veränderlich $= 0{,}000181$. Dies drückt sich in der oft bequemen Formel aus $\log(v_t/v_0) = 0{,}0000785 \cdot t$ (Bosscha).

Nach diesen Formeln das Quecksilberthermometer auf das Luftthermometer zurückzuführen ist leider nicht möglich, weil auch das Glas sich ungleichmäfsig ausdehnt und zwar nach der Sorte sehr verschieden. Fast alle Quecksilberthermometer geben, wenn Nullpunkt und Siedepunkt sowie das Kaliber richtig, bez. die Korrektionen nach **22, 23** eingeführt sind, zwischen 0 und 100^0 etwas zu grofse Werte. Bis 150^0 bleiben die Abwei-

chungen in der Regel kleiner als 0,5°, bis 250° können sie 4°, bis 350° 10° betragen.

Auch in dieser Beziehung geben die Jenaer Thermometergläser gute Resultate.

Wenn der Unterschied eines rektificirten Quecksilberthermometers gegen das Luftthermometer bei 50° gleich $\varDelta$ beobachtet ist, so kann man bis 120° den Unterschied δ für die Temperatur t nach Bosscha mit ziemlicher Annäherung berechnen als $\delta = t(100-t)\cdot\varDelta/2500$.

Für die Jenaer Thermometergläser ist die Korrektion auf das Luftthermometer nach Wiebe, Z. S. f. Instr. 1890, 245 und Grützmacher ib. 1895, 250 und für Verre dur nach Chappuis

Temp.	—20°	0°	+20	40	60	80	100	120	140	160	180	200°
Glas Nr. 16	+0,15°	±	—,08	—,11	—,10	—,05	±	+,05	+,09	+,10	+,06	—,04°
„ 59		±	—,03	—,03	—,01	±	±	±	—,06	—,18	—,39	—,71°
„ 122		±	±	+,01	+,01	+,01	±					
Verre dur	+0,17	±	—,08	—,11	—,09	—,05	±					

Temp.	200°	220	240	260	280	300°
Glas Nr. 16	—0,04	—,21	—,46	—,82	—1,30	—1,90°

25. Elektrische Temperaturmessung.

Dieselbe ist besonders von Bedeutung, wenn die große Masse oder der Umfang eines Quecksilberthermometers hinderlich ist; außerdem in den höchsten und niedrigsten Temperaturen, wo die übrigen Mittel versagen (**25a**). Die Empfindlichkeit der elektrischen Methoden kann sehr weit getrieben werden.

I. Thermo-Element (Seebeck).

Benutzt wird die durch Temperaturdifferenz an den Kontaktstellen zweier Metalle auftretende elektromotorische Kraft. Man lötet zwei gleich lange, z. B. Eisen- und Neusilber-Drähte aneinander und mit den anderen Enden an Kupferdrähte. Bringt man die erstere Lötstelle an den Punkt, dessen Temperatur gesucht wird, und erhält die beiden anderen Lötstellen zusammen auf einer bekannten Temperatur (etwa durch Eis auf 0°), so entsteht eine elektromotorische Kraft. Letztere wird gemessen, indem man die Enden der Kupferdrähte mit einem Galvanometer verbindet.

Zu den gebräuchlichen folgenden Thermoelementen ist die zu erwartende el. Kraft für 1° Temp.-Differenz in Mikrovolt (**68** I) gesetzt:

Bi-Sb 100; Konstantan-Fe 53; „Patentnickel" (d. h. die Legirung der deutschen Nickelmünzen)-Fe 45; Konstantan-Cu 40; Ni-Fe 32; Patentnickel-Pt 28; Neusilber-Fe 25; Ni-Cu 22; Pt-Fe 17; 5%IrPt-Pd 12; 10%Rhod.Pt oder 10%IrPt-Pt 10.

Für kleinere Temperaturdifferenzen kann Proportionalität der Stromstärke mit Temperaturdifferenz angenommen werden. Man braucht also nur einmal die Stromstärke bei bekannter Differenz zu messen, um aus jeder Beobachtung die Temperatur abzuleiten. Man nimmt ein Spiegelgalvanometer (**66**) von mäfsigem Widerstande. Es ist gut, nur Kupferklemmen anzuwenden.

Für gröfsere Differenzen wird empirisch eine Tabelle konstruirt, indem die Ausschläge für einige Temperaturen beobachtet werden. Hieraus interpolirt man durch Rechnung oder auf graphischem Wege eine Tabelle zum Gebrauch.

II. Widerstands-Thermometer („Bolometer")[1]) (Will. Siemens).

Der elektrische Widerstand von Metallen wächst mit der Temperatur, am stärksten bei reinen Metallen, insbesondere Eisen, Nickel, reinem Platin, wo der Temperaturkoefficient (relative Änderung für 1°) 0,004 erreichen kann. Bei der Schärfe und Einfachheit der elektrischen Mefsmethoden hat das Verfahren grofse Vorteile.

Man schaltet den Mefsdraht mit einem gleichen Draht oder mit einem gleichen Rheostatenwiderstand in die Wheatstone'sche Brücke oder das Differentialgalvanometer (**71b** oder **71a**; s. auch **72**, Telephon).

Der Widerstand werde gefunden bei den bekannten Temperaturen t_0 und t_1 (z. B. 0 und 100°) gleich w_0 und w_1, bei einer zu messenden Temperatur t gleich w, dann ist in den Grenzen eines merklich konstanten Temp.-Koefficienten

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \cdot (w - w_0)/(w_1 - w_0).$$

Für weitere Grenzen bestimme man zunächst bei den bekannten Temperaturen t_0 t_1 t_2 die Widerstände w_0 w_1 w_2. Schreiben wir

$$w_1 - w_0 = \gamma_1 \quad w_2 - w_0 = \gamma_2 \quad t_1 - t_0 = \tau_1 \quad t_2 - t_0 = \tau_2 \text{ und}$$

1) Die gebräuchliche Bezeichnung Bolometer pafst eigentlich nur auf die Messung strahlender Wärme (**47b**).

$$a = \frac{\tau_1 \gamma_2^2 - \tau_2 \gamma_1^2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)} \qquad b = \frac{\tau_2 \gamma_1 - \tau_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)},$$

so bedeutet der Widerstand w die Temperatur

$$t = t_0 + a(w - w_0) + b(w - w_0)^2.$$

In noch weiteren Grenzen, wenn auch diese Formel nicht genügt, stellt man durch Beobachtung bei einer Anzahl von Temperaturen die letzteren als Funktion der Widerstände in einer Kurve dar, welcher die zu irgend einem Widerstande gehörige Temperatur entnommen werden kann.

Wenn die Temperatur t_v eines Vergleichsdrahts aus demselben Material wie der Meſsdraht wenig schwankt, so zählt man am einfachsten alle Temperaturen stets von t_v an und addirt t_v zu den so berechneten zu messenden Temperaturen. Den jedesmaligen Widerstand des Vergleichsdrahtes nimmt man als Einheit an.

Für das Temperaturbad kann bei kleinen Widerständen und kleinen Stromstärken reines Wasser dienen, wenn Platin gebraucht wird. Sicherer ist eine nicht leitende Flüssigkeit (Petroleum). Schwach werden die Ströme auch zu dem Zwecke genommen, Stromwärme zu vermeiden, welche besonders bei unsymmetrischen Verhältnissen beider Drähte Fehler bringt.

Die Meſswiderstände werden z. B. auf Glimmerplättchen aufgewickelt; Zuleitungsdrähte nimmt man, soweit sie mit erwärmt werden, am besten aus demselben Metall, nur dicker.

Über strahlende Wärme s. 47b.

25a. Messung hoher Temperaturen (Pyrometrie).

I. Luft-Pyrometer.

Fast bis zur Rotglut kann zum Gefäſs auſser Platin schwer schmelzbares Glas dienen. Glühend ist auch Platin unbrauchbar, weil es Flammengase durchläſst und Sauerstoff kondensirt. Bis etwa 1450° ist auſsen glasirtes Porzellan brauchbar, über 1200° allerdings nur, wenn der innere Druck vom äuſseren nicht zu sehr abweicht. Die in hoher Temperatur für die Dichtung nötige Glasur erweicht bei etwa 1200°. In ganz hohen Temperaturen sind deshalb auſsen glasirte Gefäſse (Innen-Glasur ist wegen Verdampfung unzuläſsig) unter Überdruck von auſsen zu halten, damit nicht die Glasur von innen durchbrochen wird.

Der schädliche Raum in der Kapillare bringt in hoher Temperatur gröfsere Korrektionen. Man kann dieselben durch den Kompensator eliminiren, ein Luftthermometer ohne Ballon (Deville und Troost), welches dicht neben dem eigentlichen Thermometer im gleichen Raume geheizt wird und also die Temperatur im schädlichen Raume messen läfst. Oder man mifst das Temperaturgefälle mit einem längs der Kapillare verschiebbaren Thermoelement.

Verdrängungsverfahren (Regnault, V. Meyer). Aus einem Gefäfs mit zwei Kapillaren wird die Luft bei der zu messenden Temperatur durch ein Gas (Kohlensäure, Chlorwasserstoff) verdrängt und über einer Flüssigkeit, welche das verdrängende Gas absorbirt, aufgefangen und gemessen. Ist das auf Trockenheit, auf 0° und den atmosphärischen Druck umgerechnete (15) Volumen der ausgetretenen Luft $= v_0$, das Volumen des Gefäfses $= v$, so war die Temperatur des letzteren $= 273(v - v_0)/v_0$.

II. Elektrische Pyrometer.

Widerstand (25 II). Platin läfst sich bis etwa 1200° benutzen: weiter hinauf wird die Sublimation des Platins zu stark. Schwierigkeit bietet die Isolation, da die meisten Isolatoren im Glühzustande anfangen zu leiten. Flammengase ändern den Widerstand dauernd; sie müssen durch glasirte Porzellanröhren ferngehalten werden.

Thermoelement (25 I). Besonders Platin gegen Platin-Rhodium (10% Rh; Le Chatelier) oder Platin-Iridium (10% Ir; Barus) sind bis gegen den Schmelzpunkt des Platins brauchbar. Man isolirt elektrisch durch ein über den einen Draht geschobenes unglasirtes Porzellan- oder Thonrohr und gegen Flammengase durch ein über das Ganze geschobenes glasirtes Porzellanrohr.

Die Aichung[1]) geschieht mit dem Luftthermometer, am einfachsten, indem man den Widerstand oder die Lötstelle in dem Luftgefäfse anbringt. Oder man benutzt bekannte Schmelzpunkte (Pb 325°, Al 625°, Ag 970°, Au 1070°, Pd. 1580°; Tab. 16a), am einfachsten durch Einfügung eines 5 mm langen Drahtstücks

---

1) Die Phys.-Techn. Reichsanstalt prüft Thermoelemente.

des bekannten Metalles in die Lötstelle; die thermoelektrische Kraft im letzten Augenblick vor dem Durchschmelzen wird beobachtet.

Ebenso lassen Schmelzpunkte von Metallen sich bestimmen. Oxydirbare Metalle sind durch einen Wasserstoffstrom zu schützen.

Langer und Meyer, Pyrochem. Unters., Braunschw. 1885. C. Barus, Die physik. Behandl. und die Messung hoher Temp., Leipzig 1892. (Enthält eine vollständige Übersicht und die Literatur über Pyrometrie.) Callendar, Über Widerstandspyrometer, Phil. Trans. 178, S. 161. 1887; 182, S. 119. 1891. Holborn und Wien, Wied. Ann. 47, 107. 1892 und 56, 360. 1895.

26. Bestimmung des Wärme-Ausdehnungskoefficienten.

Linearen Ausdehnungskoefficienten β nennt man die Verlängerung eines Stabes von der Länge Eins, kubischen 3β die Volumzunahme des Volumens Eins bei der Temperaturerhöhung um 1^0. Für Flüssigkeiten wird die Ausdehnung stets nach Volumen gerechnet.

I. Durch Längenmessung.

Wenn ein Stab von der Länge l sich bei der Temperaturerhöhung t um λ verlängert, so ist $\beta = \lambda / l t$.

Die geringen Ausdehnungen werden gewöhnlich auf einen Kontakthebel übertragen. r sei der Abstand des Kontaktpunktes von der Drehaxe, α der Drehungswinkel, dann ist $\lambda = r \sin \alpha$, vorausgesetzt, dafs bei einer der beiden Temperaturen der Hebelarm zur Stabrichtung senkrecht ist.

Der Drehungswinkel wird mit Spiegel und Skale (48; z. B. Anordnung von Edelmann) gemessen. Man richtet das Fernrohr auf den Fufspunkt der vom Spiegel auf die Skale gefällten Senkrechten, deren Länge $= A$ Sk.-T. sei. Der Ausschlag durch die Temperaturänderung betrage e Skalenteile, so ist $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} e/A$. Für ein kleines α kann man setzen $\sin \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$, also ist in diesem Falle $\lambda = \frac{e}{2} \frac{r}{A}$. Vgl. auch 48, 49 und das Beispiel in 3.

Gröfseren Temperaturunterschieden ist die Ausdehnung nicht mehr genau proportional. Man setzt dann die Länge bei der Temperatur t

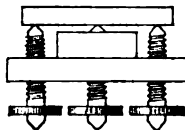
$$l = l_0 (1 + \beta t + \beta' t^2)$$

und bestimmt die beiden Koefficienten β und β' aus mindestens drei Beobachtungen. Vgl. **3**.

Über einen Apparat für kürzere Stäbe von Fuefs s. Glatzel, Pogg. Ann. 177, 497. 1877.

II. Durch Lichtinterferenz (Fizeau).

Die Ausdehnung wird in Lichtwellenlängen gemessen; man untersucht Platten von mäfsiger Dicke, welche zwei parallele Flächen haben, von denen die obere *a* polirt sein mufs. Diese verschiebt sich bei der Ausdehnung nach einer fast parallelen in kleinem Abstande darüber befindlichen ebenfalls planen Unterfläche *b* einer Glasplatte hin. Homogenes Licht, welches an *a* und *b* gespiegelt wird, erscheint dem darüber befindlichen Auge mit Newton'schen Interferenzstreifen, welche sich bei der Verkürzung der Zwischenschicht um *n* Wellenlängen um 2*n* Streifenbreiten verschieben. Die Verschiebung wird durch ein Mikroskop an Marken gemessen, welche an der oberen Fläche angebracht sind. Die Änderung der Wellenlänge in der Luftschicht durch die Erwärmung (Tab. 20) und etwa durch Luftdruck-Schwankungen wird in Rechnung gesetzt.



Körper, welche keine spiegelnde Fläche haben, kann man untersuchen, indem man auf dieselben eine dünne Platte von bekannter Ausdehnung (Quarz) legt.

Die Ausdehnung der Stahlschrauben, welche die obere Platte tragen, mufs bekannt sein und in Rechnung gesetzt werden. Man bestimmt dieselbe nach der nämlichen Methode, an der polirten Oberfläche des Stahl-Tischchens selbst oder mit Hilfe einer auf dasselbe gelegten Quarzplatte.

Über homogene Lichtquellen s. **37d**, daselbst auch die Bemerkung über das periodische Undeutlichwerden der Fransen von Natriumlicht. Die Wellenlängen s. in Tab. 19a.

Der Ausdehnungskoefficient des Quarzes für die Temperatur t ist (Benoît) in der Richtung der Axe $0{,}0_4 0716 + 0{,}0_7 080 \cdot t$

senkrecht zur „ $0{,}0_4 1325 + 0{,}0_7 116 \cdot t$.

Fizeau, Pogg. Ann. 119, 87. 1863; 123, 515. 1864; 128, 564. 1866. Benoît, Trav. et Mém. du bur. internat. I. 1881 u. VI. 1888; Pulfrich, Z. S. f. Instr. 1893, S. 365, 401 u. 437 über das Fizeau'sche Dilatometer der Zeifs'schen Werkstätte; vgl. besonders daselbst auch die Bemerkungen über die Ermittelung der gewanderten Streifenzahl.

III. Durch Wägung.

Mit Quecksilber. Am häufigsten entsteht für Glassorten das Bedürfnis einer Kenntnis des Ausdehnungskoefficienten. Man wägt einen in eine Spitze ausgezogenen Ballon bei zwei verschiedenen Temperaturen mit Quecksilber (19). Zur Füllung taucht man die Spitze des vorher erwärmten Ballons ein, worauf beim Erkalten Quecksilber aufgesaugt wird. Dies wiederholt man, indem zuletzt das Quecksilber zum Sieden gebracht wird, bis zur vollständigen Füllung. Endlich läfst man den Ballon unter Quecksilber bis zu einer niedrigen Temperatur t abkühlen. Die Wägung des so ganz gefüllten Ballons ergebe das Nettogewicht p des Quecksilbers. Alsdann erwärmt man bis zur Temperatur t', wobei eine gewisse Quecksilbermenge ausfliefst, und bestimmt wieder das Gewicht p'. Dann berechnet sich der kubische Ausdehnungskoefficient des Glases

$$3\beta = 0{,}0001815\,\frac{p'}{p} - \frac{1}{t'-t}\,\frac{p-p'}{p}.$$

Beweis s. f. S.

Mit Wasser. Wägt man bei zwei Temperaturen t und t' mit luftfreiem Wasser, so ist

$$3\beta = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{Q}{Q'}-1\right) \text{ oder } = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{v'}{v}-1\right),$$

wo die Dichtigkeiten Q und Q' oder die Volumina des Wassers v und v' zu t und t' aus Tab. 4 oder 5 genommen werden.

Um 100^0 herum hat im Verhältnis zu 4^0 das Wasser das Volumen $1{,}04327 + 0{,}00080(t-100)$.

Weil die Ausdehnung des Quecksilbers und in höherer Temperatur mehr noch die des Wassers diejenige der festen Körper weit übertrifft, so wird eine äufserst genaue Bestimmung der Temperatur verlangt.

Aus Dichtigkeitsbestimmungen. Sind die Dichtigkeiten s und s' eines Körpers für die Temperaturen t und t' hinreichend genau bekannt, so ist der Ausdehnungskoefficient $3\beta = (s/s'-1)/(t'-t)$.

IV. Ausdehnung von Flüssigkeiten.

1. Ein Glasgefäfs — mit ausgezogener Spitze oder in der Form der Figuren S. 55 — halte bei gewöhnlicher Temperatur t

das Flüssigkeitsgewicht p, bei der höheren Temperatur t' das Gewicht p'. Wenn 3β der kubische Ausdehnungskoefficient des Glases (s. v. S. und 7, 5), so ist der mittlere Ausdehnungskoefficient der Flüssigkeit zwischen t und t' gleich

$$\alpha = 3\beta \frac{p'}{p} + \frac{1}{t'-t} \frac{p-p'}{p'}.$$

Denn wenn v und v' das specifische Volumen der Flüssigkeit für t und t' bezeichnen, so ist $\alpha = (v'/v - 1)/(t'-t)$. Nun ist offenbar $p'/p = [1 + 3\beta(t'-t)]v/v'$, also $v'/v = p/p' + 3\beta(t'-t)p/p'$, woraus diese und auch die Formel unter III sich leicht ergiebt.

2. Man wäge einen Glaskörper bei zwei Temperaturen t und t' in einer Flüssigkeit. Wenn p und p' die Auftriebe, so gilt dieselbe Formel.

3. Ein Glasgefäfs mit einem angeblasenen engen, geteilten Rohr (Dilatometer genannt) wird bis in das Rohr mit der Flüssigkeit gefüllt und die Einstellung der Säule bei den Temperaturen t bez. t' beobachtet. Sind die abgelesenen Volumina v bez. v', so hat man als mittleren Ausdehnungskoefficienten

$$\alpha = 3\beta \frac{v'}{v} + \frac{1}{t'-t} \frac{v'-v}{v}.$$

Das Gefäfs kalibrirt man mit Quecksilber, die Strecken des Rohres desgleichen mit Quecksilberfäden, die man wägt (vgl. **19** und **19a**). Noch einfacher ist es, zuerst eine Flüssigkeit von bekannter Ausdehnung in dem Apparat zu untersuchen und daraus die Volumenverhältnisse abzuleiten.

26a. Schmelzpunkt oder Gefrierpunkt.

So heifst diejenige Temperatur, bei welcher feste und flüssige Teile des Körpers nebeneinander bestehen können (Tab. 16a). Gemische mehrerer Körper, wie die meisten Fette, Paraffin, Glas haben im allgemeinen keinen scharfen Schmelzpunkt, sondern ein Temperaturintervall, innerhalb dessen sie erweichen. — Erstarrungstemperaturen sind meistens unsicher und können beträchtlich unter den Schmelztemperaturen liegen.

Schmelzpunkt eines Körpers. Die Ausführung einer Bestimmung ist nach der Natur des Körpers, besonders nach der Höhe des Schmelzpunktes sehr verschieden. Z. B. kann man in einem ausgezogenen Glasröhrchen eine kleine Menge geschmolzener Substanz aufsaugen und darin erstarren lassen. Der

starre Zustand wird sich von dem flüssigen meist durch eine Trübung des Tropfens unterscheiden. Man bringt das Röhrchen mit einem Thermometer in ein Bad (Becherglas mit Wasser, Petroleum, Paraffin etc.), welches man unter Umrühren langsam erwärmt, und beobachtet die Temperatur, bei welcher der Tropfen sich klärt oder beweglich wird. Die erste Beobachtung wird nur zur Orientirung dienen.

Sicherer ist die Anwendung gröfserer Mengen. Dieselben erwärmt man allmählich zusammen mit einem Thermometer. Bei dem Schmelzen bleibt die Temperatur einige Zeit lang stationär.

Über hohe Temperaturen s. **25 a**. Man kann den Körper in einem Tiegel schmelzen, in welchen von oben oder durch den Boden ein mit einem dünnen Porzellanrohr geschütztes Thermoelement eingeführt wird. Bei richtig regulirter Heizung bleibt die Stromstärke während des Schmelzens einige Zeit konstant. Siehe auch in **25a** die thermoelektrische Methode für Metalldrähte.

Gefrierpunkt von Lösungen. Der Gefrierpunkt eines Lösungsmittels erniedrigt sich durch Auflösung eines Stoffes proportional der molekularen Koncentration der Lösung, solange die letztere nicht zu stark wird (Rüdorff, Coppet, Raoult). Ist p die in Grammen gemessene gelöste Menge in 1000 g des Lösungsmittels, M das chemische Molekulargewicht des gelösten Stoffes, so nennt man $p/M = \mu$ die in 1000 g gelöste Anzahl von Gramm-Molekülen und die Erniedrigung τ des Gefrierpunkts ist also

$$\tau = G \cdot \mu = G \cdot p/M \quad \text{oder} \quad M = G \cdot p/\tau.$$

Der Faktor G, die „molekulare osmotische Arbeit", ist von der Art des gelösten Stoffes unabhängig, hat jedoch für jedes Lösungsmittel einen besonderen Wert. G ist theoretisch (van't Hoff) durch die Schmelztemperatur t und die Schmelzwärme $\varkappa$ (Tab. 16a) des Lösungsmittels gegeben als

$$G = 0{,}00198(273 + t)^2/\varkappa,$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 273^2 : 79{,}9 = 1{,}85$. Aufserdem ist G empirisch bestimmt. Einige Werte sind

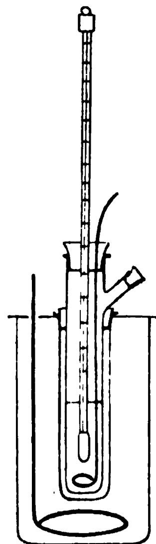
	Wasser	Benzol	Essigsäure	Ameisensäure	Nitrobenzol
theoretisch $G =$	1,85	5,1	3,6	2,7	6,95
empirisch $G =$	1,83	5,1	3,8	2,8	7,07
Gefrierpunkt $\tau =$	0,0°	5,3°	16,5°	8,6°	3°
Schmelzwärme $\varkappa =$	79,9	30	46	57	22

Die Gefrierpunkte des angewandten Lösungsmittels und der Lösung sind mit dem nämlichen Thermometer zu bestimmen, da es auf kleine Differenzen ankommt.

Man kann also Molekulargewichte aus der Gefrierpunktserniedrigung ableiten. Es ist aber zu beachten, daſs viele Körper, worunter insbesondere die Elektrolyte (Salze, Alkalien, Säuren), von diesem Gesetz ausgeschlossen sind. Die wirkliche Erniedrigung τ ist bei wässerigen Lösungen von Elektrolyten gröſser als die aus der Formel mit dem chemischen Molekulargewicht berechnete τ_0. Man erklärt dies durch die Annahme, daſs solche Moleküle in der Lösung zerfallen, „dissociirt" sind (Arrhenius). Den „Dissociationsgrad" (vgl. **16**) berechnet man für eine Spaltung:

in 2 Moleküle als $\frac{\tau}{\tau_0}-1$, in n Moleküle als $\frac{1}{n-1}\left(\frac{\tau}{\tau_0}-1\right)$.

Eine genaue Messung verlangt beträchtliche Vorsichtsmaſsregeln besonders in Wasser als Lösungsmittel. Man bestimmt den Gefrierpunkt durch allmähliche Abkühlung der Lösung, mit einem empfindlichen Thermometer unter stetem Umrühren. Die Temperatur pflegt dabei zunächst ohne Erstarrung unter den Gefrierpunkt zu sinken; beginnt die Ausscheidung, so steigt die Temperatur plötzlich auf den Gefrierpunkt, der nun abgelesen wird.



Das Ausfrieren des Lösungsmittels erhöht die Koncentration der Lösung. Diese Änderung läſst sich aus der dem Gefrieren vorausgegangenen Unterkühlung $\varDelta$ unter den Gefrierpunkt schätzen. Ist $\varkappa$ die Schmelzwärme, c die specifische Wärme des Lösungsmittels, so ist durch das Ausfrieren die Lösung nahe im Verhältnis $1+c\varDelta/\varkappa$ koncentrirter geworden. Dauerte das Ausfrieren bis zur Beobachtung längere Zeit, so wird die Korrektion gröſser. Man kann dann den Gang des allmählichen Niedergangs des Gefrierpunkts noch eine Zeit lang beobachten und auf den ersten Augenblick zurückrechnen.

Die nebengezeichnete Anordnung von Beckmann erleichtert die Messung. Ein innerer Cylinder enthält die durch einen Seiten-

ansatz eingegossene Lösung, einen Rührer und das Thermometer. Von dem Quecksilberfaden des letzteren kann man je nach dem Gefrierpunkt des angewandten Lösungsmittels geeignete Mengen abtrennen (22). Die Erniedrigung wird von der Einstellung des Quecksilberfadens in dem gefrierenden reinen Lösungsmittel gezählt. Die aufzulösende Substanz wird durch den Seitenansatz eingeführt. Jener Cylinder ist durch eine Luftschicht in einem etwas weiteren umgebenden Cylinder von der Kältemischung etc. getrennt, in welche man den weiteren Cylinder einsetzt. Die Temperatur der Kältemischung soll nicht zu weit (3°) unter der Gefriertemperatur liegen, da man die letztere sonst im allgemeinen zu tief, aber wenn sich ein Eiscylinder an den Wänden bildet, auch wohl zu hoch findet.

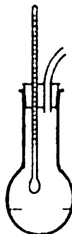
Vgl. u. A. Beckmann, Z. S. f. physik. Chem. 2, 638 u. 715. 1888; über Vorsichtsmafsregeln: Loomis, Wied. Ann. 51, 500. 1894; besonders auch Nernst u. Abegg, über Korrektionen für Körper, bei denen das Ausfrieren langsam stattfindet, Z. S. f. physik. Ch. 15, 681. 1894. Über den Gang der Depression in koncentrirteren Lösungen, Abegg ib. 15. 209.

27. Siedepunkt einer Flüssigkeit.

Siedepunkt nennt man die Temperatur der Dämpfe, welche aus der unter dem Druck von 760 mm Quecksilber von 0° (**20**) siedenden Flüssigkeit aufsteigen.

Über die Thermometer-Korrektion wegen herausragenden Fadens s. 22 E.

Der Siedepunkt mufs von dem zufälligen Barometerstande b (20) auf 760 mm reducirt werden. Liegt bereits eine Tabelle über die Siedepunkts-Änderung mit dem Druck für die Flüssigkeit oder für eine nahe liegende Mischung vor, so korrigirt man hiernach. Andernfalls benutzt man die Erfahrung, dafs die Siedetemperatur vieler Flüssigkeiten um 760 mm herum sich gleich stark ändert, nämlich um 0,038° oder $\frac{3}{80}{}^0$ auf 1 mm Hg, zu einer wahrscheinlichen Korrektion und fügt also zu dem beobachteten Siedepunkt hinzu $\frac{3}{80} \cdot (760 - b)$.



Flüssigkeitsgemische müssen mit Rückflufskühler untersucht werden (7, 27).

Das Thermometer tauche nur in den Dampf der Flüssigkeit, aufser bei Lösungen, in welche es eintauchen mufs. — Gleichmäfsiges Sieden wird durch Stückchen Platinblech befördert, freilich nicht lange; vollkommener wirkt ein durch den Gefäfsboden durchgeschmolzener Platindraht.

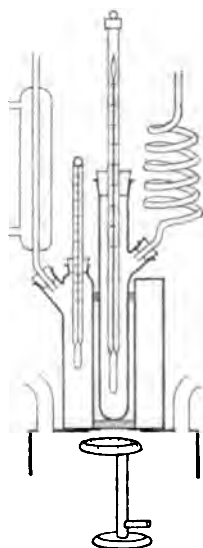
Siedepunkt einer Lösung. Durch Auflösung eines Stoffes, der selbst nicht verdampft, erhöht sich der Siedepunkt des Lösungsmittels, solange die Lösung verdünnt bleibt, proportional der molekularen Koncentration. In 1000 gr des Mittels seien gelöst p gr des Körpers, also $p/M = \mu$ gr-Moleküle, wenn M das Molekulargewicht des Körpers. Dann beträgt die Erhöhung τ des Siedepunkts (Raoult)

$$\tau = S \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \tau = S \cdot p/M.$$

S ist für jedes Lösungsmittel konstant. Es berechnet sich theoretisch (van't Hoff) aus der Siedetemperatur t und der Verdampfungswärme λ des Lösungsmittels (Anh. 7; Tab. 16a)

$$S = 0{,}00198(273 + t)^2/\lambda.$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 373^2 : 536 = 0{,}51$. S läfst sich empirisch bestimmen, indem man einen Stoff auflöst, über dessen Molekulargröfse in dem Lösungsmittel kein Zweifel besteht. Für einige Mittel siehe S in Tab. 16a.



Über den Einflufs der Dissociation, besonders in wässeriger Lösung vgl. S. 123.

Zur Ausführung der Bestimmung wird oft die Anordnung von Beckmann gebraucht. Der Mantel aus Glas oder Porzellan enthält nur Lösungsmittel; das innere Gefäfs eine abgewogene Menge Lösungsmittel, deren Siedepunkt zuerst bestimmt wird. Abgewogene Mengen des Körpers werden mit Pipetten oder in Stücken oder zu Pastillen geprefst durch die Seitenöffnung eingeführt. Der untere Teil des Siedegefäfses enthält Glaskugeln, um das Sieden zu erleichtern und um mit wenig Flüssigkeit auszureichen. Häufig ist ein Platindraht durch den Boden geschmolzen. Das Gefäfs steht auf Asbestpappe, wird auch oben durch einen Asbestring gehalten. Für hochsiedende Flüssigkeiten genügt der spiralige Luftkühler.

Geheizt wird gleichzeitig der Mantel und das Siedegefäfs mit 2 kleinen Bunsenflammen oder einem Ringbrenner. Der nach unten hohle Heizkasten mit Abzugsrohren (höher als gezeichnet) besteht aus Asbest.

Beckmann, Z. S. f. phys. Ch. 8, 223, 1891; 15, 661, 1894; 18, 473. 1895.

27a. Dampfspannung.

Die Dampfspannung eines Körpers wird in der Höhe einer Quecksilbersäule von 0° (**20**, 1) angegeben, welcher die Spannung das Gleichgewicht hält. Unter Dampfspannung schlechtweg versteht man diejenige des gesättigten Dampfes. Um dieselbe sicher zu bekommen, ist ein Überschufs von Flüssigkeit der verdampfenden Substanz anzuwenden.

Man stellt ein Toricelli'sches Vacuum her, indem man ein etwa meterlanges, 10 mm weites, einseitig geschlossenes Glasrohr mit trockenem Quecksilber (**7**, 1) fast ganz füllt, die anhängenden Luftbläschen mittels der an der Rohrwand gleitenden gröfseren Luftblase oder vollkommener durch Auskochen beseitigt und das alsdann ganz gefüllte Rohr mit dem Finger verschlossen in Quecksilber umstürzt. An einer Millimeter-Teilung hinter oder auf dem Rohr oder mit dem Kathetometer (**18a**; **19c**) liest man die Höhe H der Quecksilbersäule ab. Dieselbe mufs dem Barometerstande nahe gleich sein. Man bringt in das Vacuum die luftfreie Substanz im Überschufs, indem man dieselbe unten, eine Flüssigkeit mit einem Spritzchen, einführt und aufsteigen läfst (bei stark verdampfenden Substanzen das Rohr vorher neigen, bis das Quecksilber oben anstöfst, sonst wird das Rohr zertrümmert!).

Besser nimmt man ein Rohr mit einer Verengung und eingeschliffenem Stöpselchen, welches letztere vielleicht aus einem Thermometer besteht. (Fig.) Der Stöpsel wird durch Aufgiefsen von ein wenig Quecksilber gedichtet, ev. auch mit einem Schmiermittel, welches von der Flüssigkeit nicht angegriffen wird, z. B. Fett oder Vaselin. Man giefst die zu untersuchende Flüssigkeit in den Trichter und lüftet den Stöpsel vorsichtig, bis das Quecksilber und so viel Flüssigkeit eingetreten ist, dafs ein Teil unverdampft bleibt, giefst aber alsbald wieder etwas Quecksilber auf.



Die Höhe H' der Quecksilbersäule wird wieder abgelesen. $H - H'$ ist die Dampfspannung des Körpers.

Etwaige Änderungen des Barometerstandes zwischen den beiden Höhenbestimmungen werden an H korrigirt. — Zu H' ist zuzuzählen erstens $h \cdot s/13{,}6$, wo s das specifische Gewicht und h die Höhe der nicht verdampften Flüssigkeit auf dem Quecksilber ist; zweitens in höherer Temperatur die Spannkraft des Quecksilberdampfes selbst nach Tab. 14. — Man liest immer oben am Quecksilbermeniskus ab. Da die Kapillarspannung des Quecksilbers durch den Flüssigkeitstropfen geändert wird und da dieser ebenfalls eine Kapillarspannung besitzt, so verlangen genaue Messungen, besonders bei geringen Spannungen, ein weites Rohr (15 bis 20 mm; vgl. **20**, 3).

Je kleiner das „Vacuum" ist, desto gröfser werden Fehler aus einem Rest Luft. — Vor der Ablesung soll man durch vorübergehendes Tieferstellen oder Neigen des Rohres neue Flüssigkeitsteile an die Oberfläche bringen.

Flüssigkeiten von gröfserem Dampfdruck kann man in dem geschlossenen Schenkel eines aufrecht stehenden Heberrohres untersuchen. Die Dampfspannung ist gleich dem äufseren Luftdruck $\pm$ Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln. Wird in höherer Temperatur beobachtet, so ist die Quecksilberhöhe diesbezüglich zu korrigiren.

Siedeverfahren. Sieden (27) liefert die Temperatur, für welche die Dampfspannung gleich dem äufseren Druck ist. Sieden unter anderem als atmosphärischem Drucke wird durch ein an den Dampfraum angeschlossenes gröfseres Luftvolumen von regulirbarer Dichtigkeit („künstliche Atmosphäre") unter Anwendung eines Rückflufskühlers (7, 27) ermöglicht.

Lösungen. Deren Gesetz (Babo, Wüllner, Raoult) lautet: löst man in einer Flüssigkeit, die selbst die Dampfspannung e hat, einen nicht flüchtigen Stoff, etwa ein Salz, so wird die Spannung vermindert um eine Gröfse $\varepsilon = e \cdot \mu/(\mu + \mu')$, wenn μ und μ' die in einem Quantum der Lösung enthaltene Molekülzahl des gelösten Körpers und des Lösungsmittels bedeuten. D. h. wenn die Lösung die Menge p des Körpers und p' der Flüssigkeit enthält und die entsprechenden Molekulargewichte M und M' heifsen, so ist $\mu = p/M$ und $\mu' = p'/M'$. Die Dampf-

druckerniedrigung von Lösungen kann also ebenfalls zur Ermittelung von Molekulargewichten dienen nach der Regel: es seien p Gewichtsteile eines Körpers in p' Teilen einer Flüssigkeit gelöst. Die Dampfspannung der Flüssigkeit sei e (Tab. 13 bis 14), diejenige der Lösung sei um ε kleiner. Dann verhalten sich die Molekulargewichte

$$\frac{M}{M'} = \frac{p}{p'}\frac{e-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Für koncentrirtere Lösungen entstehen Abweichungen. Ferner gelten für Elektrolyte die Bemerkungen von S. 123.

Siedeverfahren. Die Änderung der Dampfspannung einer Lösung kann man folgendermafsen bestimmen. Man füllt ein „abgekürztes Barometer“ von mindestens 10, besser 15 mm Weite mit Quecksilber, bringt in den geschlossenen Schenkel eine nicht zu kleine Menge der Lösung und hängt das Ganze in einen Raum, der durch einen starken Dampfstrom des siedenden Lösungsmittels geheizt wird. Der Höhenunterschied der Quecksilbersäule in beiden Schenkeln giebt die Änderung der Dampfspannung des Lösungsmittels an. Korrektionen s. S. 127.



Beispiel. Lösung von $p = 20$ g Rohrzucker in $p' = 100$ g Wasser. Unterschied der beiden Quecksilberhöhen $= 7{,}5$ mm, während im geschlossenen Rohr über dem Quecksilber die 17% Zuckerlösung 11 mm hoch stand. Deren spec. Gewicht bei 100° gleich 1 gesetzt, kommen zu den 7,5 mm noch $11/13{,}4 = 0{,}82$ mm hinzu. Es ist also $\varepsilon = 8{,}32$. Der Barometerstand, auf Quecksilber von 100° umgerechnet, war $e = 747$ mm, also ist $M = M'\frac{p}{p'}\frac{e-\varepsilon}{\varepsilon} = 18\,\frac{20}{100}\,\frac{747-8{,}3}{8{,}32} = 320$. In Wirklichkeit $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$.

Über die Benutzung des Siedepunktes der Lösung selbst zur Ermittelung ihrer Dampfdruck-Erniedrigung s. 27.

Über die statischen Methoden vgl. noch z. B. Lehmann, Molekularphysik II. 144. 1889; für Lösungen Dieterici, Wied. Ann. 50, 47. 1893.

28. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie).

Die zu ermittelnden Gröfsen können sein

1. die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft, d. h. das Gewicht des in 1 cbcm Luft enthaltenen Wassers in gr. Weil diese Zahl sehr klein ist, pflegt man sie mit 1000000 multi-

plicirt anzugeben, wodurch man also den Wassergehalt von 1 cbcm Luft in gr ausgedrückt erhält. Diese Gröſse heiſst in der Meteorologie die absolute Feuchtigkeit der Luft; wir bezeichnen sie mit f.

2. Die relative Feuchtigkeit, oder der Sättigungsgrad, d. h. das Verhältnis des wirklich vorhandenen Wassergehaltes zu demjenigen, bei welchem die Luft mit Wasser gesättigt wäre. Diese Gröſse ergiebt sich aus der absoluten Feuchtigkeit f und der Lufttemperatur, zu welcher man aus Tab. 13 das Maximum f_0 des möglichen Wassergehaltes entnimmt, als f/f_0.

3. Die Spannkraft e des Wasserdampfes oder der Dunstdruck.

Wird die Spannkraft in mm Quecksilber gemessen, so hängen Spannkraft e, absolute Feuchtigkeit f und Lufttemperatur t durch die Formeln zusammen

$$e = 0{,}943 \cdot (1 + 0{,}00367 \cdot t) \cdot f, \qquad f = 1{,}060 \cdot \frac{e}{1 + 0{,}00367 \cdot t},$$

so daſs die Bestimmung von t und e oder f immer ausreicht.

Dampfdichte des Wassers $= 0{,}623$; also wiegt 1 cbcm Dampf, da derselbe in gewöhnlicher Temperatur das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz befolgt (15),

$$0{,}623 \cdot \frac{1293}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot \frac{e}{760} = \frac{1{,}060 \cdot e}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \text{ gr.}$$

Bequem für das Gedächtnis ist, daſs (Tab. 13) e in mm und f in g/cbcm einander nahe gleich sind. Auſserdem entfernen sich die Werte in mittlerer Temperatur (von 6 bis 30°) im Falle der Sättigung nicht weit von der in Centigraden ausgedrückten Temperatur selbst.

I. Taupunkt-Hygrometer (Daniell, Regnault).

Man bestimmt den Taupunkt, d. h. die Temperatur τ, bei welcher die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist. In Tab. 13 findet man den zugehörigen Wassergehalt f von 1 cbcm Luft, sowie die Spannkraft e des bei der Temperatur τ gesättigten Wasserdampfes; und zwar ist die so entnommene Spannkraft ohne weiteres die in der Atmosphäre vorhandene. Die Dichtigkeit verlangt eine Korrektion, weil die Luft in der Nähe des Instrumentes abgekühlt und dadurch verdichtet worden ist. Der aus der Tabelle zu τ entnommene Wassergehalt ist also zu

grofs und mufs, da der Dampf sich erfahrungsmäfsig ausdehnt, wie ein permanentes Gas, multiplicirt werden mit

$$\frac{1+0{,}00367\cdot\tau}{1+0{,}00367\cdot t}=\frac{273+\tau}{273+t},$$

wenn t die Lufttemperatur bedeutet.

Man stellt das Instrument so auf, dafs die glänzende Fläche dem Auge volles Himmelslicht oder das Licht einer Kerze spiegelt. Dann läfst man durch Verdampfen von Äther die Temperatur der glänzenden Fläche sinken, bis man eine Trübung bemerkt. Sofort unterbricht man das Verdampfen des Äthers; die Temperatur steigt, und man beobachtet den Stand des Thermometers, bei welchem der Niederschlag zu verschwinden anfängt. Nach einigen orientirenden Versuchen gelingt es leicht, diese beiden Temperaturen einander auf einen kleinen Bruchteil eines Grades zu nähern. Das Mittel aus beiden ist der Taupunkt τ der Luft. Mit dem Regnault'schen Hygrometer sucht man eine solche Regulirung des Wasserabflusses aus dem Aspirator zu bewirken, dafs zeitweilig ein Niederschlag entsteht und verschwindet. — Man sehe darauf, dafs die von dem Körper, vom Atmen u. s. w. herrührende Feuchtigkeit möglichst von der Taufläche entfernt bleibe.

II. August's Psychrometer.

Die atmosphärische Feuchtigkeit wird aus der Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher Wasser in der Luft verdampft, welche Geschwindigkeit wiederum aus der Abkühlung eines befeuchteten Thermometers erkannt wird. Ist nämlich

- t die Lufttemperatur (Temperatur eines trockenen Thermometers),
- t' die Temperatur des feuchten Thermometers,
- e' die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei t', wie dieselbe aus Tab. 13 entnommen wird,
- b der Barometerstand in mm,

so erhält man die wirkliche Dampfspannung e, je nachdem

t' über 0^0 bez. unter 0^0 liegt,

$$e=e'-0{,}00080\cdot b\cdot(t-t')\quad\text{bez.}\quad-0{,}00069\cdot b\cdot(t-t').$$

Aus e berechnet sich die absolute Feuchtigkeit f aus der Formel S. 129).

Obige Konstanten gelten für Beobachtungen in freier, mäfsig bewegter Luft. In ruhender Luft sind gröfsere Zahlen einzusetzen, die für ein geschlossenes kleines Zimmer um 50% steigen können. Man stellt bei Zimmerbeobachtungen durch Bewegung des feuchten Thermometers (Pendelschwingungen) die Bedingungen der Konstante 0,00080 her.

Bei den mancherlei Fehlerquellen, denen diese Bestimmungsweise unterworfen ist, genügt es häufig, für b einen mittleren Barometerstand anzunehmen. Setzt man $b = 750$, so wird

$$e = e' - 0{,}60\,(t - t') \quad \text{bez.} \quad -0{,}52\,(t - t') \text{ unter Null.}$$

Genähert kann man auch f nach der Formel

$$f = f' - 0{,}64\,(t - t')$$

berechnen, worin man für f' den aus Tab. 13 zu t' entnommenen Wert setzt. Stellt man in einem mäfsig grofsen geschlossenen Zimmer Beobachtungen an einem ruhenden Psychrometer an, so wird man die Spannkraft des Wasserdampfes etwa gleich $e' - 0{,}8\,(t - t')$ setzen können.

Beispiel. $t = 19{,}50^0$, $t' = 13{,}42^0$; $b = 739$ mm. Man findet zu t' in Tab. 13 $e' = 11{,}44$ mm. Davon ist abzuziehen $0{,}00080 \cdot 739 \cdot 6{,}08 = 3{,}59$ mm, also ist die Dampfspannung $e = 7{,}85$ mm. Hierzu berechnet sich für $19{,}5^0$ nach S. 129 $f = \frac{1{,}060 \cdot 7{,}85}{1 + 0{,}00367 \cdot 19{,}5} = 7{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cbcm}}$. Die relative Feuchtigkeit ist $7{,}8/16{,}7 = 0{,}47$.

Die genaue Regnault'sche Formel $e = e' - \frac{0{,}480 \cdot b(t - t')}{610 - t'}$, bez. unter Null 689 statt 610, giebt nur in besonders hohen Temperaturen merklich andere Werte als unser Ausdruck.

Aspirations-Psychrometer (Afsmann). Temperaturbeobachtungen der Luft werden durch Strahlung gefährdet, besonders im Freien. Deswegen sind die Thermometerkugeln hier von einem polirten doppelten Metallschutzrohr umgeben, durch welches mittels eines Uhrwerk-Ventilators ein Luftstrom mit etwa 2m/sec Geschwindigkeit gesaugt wird. Man berechnet $e = e' - 0{,}00066 \cdot b(t - t')$. Auch für nicht meteorologische Zwecke kann die Anwendung eines Thermometers mit Ventilation wertvoll sein.

Afsmann, Z. S. f. Instr. 1892, 1.

III. Absorptionshygrometer. Ganz direkt verfährt man, wenn man ein gemessenes Volumen der Luft durch eine mit

9*

Stückchen Chlorcalcium, oder Bimsstein mit koncentrirter Schwefelsäure, oder wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre saugt und die durch die Absorption des Wassers eintretende Gewichtszunahme bestimmt.

IV. Hygroskopische Körper. Deren Gestalt (Krümmung, Länge, Torsion) hängt von der Luftfeuchtigkeit ab. Die Graduirung der Skale, welche die relative Feuchtigkeit in Procenten anzugeben pflegt, geschieht empirisch. Von Zeit zu Zeit wird der Sättigungspunkt des Instrumentes in einem mit Wasserdampf ganz gesättigten Raume geprüft. Bei der Aufbewahrung in feuchter Umgebung sollen die Instrumente sich besser konstant halten, als in trockener.

29. Specifische Wärme, Mischungsverfahren. Wasser-Kalorimeter.

Einheit der Wärmemenge oder Kalorie. Als solche pflegt man die Wärmemenge zu setzen, welche die Masseneinheit Wasser (1 g oder 1 kg; Gramm- oder Kilogramm-Kalorie) um 1° erwärmt. Diese Menge hängt aber von der Temperatur selbst ab. Lange Zeit ist nach dem Vorgang von Regnault in seinen grundlegenden Arbeiten als Norm die Erwärmung des Wassers von 0° auf 1° angenommen. Mifst man nun wie gewöhnlich mit Wasser von Zimmertemperatur, so mufs man also die gefundenen Zahlen auf die Wärmekapacität des Wassers zwischen 0 und 1° umrechnen. Nun ist aber das hierfür nach Regnault angenommene Verhältnis durch spätere Untersuchungen ganz zweifelhaft geworden.

Daher sind verschiedene andere Vorschläge gemacht worden und gegenwärtig werden folgende Einheiten gebraucht:

1. Die Wasser-Kalorie von 0 auf 1°.

2. Die Wasser-Kalorie etwa von 15 auf 16°, bequem deswegen, weil das Mischungsverfahren mit Wasser von Zimmertemperatur zu arbeiten pflegt.

3. Die mittlere Kalorie, der 100te Teil der Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser von 0 auf 100° erwärmt. Auf die letztere kann man nämlich das Eisschmelzungsverfahren am bequemsten zurückführen, welches zur Zeit wohl am genauesten arbeitet.

4. Eis-Kalorie. Man kann die Erwärmung des Wassers als Grundlage fallen lassen und direkt die zum Schmelzen der Masseneinheit Eis notwendige Wärmemenge als Eis-Kalorie einführen. Diese ist = 79,9 mittleren Kalorien.

5. Von allen Annahmen wird der Gebrauch des Eis-Kalorimeters frei, wenn man als Einheit diejenige Wärmemenge nimmt, welche so viel Eis schmilzt, daſs durch die Volumverminderung 1 g Quecksilber von 0^0 in das Kalorimeter eintritt. Diese Kalorie würde 64,8 mittlere Wasser-Grammkalorien enthalten (**31**).

6. Mechanische Kalorie. Die wissenschaftliche Einheit würde diejenige Wärmemenge sein, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist. Die letztere ist in dem absoluten cm-g-sec-System die Arbeit, welche 1 g an einem Orte, wo die Schwerbeschleunigung = 1 cm/sec^2 wäre, um 1 cm hebt. Diese absolute mechanische Kalorie würde nahe gleich dem 42000000ten Teile der mittleren Wasser-Grammkalorie sein. (Vgl. Anh. 7.)

Nr. 1, 2, 3 sind die praktisch gebräuchlichsten Kalorien. Ihr Gröſsenverhältnis zu einander läſst sich zur Zeit nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit angeben. Aus den unten für verschiedene Temperaturen angegebenen spec. Wärmen des Wassers[1]),

1) Die Beobachtungen von Baumgartner und Münchhausen sind von Pfaundler und Wüllner berechnet. Aus den Beobachtungen Regnaults hat Bosscha die abgeänderten Zahlen gefolgert. Dieterici stützt sich auf Rowlands Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalents. Die spec. Wärme des Wassers wäre

nach bei	0	10	20	30	40	60	80	100°	
Regnault	1,0000	1,0005	1,0012	1,0020	1,003	1,006	1,009	1,013	Pogg. Ann. 79, 254
Bosscha	1,0000	1,0022	1,0044	1,0066	1,009	1,013	1,018	1,022	„ Jub. 549
Baumgartner	1,0000	1,0031	1,0062	1,0092				1,031	Wied. Ann. 8, 652
Henrichsen	1,0000	1,0036	1,0079	1,0131	1,019	1,033	1,051	1,072	„ 8, 91
Münchhausen	(1,0000)		1,0085	1,0127	1,017	1,025			„ 10, 289
Rapp	1,0000	0,986	0,979	0,974	0,972	0,981	1,006	1,050	Diss. Zürich 1883
Velten	1,0000	0,988	0,979	0,975	0,978	0,975	0,980	0,985	Wied. Ann. 21, 47
Dieterici	1,0000	0,9943	0,9893	0,9872	0,993	1,006	1,018	1,031	„ 33, 441
Bartoli und Stracciati	1,0000	0,9949	0,9928	0,9952					Catania 1892
Johanson	1,0000	1,001	1,017	1,029	1,039				Beibl. 1892. 508
Griffiths	(1,000)	0,997	0,995	0,993					„ 1894. 322
Lüdin	1,0000	0,9942	0,9916	0,9915	0,998	0,999	1,005	1,003	Diss. Zürich 1895

Bei Lüdin s. eine Litteratur-Zusammenstellung und Kurven für den Gang der spec. Wärme des Wassers.

bezogen auf diejenige bei 0° als Einheit, würde man folgern, dafs die spec. Wärme des Wassers von 0° bis 20° oder 30° ein wenig abnimmt, dann bis 100° allmählich steigt. Nach den Zahlen würde man unter Bevorzugung der neueren Bestimmungen vorläufig die Wasser-0°-Kalorie Nr. 1 etwa um $^1/_2$% gröfser annehmen dürfen als die Wasser-Zimmertemperatur-Kalorie Nr. 2 und ungefähr gleich der mittleren Kalorie von 0 bis 100°.

Specifische Wärme eines Körpers ist die Wärmemenge oder Anzahl von Kalorien, welche seine Masseneinheit (gr oder kg, je nach der Definition der Kalorie) um 1° erwärmt. Da die Wärmekapacität der Körper nicht ganz konstant ist, sondern im allgemeinen mit der Temperatur mehr oder weniger zu wachsen pflegt, so mufs die Temperatur angegeben sein, für welche die Zahl gilt. Bei dem Mischungsverfahren mifst man gewöhnlich die Wärmeabgabe zwischen 100° und 16°. Dann wird also die mittlere spec. Wärme zwischen diesen Temperaturen gefunden.

Das Produkt aus spec. Wärme und Atom- bez. Molekulargewicht eines Körpers heifst seine Atom- bez. Molekularwärme. Die Atomwärme der festen Elemente ist, mit gröfseren Abweichungen z. B. für C, B, Si, ungefähr $=6{,}3$.

I. Feste Körper.

Der zu untersuchende Körper wird gewogen, auf eine gemessene Temperatur T erwärmt und mit einer gewogenen Wassermenge von der Temperatur t gemischt. τ sei die gemeinschaftliche Endtemperatur des Körpers und des Wassers. Ist dabei

M das Gewicht des Körpers,

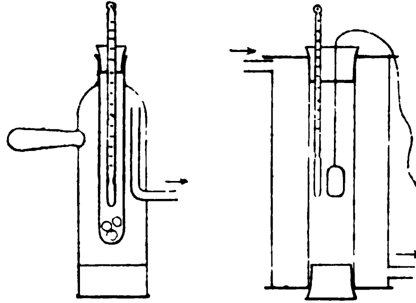
m das Gewicht des Wassers, vermehrt um den Wasserwert der übrigen Teile des Kalorimeters (siehe unten),

so findet sich die mittlere specifische Wärme C des Körpers zwischen τ und T aus der Formel

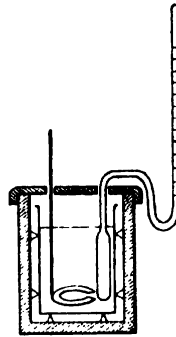
$$C = \frac{m}{M}\frac{\tau - t}{T - \tau}.$$

Denn $m(\tau - t)$ ist die Wärmemenge, welche das Wasser bekommt; $CM(T - \tau)$ ist die Menge, welche der Körper abgiebt, und beide Mengen sind identisch.

Die anfängliche Erwärmung des Körpers wird in einem durch siedendes Wasser oder durch Dämpfe von siedendem Wasser äufserlich geheizten, gegen Luftwechsel sorgfältig geschützten Raume (nach Regnault, Neumann, Pfaundler) hervorgebracht und mufs fortgesetzt werden, bis das darin befindliche Thermometer eine stationäre Temperatur anzeigt. Der erhitzte Körper wird nach Entfernung des Verschlusses aus dem ersten Apparat durch Umkehren, aus dem zweiten durch Herablassen am Faden rasch in das Wasser des Kalorimeters gebracht.



Kalorimeter. Das Gefäfs besteht aus polirtem, thunlichst dünnem Blech (Messing, Silber) und steht auf einer die Wärme schlecht leitenden Unterlage, etwa Korkschneiden oder gekreuzten Fäden, in einer Schutzhülle. Ein Deckel ist zweckmäfsig, um Verdunstungsfehler zu vermeiden. Während der Beobachtung wird gerührt. Über Thermometer-Korrektion s. S. 110.



Ist Wasser nicht anwendbar, so nimmt man eine andere Flüssigkeit (z. B. Terpentinöl, Anilin, Toluol) von bekannter specifischer Wärme (Tab. 16), mit welcher die Menge multiplicirt wird.

Wasserwerte. Die Wärmemenge, welche einen Körper um 1° erwärmt, heifst sein Wasserwert. Derselbe ist gleich seiner Masse, multiplicirt mit der specifischen Wärme. Zu der Masse des Wassers im Kalorimeter ist zu addiren der Wasserwert des Gefäfses, des Rührers und des Thermometers. Die ersteren beiden werden berechnet (Tab. 16).

Der Wasserwert des Thermometers wird empirisch bestimmt. Man erwärmt dasselbe etwa durch Eintauchen in erhitztes Quecksilber oder auch über der Flamme, um beiläufig 30°, taucht es rasch in eine gewogene, kleine Wassermenge und beobachtet deren Temperaturerhöhung. Diese, multiplicirt mit

der Masse des Wassers, dividirt durch die Temperaturabnahme des Thermometers, giebt dessen Wasserwert.

Oft wird es genügen, den Wasserwert des Thermometers aus dem Volumen v ccm des eintauchenden Teiles des Thermometers als $0{,}46 . v$ zu berechnen (Pfaundler). 1 ccm Quecksilber hat nämlich den Wasserwert (Tab. 1 u. 16) $13{,}6 \cdot 0{,}034 = 0{,}46$, und 1 ccm Glas hat zufällig nahe denselben Wert, nämlich $2{,}5 \cdot 0{,}19 = 0{,}47$. Man bestimmt v durch Einsenken in ein kalibrirtes Rohr oder ein Überlaufgefäfs.

Für m ist dann in obiger Formel einzusetzen die Summe der so ein für allemal bestimmten Wasserwerte der festen Teile des Kalorimeters, vermehrt um das Nettogewicht des zur Füllung gebrauchten Wassers.

Wärmeverluste. Der unvermeidliche Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung wird nach Rumford dadurch eliminirt, dafs man die Anfangstemperatur t um ungefähr ebensoviel tiefer als die Zimmertemperatur nimmt, wie die Schlufstemperatur τ höher sein wird. Die zu erwartende Temperaturerhöhung kann durch einen Vorversuch, oder wenn die spec. Wärme ungefähr bekannt ist, durch Rechnung näherungsweise bestimmt werden. Damit dieser Kunstgriff wenigstens angenähert genüge, dürfen die Temperaturänderungen im Kalorimeter eine mäfsige Gröfse (5^0) nicht übersteigen. Auch mufs die Zeit, welche zum Übergang der Wärme aus dem Körper in das Wasser nötig ist, klein sein, weswegen man den Körper, besonders wenn derselbe die Wärme nicht gut leitet, in kleinen Stücken anwendet, die etwa auf einen Faden aufgezogen oder in ein Körbchen gefüllt werden, dessen Wasserwert einfach in Rechnung gesetzt wird.

Einwurfsfreier verfährt man so: Die Anfangstemperatur t des Kalorimeters sei so tief, dafs die Endtemperatur τ auch noch ein wenig unter derjenigen der Umgebung bleibt. Dann beobachtet man also immer mit steigendem Thermometer, was an sich zuverlässiger ist und wobei der „tote Gang“ sich heraushebt. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dafs man nun die Beobachtung der Endtemperatur τ länger fortsetzen und sich überzeugen kann, dafs nicht noch Wärme im Körper steckt. Das ganze Verfahren ist dann das folgende.

5 bis 10 min lang vor dem Einbringen des heifsen Körpers beobachtet man das Thermometer etwa alle Minuten und leitet daraus und aus der Lufttemperatur den Temperaturgewinn per Minute und Grad Temperaturüberschufs der Umgebung ab. Das Einbringen des Körpers geschieht nach der Uhr, und man beobachtet nun das steigende Thermometer etwa von 20 zu 20 sec. Hieraus wird der zu korrigirende Temperaturgewinn so berechnet, wie das Beispiel angiebt. Während der ganzen Zeit wird gleichmäfsig gerührt.

Ist das Kalorimeter offen, so geht durch Verdunstung etwas Wärme verloren, wodurch das Verfahren einer Ergänzung durch Beobachtung des Temperaturganges nach der Erwärmung bedürftig wird. Ausführliche Anweisungen über die Verbesserungen der Resultate wegen Wärmeverlust siehe z. B. Müller-Pfaundler Physik II, S. 297; Wüllner Exp.-Physik II, 5. Aufl. S. 453, 1896.

Beispiel. 1. Wasserwert des Gefäfses und des Rührers. Beide Teile waren von Messing und wogen zusammen $\mu = 19$ g. Die specifische Wärme des Messings ist $\gamma = 0{,}094$, also der Wasserwert $\mu\gamma = 19 \cdot 0{,}094 = 1{,}8$ g.

2. Wasserwert des Thermometers. Das Thermometer wurde auf 45° erwärmt und in ein kleines Gefäfs mit 20 g Wasser von der Temperatur 16,25° gebracht. Diese Temperatur stieg dadurch auf 17,10°. Der Wasserwert beträgt also $20 \cdot (17{,}10 - 16{,}25)/(45 - 17{,}1) = 0{,}6$ g.

3. Der zu bestimmende Körper wog $M = 48{,}3$ g.
Die Wassermenge wog netto 74,0 g, also $m = 74{,}0 + 1{,}8 + 0{,}6 = 76{,}4$ g.
Die Temperatur des erhitzten Körpers $T = 99{,}7°$.
Die Anfangstemperatur des Wassers $t = 12{,}05°$.
Die gemeinschaftliche Endtemperatur $\tau = 17{,}46°$.

Hieraus würde man finden $C = \frac{76{,}4}{48{,}3} \cdot \frac{17{,}46 - 12{,}05}{99{,}7 - 17{,}46} = 0{,}1041$.

4. Korrektion wegen Wärmeaustauschs. Umgebungstemp. = 18,0°.

Vorher	Uhr	25 min	26	27	28	29	30 min	Mittel
	Kalorimeter	11,54°	11,65	11,75	11,88	11,96	12,05	11,80°.

Auf 30 min 0 sec wurde der heifse Körper eingebracht und nun beobachtet:

Uhr	**30′**	20″	40″	**31′**	20″	40″	**32′**	20″	40″	**33′**
Therm.	12,05°	14,7	15,9	16,8	17,2	17,3	17,4	17,44	17,45	17,46°.

In der Vorperiode war die Mitteltemperatur 11,8° um 6,2° unter der Umgebungstemperatur. Dabei stieg das Thermometer in 5 min um 12,05 — 11,54 = 0,51°. Folglich beträgt der Temperatur-Gewinn pro Grad Überschufs $0{,}51/(5 \cdot 6{,}2) = 0{,}0164°$/min.

Nachher war in der	1ten	2ten	3ten Minute
die Mitteltemperatur	= 14,9	17,2	17,4°
unter der Umgebung um Θ =	3,1	0,8	0,6°
Also Temp.-Gewinn $0{,}0164 \cdot \Theta$ =	0,051	0,013	0,010, zusammen 0,07°.

Das beobachtete $\tau = 17{,}46^0$ ist also um $-0{,}07^0$ zu korrigiren, giebt τ korrig. $= 17{,}39^0$, und hiermit aus obiger Formel C korrig. $= 0{,}1027$.

Die Mitteltemperatur für die Korrektion kann ebensogut gleich aus allen Beobachtungen genommen werden. Bei sehr genauen Bestimmungen stellt man den Gang der Temperatur graphisch dar und entnimmt daraus die Temperaturen etwa für 5 15 25 sec etc.

II. Flüssigkeiten.

1. Die specifische Wärme einer Flüssigkeit läſst sich gerade wie oben ermitteln, wenn man die Flüssigkeit in ein Gefäſs eingeschlossen hat, sie mit demselben erhitzt und in ein Wasserkalorimeter einsenkt. Der Wasserwert des Gefäſses wird in Rechnung gesetzt.

2. Verfügt man über eine gröſsere Flüssigkeitsmenge, so füllt man mit ihr das Kalorimeter, erhitzt einen gewogenen, die Wärme leicht abgebenden Körper (Körbchen mit Kupferstücken) von bereits bekannter specifischer Wärme und verfährt wie oben. Bedeuten

M, T, C Gewicht, Temperatur und specifische Wärme des erhitzten Körpers,
t die Anfangstemperatur der Flüssigkeit,
τ die Endtemperatur,
m das Nettogewicht der Flüssigkeit,
w den Wasserwert der festen Teile des Kalorimeters,

so ist die gesuchte specifische Wärme c der Flüssigkeit, und zwar die mittlere zwischen t und τ,

$$c = C\frac{M}{m}\frac{T-\tau}{\tau-t} - \frac{w}{m}.$$

3. Als Erhitzungskörper kann bequem eine Glaskugel mit einigen 100 g Quecksilber dienen, welche ein enges Steigrohr mit einer hoch (80^0) und einer niedrig gelegenen (25^0) Marke hat. Man erhitzt im Quecksilberbade oder vorsichtig über der Flamme bis über die höhere Marke, läſst dann abkühlen und senkt im Augenblick der Einstellung auf diese Marke den Erhitzungskörper in die Flüssigkeit ein. Wenn, unter Umrühren, die niedrige Marke erreicht ist, hebt man den Körper heraus und beobachtet nun wieder die Temperatur der Flüssigkeit. (Andrews; Marignac; Pfaundler.)

m, w, t, τ mögen die obigen Bedeutungen behalten; ein

gleicher Versuch, bei welchem man denselben Erhitzungskörper in eine Wassermenge m' in demselben Gefäfs bringt, ergebe die Erwärmung des Wassers von t' auf τ', dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{m}\left[(m' + w)\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w\right].$$

Denn es ist $(cm + w)(\tau - t) = (m' + w)(\tau' - t')$.

29a. Specifische Wärme. Galvanische Methode (Pfaundler).

Zwei Flüssigkeitsmengen werden in gleichen Gefäfsen durch denselben elektrischen Strom (63) erwärmt, welcher gleiche Widerstände aus Platin- oder besser Platin-Silberdraht in den Flüssigkeiten durchfliefst. Zweckmäfsig wählt man die beiden Mengen so, dafs die zu erwartenden Temperaturzunahmen ungefähr gleich sind. Man nehme dann die Anfangstemperaturen um ebensoviel niedriger als die Zimmertemperatur, wie die Schlufstemperaturen höher sein werden. Hierdurch wird die Wärmeabgabe während des Versuchs sowie die Änderung des Drahtwiderstandes durch die Temperatur einigermafsen eliminirt.

Die Flüssigkeitsmenge m samt dem Wasserwert w ihres Gefäfses und Thermometers erwärme sich von t auf τ, die andere Menge m' samt zugehörigem Wasserwert w' der festen Teile von t' auf τ', dann ist $(cm + w):(c'm' + w') = (\tau' - t'):(\tau - t)$, also

$$c = \frac{1}{m}\left[(c'm' + w')\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w\right].$$

c' wird $= 1$, wenn die Flüssigkeit m' Wasser ist.

Etwaige Ungleichheiten der beiderseitigen Verhältnisse eliminiren sich am einfachsten durch Vertauschen der Flüssigkeiten und Mittelnehmen aus den beiden gefundenen Resultaten.

Fehlerquellen sind darin gegeben, dafs die Temperatur der Drähte, also auch ihr Widerstand, durch verschieden rasche Wärmeabgabe verschieden sein kann und dafs ein Teil des Stromes von dem Drahte ab durch die Flüssigkeit gehen könnte. Reines Wasser leitet sehr wenig; ein Abfliefsen des Stromes ist nicht zu fürchten, wenn die Spannung im Drahte unter 2 Volt bleibt (63 I). Man nehme die Widerstände nicht zu grofs. In leitenden Flüssigkeiten können Glasspiralen mit Quecksilber gebraucht werden. Das Widerstandsverhältnis R/R' der beiden Drähte läfst sich während des Versuches durch Abzweigung

(**71** II und **71a**) ermitteln, oder auch indem die Drähte als Zweige einer Wheatstone'schen Brücke (**71b**) angeordnet werden. Man hat dann $(\tau'-t')/(\tau-t)$ mit R/R' zu multipliciren.

Vgl. Müller-Pfaundler Lehrbuch der Physik, 8. Aufl. II. 2. S. 311. Pfaundler, Wien. Sitz. Ber. 1891. 352.

30. Specifische Wärme. Erkaltungsmethode. (Dulong u. Petit.)

Man vergleicht die Zeiten, in denen Körper unter denselben Umständen sich um gleichviel abkühlen. Höchstens bei Flüssigkeiten oder bei gut leitenden festen Körpern können brauchbare Resultate entstehen.

Ein kleines erwärmtes Gefäfs aus dünnem polirtem Metall mit einem Thermometer und der eingegossenen oder gepulvert fest eingestampften Substanz kühlt sich in einem luftleeren Metall-Behälter ab. Die Umgebung ist durch eine gröfsere Wassermenge oder schmelzendes Eis auf konstanter Temperatur erhalten. Beträchtliche Mengen Flüssigkeit kann man auch in einem geschlossenen Metallgefäfse in der Luft beobachten.

Es sei der Gang des Temperatur-Überschusses über die Umgebung bei der Füllung mit zwei verschiedenen Substanzen beobachtet worden. m und M seien die eingefüllten Mengen, M etwa Wasser, also $C=1$, w der Wasserwert des Gefäfses mit dem Thermometer (S. 135), z und Z die Abkühlungszeiten von demselben Anfangs- zu demselben Endüberschufs, am besten der erste Überschufs 2 bis 3mal so grofs als der letzte, c und C die beiden specifischen Wärmen, so gilt $(mc+w):(MC+w)=z:Z$, also

$$c=1/m\cdot[(MC+w)\,z/Z-w].$$

Die erste Zeit nach der Erwärmung läfst man vor der Beobachtung verstreichen. Am besten werden jedesmal die Temperaturen von etwa 20 zu 20 sec notirt, mit der Zeit als Abscisse, der Temperatur als Ordinate in einer Kurve dargestellt, und daraus die Zeiten entnommen, welche gleichen Anfangs- und Endwerten entsprechen. Aus einem Paare von Beobachtungsreihen läfst sich so eine Anzahl von Bestimmungen ableiten, aus denen ein Mittel genommen wird. Siehe auch **3** III.

Man kann auch in zwei möglichst kongruenten Gefäfsen beide Versuche gleichzeitig ausführen. Wiederholt man sie noch

unter Auswechselung der Flüssigkeiten und nimmt die Mittel der erhaltenen Zeiträume für jede Flüssigkeit, so wird die Ungleichheit der Gefäfse eliminirt.

31. Specifische Wärme. Eis-Kalorimeter.

Altes Verfahren. (Lavoisier und Laplace.) Man bringt den auf die Temperatur t erwärmten Körper vom Gewicht m in trockenes Eis von 0^0, welches sich selbst in einer Umgebung von schmelzendem Eise befindet. Wird durch den Körper das Gewicht M geschmolzen, so ist seine specifische Wärme, in mittleren Wasserkalorien (S. 132) gemessen,

$$c = \frac{M}{m} \frac{79{,}9}{t}.$$

79,9 Kal. beträgt die Schmelzwärme der Masseneinheit Eis.

Um die geschmolzene Menge einigermafsen genau zu bestimmen, sind wegen der Adhäsion des Wassers am Eise grofse Mengen des Körpers nötig.

Für eine genäherte Bestimmung dient auch ein Eisstück von ebener Oberfläche mit einer Höhlung, in welche der erhitzte Körper eingelegt wird. Während dessen Abkühlung bedeckt man die Platte mit einem ebenen Eisdeckel. Nachher wird das geschmolzene Wasser mit einem kalten Schwämmchen ausgetupft und gewogen. (Black.)

Eiskalorimeter von Bunsen.

Hier wird die geschmolzene Menge aus der Volumen-Abnahme bestimmt, welche beim Schmelzen des Eises eintritt. Einer Kontraktion um v ccm entspricht nämlich die Schmelzung von $v \cdot 11{,}03$ g Eis. Ist v dadurch bewirkt, dafs m g eines Körpers sich von t auf 0^0 abkühlen, so ist also die spec. Wärme des Körpers

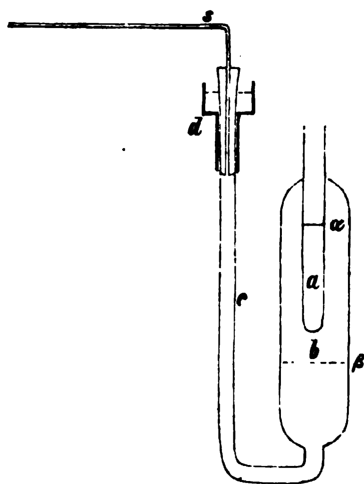
$$c = \frac{v}{m} \frac{11{,}03 \cdot 79{,}9}{t} = \frac{v}{m} \frac{881}{t}.$$

1 g Eis hat nach Bunsen das Volumen 1,0908 cbcm, dagegen 1 g Wasser von 0^0 1,0001 cbcm. Wenn das Volumen sich um 1 cm^3 vermindert, so ist also eine Eismenge $1/0{,}0907 = 11{,}03$ g geschmolzen.

Das Bunsen'sche Kalorimeter besteht aus den aus Glas zusammengeblasenen Teilen a, b und c; d ist ein aufgekitteter eiserner Aufsatz. b, c und d sind bis zu den punktirten Linien mit ausgekochtem Quecksilber gefüllt. Über letzterem befindet

sich in b ausgekochtes Wasser; das Eis in demselben wird vor dem Versuche mittels einer in a eingefüllten Kältemischung gebildet.

Zum Gebrauch wird das Instrument an d in einem Halter befestigt, mit reinem schmelzendem Eis oder Schnee umgeben, und das kalibrirte Skalenrohr s durch einen in d eingesetzten langen Kork eingedrückt, bis das Quecksilber hinreichend weit über der Teilung steht. Noch besser ist ein doppelt durchbohrter Glashahn, an dessen Spitze das Meſsrohr angeschmolzen ist, unter einem kleinen Behälter mit Quecksilber. Nachdem das Gefäſs a bis α mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt worden ist, welche den zu untersuchenden Körper nicht auflöst, erhitzt man denselben (Fig. zu 29), läſst ihn in a hineinfallen (wobei ein Baumwollenpfropf auf dem Grunde des Probirröhrchens dessen Beschädigung verhindert) und verschlieſst a mit einem Kork. Das Quecksilber in s geht zurück und nimmt einen stationären Stand ein. Beträgt das Sinken e Skalenteile und ist das Volumen eines Teiles $= A$, so ist $v = A \cdot e$.



Kalibrirung des Rohres. Man erhält A, indem man das Gewicht μ gr eines Quecksilberfadens bestimmt, der n Skalenteile einnimmt. Wenn τ die Temperatur bei dieser Messung, so ist (19) $A = \mu(1 + 0{,}00018\tau)/(n \cdot 13{,}596)$ cm^3. Setzt man nun $v = Ae$ in die Gleichung für c ein und schreibt

$$13{,}596/881 = 0{,}01544,$$

so findet man den Wärmewert K eines Skalenteils in gr-Kalorien

$$K = \frac{\mu}{n} \frac{1 + 0{,}00018\tau}{0{,}01544} \text{ und dann einfach } c = K \frac{e}{mt}.$$

Empirische Bestimmung von K. Ein leichtes Glaskügelchen (0,5 bis 1 cbcm), bis auf einen kleinen Ausdehnungsraum mit einer gewogenen Wassermenge gefüllt, mit etwas Platin beschwert, wird zur Temperatur t erhitzt (S. 135) und

eingebracht. w sei die Summe der Wasserwerte (über Glas s. 7, 5), e' die erfolgende Skalenverschiebung, dann ist $K = wt/e'$.

Wägungsverfahren. Anstatt den Quecksilberfaden im Rohre abzulesen, taucht man das ganz gefüllte, geeignet gebogene Rohr in ein Gefäfs mit Quecksilber ein und bestimmt die bei dem Einbringen des warmen Körpers eingesaugte Quecksilbermenge durch Differenzwägung des Gefäfses. 0,01544 g Quecksilber entsprechen der Gramm-Kalorie.

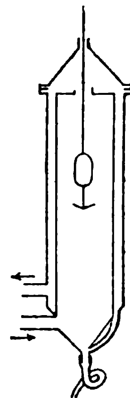
Geringe Verunreinigungen des Schnees oder Eises, womit das Kalorimeter umhüllt ist, genügen, um den Quecksilberstand allmählich zu verschieben. Man beobachtet die Bewegung und setzt dieselbe für die Beobachtungszeit in Rechnung.

Oder man setzt durch Probiren mittels Druckvermehrung, indem man die Mündung des Quecksilbers hebt, den Gefrierpunkt des inneren Wassers so weit herunter, dafs das Wandern des Fadens aufhört (Dieterici). Das angesetzte Kapillarrohr ist zu diesem Zwecke zweimal gebogen, so dafs man den vorderen horizontalen Teil mit der Ableseskale oder die Mündung mit dem Gefäfs höher oder tiefer stellen kann.

Vgl. Bunsen, Pogg. Ann. 141, 1. 1870; Dieterici, Wied. Ann. 33, 418. 1888; 38, 1. 1889; Schuller und Wartha ib. 2, 359. 1877, wo auch über die Bestimmung chemischer Verbindungswärmen gehandelt wird.

31a. Specifische Wärme. Dampf-Kalorimeter (Joly; Bunsen).

Der Körper m befindet sich, an einer Wage mit einem feinen Drahte aufgehangen, in einem Raum, in welchen man plötzlich durch ein weites Rohr Dämpfe von siedendem Wasser einleitet. Die auf dem Körper kondensirte Wassermenge w wird gewogen. Der Masseneinheit entsprechen 536 Kalorien. Die specifische Wärme ist also, wenn der Körper die Anfangstemperatur t_0 hatte und T die Temperatur des Wasserdampfs ist (Tab. 13a),



$$c = \frac{w}{m} \frac{536}{T - t_0}.$$

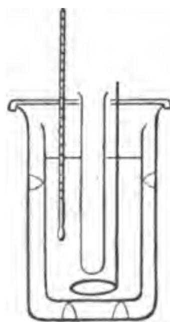
Der neben dem Aufhängedraht entweichende Dampf wird durch die Wasserluftpumpe oder einen erwärmten Schornstein mittels eines Rohres von der

mit einem durchbohrten Gipspfropf ausgekleideten Öffnung abgesaugt. Gegen Abtropfen von Wasser schützt ein unten an dem Körper befestigtes dünnes Platinblech, dessen eigener Wasserwert von *mc* abgerechnet wird (**29**; Tab. 16). Vor der Wägung wird der Dampfstrom gemäfsigt, welcher sonst das scheinbare Gewicht beeinträchtigt.

Die Methode mufs mit grofser Umsicht gehandhabt werden, scheint dann aber sehr genaue Werte liefern zu können. — Vgl. Joly, Proceed. Roy. Soc. 41, 352. 1886; 47, 218. 1889; Bunsen, Wied. Ann. 31, 1. 1887.

31b. Thermochemische Messungen.

Zur Bestimmung der Wärmetönung bei chemischen Vorgängen eignet sich oft das Eiskalorimeter, in welchem man die auf 0° vorgekühlten Körper den chemischen Procefs vollziehen läfst. Ein einfacherer Apparat ist z. B. der folgende (Nernst). Innerhalb eines weiteren Glases ruht auf Korkschneiden ein gegen ein Liter fassendes Becherglas. Durch einen Holzdeckel gehen ein empfindliches Thermometer, ein Rührer und ein dünnwandiges Reagirglas, in welchem die Reaktion vor sich geht. Will man Verdünnungs- oder Lösungswärmen messen, so kommt die Substanz, eventuell fein gepulvert, in den Reagircylinder, dessen Boden nach erfolgtem Temperaturausgleich durchstofsen wird. Man operirt mit kleinen Temperaturänderungen.



Aus den letzteren wird die entwickelte Wärmemenge in folgender Weise berechnet (**29** I). Die Flüssigkeitsmenge m im Becherglas habe die spec. Wärme c, der eingebrachte Körper m' habe c'; die Summe der Wasserwerte von Becherglas, Reagirglas, Rührer und Thermometer sei $= w$ (S. 135), die Temperatur steige von t auf τ, dann beträgt die entwickelte Wärmemenge $(cm + c'm' + w)(\tau - t)$. Vorsichtsmafsregeln und Korrektionen wegen Wärmeaustausch treten ebenso herein wie S. 136.

Nernst, Theor. Chemie p. 468. 1893.

A b s o r p t i o n s w ä r m e n von Gasen bestimmt man im Princip ähnlich wie oben, aber anstatt im Becherglase in einem Glaskolben, ähnlich der Spritzflasche, durch welchen das

Gas in die Flüssigkeit tritt. Die Gasmenge kann durch Volummessung, durch Wägung der Flasche vor und nach dem Versuch auf einer empfindlichen Wage, oder durch chemische Analyse bestimmt werden.

Schmelzwärme. Eine geschmolzene Menge m des Körpers von der Temperatur t werde in das Eiskalorimeter (**31**) gebracht. Der Schmelzpunkt sei $= \tau$ (gröfser als Null), die spec. Wärmen im flüssigen und festen Zustand seien bekannt gleich c und c'. Die geschmolzene Menge Eis sei $= M$. Die Schmelzwärme ist dann $\varkappa = 79{,}9\,M/m \;- ct + (c - c')\tau$. Liegt der Schmelzpunkt unter 0°, so kann man den Körper fest in das Eiskalorimeter einführen und ähnlich rechnen.

Statt $79{,}9\,M$ kann man setzen $881\,v$, wenn v die Volumänderung durch das Schmelzen bedeutet (**31**).

Verdampfungswärme. Eine Dampfmenge m von der Siedetemperatur t schmelze bei ihrer Kondensation und Abkühlung auf 0° die Eismenge M. Die specifische Wärme der Flüssigkeit sei $= c$. Dann berechnet sich die Dampfwärme $\lambda = 79{,}9\,M/m \;- ct$. Die Verdichtung des Dampfes geschieht in einem Schlangenrohr mit einem kleinen Kühlgefäfs am Ende. Die Messung ist grofsen Fehlerquellen unterworfen.

Über einen kleinen Dampfwärmemesser mit Wasserkalorimeter s. Berthelot, Thermochem. Mess. S. 63.

Kalorimetrische Bombe. Dieselbe enthält stark verdichteten Sauerstoff und dient zur Bestimmung der Verbrennungswärme. Der eingebrachte Körper wird durch einen galvanisch glühenden Draht entzündet. Die entwickelte Wärmemenge ergibt sich aus der Temperaturerhöhung eines Wasserbades, in welchem die Bombe sich befindet (**29** I), wobei der Wasserwert der Bombe zu demjenigen des Kalorimeters zu addiren ist.

Genauere Vorschriften: Thomsen, Thermochem. Unters. Leipzig 1882—1886; Berthelot, Thermochem. Messungen, übers. v. Siebert, Leipzig 1893.

32. Wärmeleitvermögen.

Vergleichung des Wärmeleitvermögens zweier Stäbe. Wärmeleitungs-Vermögen oder -Koefficient k ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Eins hindurchfliefst, wenn senkrecht zu diesem Querschnitt das Temperaturgefälle Eins stattfindet, d. h. wenn auf der Strecke 1

die Temperaturänderung $=1$ ist. k geteilt durch Dichtigkeit $\times$ spec. Wärme nennt man Temperaturleitungs-Koefficient. Ein von Despretz zuerst gebrauchtes Verfahren, welches aber grofse Umsicht erfordert, wenn es zu brauchbaren Resultaten führen soll, ist das folgende.

Wir setzen die beiden Stäbe von gleichem Querschnitt voraus und geben ihnen dieselbe Oberflächenbeschaffenheit durch Poliren und galvanische Versilberung oder Vernickelung. Die beiden Enden eines Stabes werden auf verschiedene Temperatur gebracht, etwa indem man das eine Ende mit siedendem Wasser und das andere mit schmelzendem Eis umgibt. Weniger gut mag man das eine Ende in der Luft lassen, das andere durch eine sehr konstant brennende Lampe erhitzen. Der mittlere Teil des Stabes, an welchem die nachfolgenden Temperaturbeobachtungen angestellt werden, ist durch Schirme vor Strahlung von den Wärmequellen geschützt.

Die Temperaturverteilung wird mit der Zeit stationär. Nachdem dies eingetreten ist, werden an drei gleichweit voneinander abstehenden Punkten I, II und III die Temperaturen des Stabes gemessen. Die Temperaturüberschüsse über die umgebende Luft mögen sein u_1, u_2 und u_3. Setzen wir $\frac{1}{2}(u_1+u_3)/u_2=n$.

Dasselbe Verfahren auf den anderen Stab angewandt ergebe an drei ebensoweit abstehenden Punkten die Temperaturüberschüsse U_1, U_2 und U_3 und $\frac{1}{2}(U_1+U_3)/U_2=N$.

Dann verhalten sich die Leitvermögen k und K

$$\frac{K}{k}=\left[\frac{\log(n+\sqrt{n^2-1})}{\log(N+\sqrt{N^2-1})}\right]^2.$$

Beweis. Im stationären Zustand empfängt jedes Längenelement dx des Stabes in der Zeiteinheit durch Leitung so viel Wärme, wie es an die Umgebung abgibt. Die letztere Menge ist $a\cdot u\cdot dx$, wenn a das auf die Längeneinheit des Stabes bezogene „äufsere Leitungsvermögen" vorstellt. Erstere Menge ist $k\cdot q\frac{d^2u}{dx^2}dx$. a und der Querschnitt q sind für beide Stäbe gleich. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert die Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{a}{kq}\cdot u=\alpha^2\cdot u$, wenn $\frac{a}{kq}=\alpha^2$ bezeichnet wird. Das allgemeine Integral der Gleichung ist: $u=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}$, wo C_1 und C_2 zwei von der Erwärmung der Endflächen abhängige Integrationskonstanten

bedeuten. Nennt man u_1, u_2, u_3 die Temperaturen für drei je um die Länge l auseinanderliegende Querschnitte, so findet man durch Einsetzen von x, $x+l$ und $x+2l$ für x in obige Gleichungen nach Elimination von C_1 und C_2 die Beziehung $e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}=(u_1+u_3)/u_2=2n$ (siehe oben). Hieraus folgt

$$e^{\alpha l}=n+\sqrt{n^2-1} \qquad \text{oder } \alpha^2 l^2=\frac{a}{kq}l^2=\left[\log\text{nat}\,(n+\sqrt{n^2-1})\right]^2.$$

Dieselbe Gleichung mit K und N für den zweiten Stab aufgestellt und in die erstere dividirt liefert den zu beweisenden Ausdruck.

Die Temperaturen bestimmt man mit Thermoelementen (25), deren eine Lötstelle in feine Bohrungen der Stäbe eingesenkt wird, während die anderen Verbindungen in der umgebenden Luft liegen. Es genügt auch wohl, die Thermoelemente, welche aus ganz feinen zusammengelöteten Drähten (Neusilber — Eisen) bestehen, mit der Lötstelle oben und durch Gewichtchen beiderseitig beschwert über den Stab zu hängen.

Vgl. noch Wiedemann und Franz, Pogg. Ann. 89, 497. 1853.

Absolutes Wärmeleitvermögen. Kennt man das äufsere Wärmeleitvermögen a eines Stabes, so folgt aus der letzten Gleichung in obigem Beweise

$$k=\frac{a}{q}\,\frac{l^2}{[\log\text{nat}\,(n+\sqrt{n^2-1})]^2},$$

(q = Querschnitt, l = Abstand der gemessenen Punkte des Stabes). Eine rohe Bestimmung von a/q kann folgendermafsen ausgeführt werden. Man erwärmt den Stab gleichmäfsig, legt ihn ebenso hin wie vorher und beobachtet mit dem Thermoelement zu mehreren Zeiten t', $t''\cdots$ die zugehörigen Temperaturüberschüsse u', $u''\cdots$. Die letzteren sollen von derselben Gröfsenordnung gewählt werden, wie die u_1, $u_2\cdots$ oben. Nennt man noch s die Dichtigkeit, c die specifische Wärme des Stabes (Tab. 1 und 16), so ist

$$\frac{a}{q}=cs\,\frac{\log\text{nat}\,u'-\log\text{nat}\,u''}{t''-t'}.$$

Denn wenn in dem Zeitelement dt die Temperatur sich um du ändert, so ist die hierbei von der Längeneinheit des Stabes abgegebene Wärmemenge einerseits $=au\,dt$, andrerseits $=-qcs\,du$. Daraus folgt $qcs\cdot du/u=-a\cdot dt$ und das Integral dieser Gleichung $qcs\log\text{nat}\,u=C-at$. Also ist: $qcs\,(\log\text{nat}\,u'-\log\text{nat}\,u'')=a(t''-t')$ q. e. d.

Die genaue absolute Messung des Wärmeleitvermögens eliminirt die äufsere Wärmeleitung z. B. durch periodische Er-

wärmungen eines Stab-Endes oder macht sich durch Beobachtungen in den allerersten Zeiten nach der plötzlichen einseitigen Erwärmung eines Körpers davon unabhängig. Die Aufgabe gehört zu den schwierigsten.

Vgl. Angström, Pogg. Ann. 114, 513. 1861 und 123, 628. 1864; Heinrich Weber, ebd. 146, 257; Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann. 9, 1. 1880; F. Weber, ebd. 10, 103. 1880; Lorenz, ebd. 13, 422. 1881.

Vgl. Tab. 10.

Wärmestrahlung siehe **47b.**

Elasticität und Schall.

33. Bestimmung des Elasticitätsmoduls durch Ausdehnung.

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft P bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde. Dann ist

$$E = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{P}{q}$$

der Elasticitäts-Modul oder Koefficient der Ausdehnung, auch wohl erster Elast.-Koefficient genannt. E, die elastische Stärke des Körpers definirend, ist also das Verhältnis der Spannung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch das Gewicht, welches man an einen Draht vom Querschnitt Eins anhängen müfste, um die Länge zu verdoppeln, wenn bis dahin die Verlängerung der Belastung proportional bliebe.

Die Gröfse der Zahl E hängt von den Einheiten ab, in welchen Querschnitt und Gewicht gemessen werden.

Gewöhnliche technische Definition. Man pflegt das Quadratmillimeter und das Kilogrammgewicht zu wählen, was man durch ein der Zahl beigesetztes kg-Gewicht/mm² bezeichnet (Tab. 17). Um die Veränderlichkeit der Schwere in Rechnung zu setzen, kann man die Beobachtung auf 45° Breite reduciren (**19b**). Doch sind meistens die Messungen nicht so genau, dafs diese Korrektion merklich wird.

Elasticitätsmodul im absoluten Mafssystem [E]. Betrachtet man das Gramm, Kilogramm etc. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheit, so ist das Gewicht eines Körpers P also $= g \cdot P$, wo g die Schwerbeschleunigung bedeutet. Die Krafteinheit, 1 „Dyne“ nach Clausius, d. h. das Gewicht, welches 1 gr an einem Orte haben würde, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sec² betrüge, würde $g$mal kleiner und der Elasticitätsmodul $g$mal gröfser werden, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit

genommen wird. Einen in kg-Gewicht/mm² ausgedrückten Elasticitätsmodul E hat man also, um denselben in das „absolute“ [C-G-S]-System $[E]$ umzurechnen, erstens mit kg/gr = 1000, ferner mit $cm^2/mm^2 = 100$ und endlich mit $g = 981$ cm/sec², also mit 98 100 000 zu multipliciren. $[E]$ geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in $(cm/sec)^2$. Vgl. Anh. 6 und 10a.

Wir nehmen die gebräuchliche technische Definition.

Bestimmung des Elasticitätsmoduls. Man befestigt das obere Ende des Drahtes oder Stabes an der Wand oder an einer soliden Stütze, belastet das untere Ende wenn nötig zuerst so weit, dafs der Draht ganz gestreckt ist, und mifst seine Länge. Man fügt eine Mehrbelastung P kg des unteren Endes hinzu und bestimmt die dadurch entstehende Verlängerung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. q ist der Querschnitt in mm² (vgl. unten). Dann hat man

$$E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q}\,\frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Wenn das obere Ende eines dünnen Drahtes als vollkommen fest angenommen werden kann, so mag man die Verlängerung als die Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Ein Nachgeben der oberen Befestigung kann unter Umständen unschädlich gemacht werden dadurch, dafs man dieselbe mittels eines Fadens und einer Rolle durch eine der Belastung nahe gleiche Kraft auch nach oben beansprucht. Sicherer ist es, je eine Marke oben und unten am Drahte anzubringen und deren Verschiebungen durch die Belastung zu bestimmen.

Bei der Längenmessung mit einem auf einem Mafsstabe (Kathetometer **18a**) verschiebbaren Mikroskop oder besser mit zwei feststehenden Mikroskopen mit Okularmikrometern (**18**, 4) werden die Marken als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf angeklebtem Papier angebracht.

Die zur Messung angewandte Verlängerung mufs innerhalb der „Elasticitätsgrenze“ bleiben, das heifst, der Draht mufs nach Entlastung die frühere Länge haben, was zu kontroliren ist. Die Elasticitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, dafs man vor den Messungen stärker belastet. — Selbst bei harten Metallen wird man bei der Messung die Hälfte der Belastung,

bei welcher das Zerreifsen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 17.

Wegen der elastischen Nachwirkung (**36 a**) wachsen die Verlängerungen mehr oder weniger — bei Stahl am wenigsten — mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen thunlichst kurze Zeit wirken zu lassen: die kleine Temperaturänderung, welche die Ausdehnung begleitet, hat keinen merklichen Einflufs. Streng genommen hat man zwei Elasticitätsmoduln bei kurzer und bei andauernder Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere bis zu 2% kleiner sein kann.

Um die Genauigkeit des Resultates zu vergröfsern, beobachtet man bei mehreren Belastungen. Vgl. das Beispiel oder, für die Rechnung mit kleinsten Quadraten, **3**.

Abweichungen von der Proportionalität der Ausdehnung mit der Belastung. Die Ausdehnung λ wächst in Wirklichkeit ein wenig beschleunigt mit der Belastung. Man kann sie genähert darstellen durch

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}(P + A \cdot P^2),$$

wo E den Elast.-Modul für kleine Belastung darstellt.

Sehr kleine Ausdehnungen können um 10% gröfsere Elasticitätsmoduln ergeben, als sehr grofse, woraus also eine erhebliche Unsicherheit entspringt.

Vgl. J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891.

Querschnittsmessung. Der Querschnitt eines Drahtes kann durch Messung des Durchmessers bestimmt werden, wobei man sich für kleine Dicken des Fühlhebels oder des Mikroskopes (**18**) bedient. Zweitens aber läfst sich der Querschnitt durch Wägung finden. Ist s (**13** B 2 u. Tab. 1) die Dichtigkeit der Substanz, wiegen ferner h mm des Drahtes m mg, so ist der Querschnitt $q = m/hs$ mm².

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861$ mm².

Man beobachtete in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,91 mm	1,11 mm
3.	0,6 „	913,86 „	*4.*	2,6 „	914,95 „	1,09 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $P = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm.

Folglich ist der Elasticitätsmodul (S. 150)

$$E = \frac{l \cdot P}{\lambda \cdot q} = \frac{913{,}8 \cdot 2}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im absoluten cm-gr-System ist dieser Elasticitätsmodul (S. 149)

$$[E] = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \cdot 10^9 \left[\text{cm}^{-1}\,\text{gr}\,\text{sec}^{-2}\right].$$

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in der Mitte belastet, so daſs er gebogen wird. Es sei l die ganze Länge des Drahtes. Zwei Belastungen P_1 und P_2 mögen die Senkungen H_1 und H_2 des Drahtmittelpunktes gegen die Verbindungslinie der Klemmpunkte ergeben, dann ist der Elasticitätsmodul, wenn H_1 und H_2 klein gegen l sind,

$$E = \frac{1}{8} \frac{l^3}{q} \frac{P_2/H_2 - P_1/H_1}{H_2^2 - H_1^2}.$$

Für gröſsere Senkungen kommt der Korrektionsfaktor

$$1 + 3(H_1^2 + H_2^2)/l^2$$

hinzu. Die beiden Teile des Zählers sind wenig verschieden, so daſs H_1 und H_2 genau beobachtet werden müssen.

Beweis Die Verlängerung jeder Hälfte $\frac{1}{2}l$ ist offenbar

$$\lambda = \sqrt{(\tfrac{1}{2}l)^2 + H^2} - \tfrac{1}{2}l$$

oder genähert nach Formel 3 S. 9

$$\lambda = \tfrac{1}{2}l\left(\sqrt{1 + 4H^2/l^2} - 1\right) = \tfrac{1}{2}l\left(1 + 2H^2/l^2 - 1\right) = H^2/l.$$

Die Zerlegung des Gewichtes P in zwei nach den Drahtrichtungen wirkende Spannungen liefert für jede den Wert $\frac{1}{2}P\sqrt{(\frac{1}{2}l)^2 + H^2}/H$ oder, wenn H klein ist, $P \cdot l/(4H)$. Die ursprüngliche unbekannte Spannung des Drahtes sei P_0 gewesen. Dann hat man also

$$Eq \cdot 2\lambda_1/l \text{ oder } 2Eq \cdot H_1^2/l^2 = P_1 l/(4H_1) - P_0$$
$$Eq \cdot 2\lambda_2/l \text{ oder } 2Eq \cdot H_2^2/l^2 = P_2 l/(4H_2) - P_0.$$

Subtraktion eliminirt P_0 und liefert den obigen Ausdruck für E.

34. Elasticitätsmodul aus Längsschwingungen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer Welle ist gleich Wellenlänge $\times$ Schwingungszahl N.

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht werde zum Ansprechen seines longitudinalen Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. Die Wellenlänge ist dann gleich der doppelten Stab- oder Drahtlänge $2l$.

Also, wenn N die Tonhöhe d. h. Schwingungszahl/sec (Tab. 18), so ist die Schallgeschwindigkeit in dem Materiale

$$u = 2Nl.$$

l sei in cm gemessen, s die Dichtigkeit des Stoffes, dann wird der Elasticitätsmodul im abs. cm-g-sec-System ausgedrückt (S. 149 u. Anh. 10a)

$$[E] = u^2 s = 4N^2 l^2 s \, [\mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot sec^{-2}}].$$

$[E]$ geteilt durch 98100000 gibt den Modul E im gebräuchlichen technischen Mafse kg-Gew./mm² (S. 150). Dies kommt, wie man leicht sieht, auf dasselbe hinaus, wie wenn man l in m, also u in m/sec ausdrückt und dann direkt rechnet

$$E = \frac{u^2 s}{9810} = \frac{4N^2 l^2 \cdot s}{9810} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen werden durch Reiben mit einem wollenen Lappen erzeugt, welcher für Metall oder Holz mit Kolophonium eingerieben, für Glas angefeuchtet worden ist.

Die Tonhöhe wird durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel bestimmt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**37a**, 5).

Es ist oft schwierig, die Oktave zu bestimmen, in welcher die meistens sehr hohen Töne liegen. Ein derartiger Fehler wird leicht bemerkt, weil er das Resultat immer mindestens viermal zu klein oder zu grofs werden läfst.

Über die Bestimmung der Tonhöhe aus Staubfiguren vgl. **37**, über graphische Bestimmung **37a**.

Die aus der Tonhöhe bestimmten Elasticitätsmoduln können etwas anders ausfallen, als die durch Verlängerung bestimmten, erstens wegen der Erwärmung bez. Abkühlung bei der Zusammendrückung bez. Ausdehnung, und zweitens, weil zwischen der Belastung und der Längenbestimmung Zeit verstreicht, und weil während derselben eine kleine Ausdehnung vermöge der elastischen Nachwirkung hinzutritt (vgl. S. 151 und **36a**).

Beispiel. Der vorige Eisendraht gab bei der Länge $l = 1{,}361$ m den Longitudinalton ais_3. Zu diesem findet sich aus Tab. 18 die Schwingungszahl $N = 1843$. Das specifische Gewicht $s = 7{,}61$ gesetzt, wird

$$E = \frac{4 \cdot 1843^2 \cdot 1{,}361^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \, \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

35. Elasticitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maſsstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). P sei eine Belastung des freien Endes, H dessen Senkung hierdurch. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b. Die freie Länge des Stabes sei $=l$. Dann ist der Elasticitätsmodul

$$E=4\frac{l^3}{a^3b}\frac{P}{H}.$$

Für kreisförmigen Querschnitt ist statt a^3b zu setzen $3r^4\pi$.

Dünne Drähte. Die Methode ist sehr gut auf dünne Drähte anwendbar. Der Durchmesser wird aus Gewicht und specifischem Gewicht erhalten. Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden eliminirt durch eine zweite Bestimmung, bei welcher der horizontale und vertikale Durchmesser vertauscht sind.

II. Aufgelegter Stab. Die Schwierigkeit der festen Einklemmung wird vermieden, indem man den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auflegt. Deren Abstand von einander sei gleich l. Bringt eine Belastung P der Stabmitte daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaſsstab; Kathetometer), so ist

$$E=\frac{1}{4}\frac{l^3}{a^3b}\frac{P}{h}.$$

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung P der Mitte bewirke den Neigungswinkel φ eines Endquerschnittes, so ist

$$E=\frac{3}{4}\frac{l^2}{a^3b}\frac{P}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Zur Messung von φ verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (48. 49). Besser ist die Beobachtung beider Enden und die Mittelnahme. Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, aber etwas schief stellen, so daſs das Licht der Skale von dem einen

zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird (A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886). Fernrohr und Skale stehen jetzt natürlich einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg}\varphi = n/(4A+2d)$.

P ist in kg-Gewichten, alle Längen sind in mm auszudrücken (S. 149).

Die Formeln setzen relativ zur Länge kleine Senkungen voraus. — Man hat sich auch hier zu überzeugen, dafs nach Entfernung des Gewichtes die frühere Gestalt sich herstellt. — Kleine Querschnitte werden durch Wägung bestimmt (S. 151).

Wenn die Höhe a des Stabes nicht gegen die Länge l zu vernachlässigen ist, so ist das nach den obigen Formeln berechnete E noch zu multipliciren mit $1+3a^2/l^2$.

Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878.

Beweise für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien, vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen“ Schicht, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun s der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht, nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $s \cdot d^2y/dx^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke ds sucht sich also mit der Kraft $Esb \cdot ds \cdot d^2y/dx^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+s$ und $-s$ zusammen ein Drehungsmoment $2Ebs^2 \cdot ds \cdot d^2y/dx^2$. Das von einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehungsmoment ist also

$$2Eb\frac{d^2y}{dx^2}\int_0^{a/2} s^2 ds = Eb\frac{a^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dieses elastische Drehungsmoment mufs dem von dem angehängten Gewicht an der Stelle ausgeübten Moment $P(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}(l-x), \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \text{ und}$$

$$y = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Hieraus ergibt sich die Neigung $\operatorname{tg}\Phi$ und die Senkung H am Ende $(x=l)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \operatorname{tg}\Phi = \frac{6}{E}\frac{Pl^2}{a^3b}, \qquad y_l = H = \frac{4}{E}\frac{Pl^3}{a^3b},$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da nun ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}P$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ 8 mal, die Senkung h 16 mal kleiner als $\operatorname{tg}\Phi$ und H.

Andere Querschnitte. Faſst man den Querschnitt als eine Platte auf, welche in der Flächeneinheit die Masseneinheit besäſse, so ist $\frac{1}{12}a^3b$ das „Trägheitsmoment des Querschnittes" von reckteckiger Form bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale (**54**). Bezeichnen wir dieses mit K, so kann man also schreiben

$$E = \frac{1}{3}\frac{1}{H}\frac{Pl^3}{K} \text{ oder } \frac{1}{48}\frac{1}{h}\frac{Pl^3}{K}.$$

In dieser Form gelten die Gleichungen für Stäbe von beliebigem Querschnitt, wenn die Horizontale eine Hauptaxe ist. Z. B. ist das „Trägheitsmoment des Kreises" gleich $\frac{1}{4}r^4\pi$, woraus die obigen Formeln für den Kreisquerschnitt folgen.

Über den Einfluſs der Struktur auf Elasticitäts-Bestimmungen und über Elasticitätsmoduln krystallinischer Körper vgl. die Arbeiten von W. Voigt in Wied. Ann. und Gött. Nachr.

36. Torsionsmodul aus Schwingungen.

Die elastische Direktionskraft (Anh. 9) der Torsion auf einen am Drahte von der Länge l und dem Halbmesser r cm aufgehangenen Körper, wenn $[F]$ den Torsionsmodul im [C-G-S]-System bedeutet, beträgt $\frac{1}{2}\pi[F]r^4/l\cdot[\text{cm}^2\,\text{g}\,\text{sec}^{-2}]$.

Der Körper habe das Trägheitsmoment $K[\text{cm}^2\cdot\text{g}]$ **54**, bezogen auf den Draht als Drehungsaxe (**54**). Die Dauer der Torsionsschwingungen betrage t sec (**52**). Dann ist (Anh. 10)

$$[F] = 2\pi\frac{Kl}{t^2r^4}[\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{sec}^{-2}].$$

Die gebräuchliche technische Zahl erhält man mit r und l in mm und K in kg·mm², indem man auſserdem noch den Faktor $1/g = 1/9810$ hinzufügt,

$$F = \frac{2\pi}{9810}\frac{Kl}{t^2r^4} = 0{,}0006405\frac{Kl}{t^2r^4}\frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Für einen Cylinder vom Radius R und der Masse M mit vertikaler Axe als Schwingungskörper ist $K = \frac{1}{2} M R^2$.

Es ist ungefähr $F = 2/5\,E$; ferner, wie S. 150,

$$[F] = 98100000 \cdot F.$$

Erläuterung. Torsions- oder zweiter Elasticitätsmodul F. Man denke sich eine Platte von der Flächeneinheit mit einer zur Grundfläche senkrechten Geraden. Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Fläche wirke in ihrer eigenen Richtung eine Kraft k, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilt. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen einen kleinen Winkel δ bilden. Dann ist F das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = F\delta$.

Verhältnis von F zu E. Bei der elastischen Ausdehnung eines Stabes verkürzt sich der Durchmesser. Ist l die Länge, d der Durchmesser, δ dessen Verkürzung, welche die Verlängerung λ begleitet, setzen wir ferner das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$, so ist nach der Theorie $F = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}$. Erfahrungsgemäfs ist $0 < \mu < \frac{1}{2}$, also jedenfalls $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$. Für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ würde $F = \frac{2}{5}E$ sein. (Poisson. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elasticität §§ 3 und 92.)

Torsions-Drehungsmoment. Man denkt sich den Draht in dünne koncentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äufseren Durchmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Querschnitt um den Winkel φ, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\varphi\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Verschiebungswinkel δ der Schichten gegeneinander. Somit wird die Torsionselasticität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $F \cdot 2\pi\varrho d\varrho \cdot \varphi\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi F \varrho^3 d\varrho \cdot \varphi/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so dafs das ganze Drehmoment eines Drahtes von der Länge l und dem Halbmesser r bei einem Torsionswinkel φ beträgt:

$$2\pi F \frac{\varphi}{l} \int_0^r \varrho^3 d\varrho = F \frac{\pi r^4}{2l} \cdot \varphi.$$

Mit Hilfe von Anh. 9 und 10 ergibt sich hieraus die Schwingungsdauer t, wobei aber zu beachten ist, dafs zu dem Drehmoment der Faktor g hinzutritt, wenn man, wie bei der Elasticität, die Kräfte in Gewichten ausdrückt.

36a. Elastische Nachwirkung.

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung“, folgt langsamer. Derselbe ist nach der Substanz sehr verschieden grofs. Bei Metallen und Glas kann er auf etwa 5%, bei organischen Körpern, wie Cocon oder Kautschuk, auf 30%, ja in niederer Temperatur bis zur gröfseren Hälfte der Deformation steigen.

Nachwirkung nach Deformationen. Diese sind am leichtesten zu beobachten. Die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, tordirt gewesen war, stellt sich erst mit der Zeit wieder her.

Es sei s die zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch bestehende Deformation. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-ds/dt$, welche dem Gesetz folgt

$$-\frac{ds}{dt}=a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also} \quad s=C\cdot e^{-p\cdot t^{1-n}}, \qquad \text{I.}$$

wenn $p=a/(1-n)$ ist. n wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderungen; nach kurzer Dauer allgemein, für Ausdehnungen auch nach längerer Dauer, ist $n=$ nahe 1. In diesem Falle also ist

$$-\frac{ds}{dt}=a\frac{s}{t}, \quad \text{also} \quad s=\frac{c}{t^a}. \qquad \text{II.}$$

Für die ersten Augenblicke gilt die Formel nicht mehr. a, welches die Geschwindigkeit des Verschwindens der Nachwirkung bedingt, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant. c, d. h. die zur Zeit 1 noch vorhandene Nachwirkung, ist der Gröfse der vorangegangenen Deformation bei gleicher Dauer derselben nahe proportional, wächst aber mit der Dauer.

Um die Gröfse und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bezeichnen, lasse man eine Deformation S 1 min lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1\ s_1$ und $t_2\ s_2$ kommt $a=\frac{\log s_1-\log s_2}{\log t_2-\log t_1}$ und $c=t_1^a\cdot s_1$ oder $=t_2^a\cdot s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich; vgl. auch **3.** c/S gibt die relative Gröfse der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung mufs die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Gröfse zu geben. Dann gilt aber für Torsion der Wert $n = 1$ nicht mehr, sodafs man die umständlichere Formel I nehmen mufs.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einflufs. Bei harten Körpern wächst die Nachwirkung c mit der Temperatur. a aber wird wenig beeinflufst. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur gröfser.

Die Beobachtung ist für Torsion unter Anwendung der Spiegelablesung (**48**; **49**) einfach. Man dämpft den an den Draht gehängten Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (**7**, 29) und erteilt die Drehungen oben oder unten. Für genaue Längsnachwirkungen an Metallen werden sehr lange Drähte, empfindliche Ablesungsvorrichtungen und endlich, um die Wärmeausdehnung in Rechnung zu setzen, genaue Temperaturbeobachtungen gefordert.

Die Schwierigkeit, dafs dauernde Gestaltsänderungen vermieden werden, wird verringert, indem man vor der Beobachtung eine gröfsere Deformation gibt, dann natürlich hinreichend lange wartet.

37. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch Staubfiguren (Kundt).

Die Schallgeschwindigkeit in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}00367\, t}$ m/sec. Auf mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur näherungsweise Rücksicht genommen, indem man 0,004 statt 0,00367 setzt (**15**).

Schallgeschwindigkeit in festen Körpern. Dieselbe läfst sich für Stäbe oder Röhren, die man longitudinal anreibt, auf die obige Zahl zurückführen. Der Stab wird horizontal gelegt und mit seiner Mitte fest eingeklemmt. Das eine Ende E wird longitudinal gerieben (S. 153), das andere ragt in eine, mindestens 25 mm weite, am hinteren Ende durch

einen dicht schliefsenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen oder Korkstaub oder Kieselsäure enthält. Beim Anreiben des Stabes erzeugen die Stöfse des freien Endes in der Glasröhre stehende Luft-Schwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet sich leicht die richtige Stellung, bei welcher das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschliefsen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöfse an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Staubwelle, L die Länge des geriebenen Stabes, so ist die Schallgeschwindigkeit im Stabe

$$u = 331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}004\,t} \cdot \frac{L}{l} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}},$$

der gewöhnliche Elasticitätsmodul also (S. 153)

$$E = \frac{u^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\mathrm{mm}^2},$$

wo s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Um eine genaue Länge der Staubwelle zu erhalten, mifst man den Abstand zweier um mehrere (n) Wellenlängen auseinander liegender Schwingungsknoten und dividirt den Abstand durch n. Über die Rechnung bei einer gröfseren Anzahl von gemessenen Knotenpunkten vgl. **3** II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staubwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase war also $331\sqrt{1 + 0{,}004 \cdot 17} \cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sec; und der Elasticitätsmodul des Glases $E = 4890^2 \cdot 2{,}7/9810 = 6580$ kg-Gewicht/mm².

Schallgeschwindigkeit in Gasen. Den Wellenlängen, welche ein und derselbe geriebene Stab in verschiedenen Gasen gibt, sind selbstverständlich die Schallgeschwindigkeiten proportional.

Allgemein hat man folgende Beziehungen. Bedeutet

h den in Quecksilber von 0° gemessenen Gasdruck,

σ das specifische Gewicht des Gases,

σ_0 dasselbe bei 0° und 0,76 m Druck,

t die Temperatur,

c' und c die specifische Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen (Tab. 36),

g $= 9{,}810$ m/sec² die Fallbeschleunigung,

so wird die Schallgeschwindigkeit U gegeben durch die Formel

$$U^2 = \frac{gh \cdot 13{,}596}{\sigma} \cdot \frac{c'}{c} = 9{,}810 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}596 \frac{1+0{,}00367t}{\sigma_0} \cdot \frac{c'}{c}$$

$$= 101{,}37 \cdot \frac{1+0{,}00367t}{\sigma_0} \cdot \frac{c'}{c}.$$

Diese Beziehungen können dazu dienen, entweder die Schallgeschwindigkeit in einem Gase von bekanntem σ_0 und c'/c zu berechnen, oder umgekehrt aus der beobachteten Schallgeschwindigkeit auf die Dichtigkeit oder das Verhältnis der specifischen Wärmen zu schliefsen.

37a. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

1. Graphisch. Um die Schwingungszahl zu bestimmen, kann man den tönenden Körper mittels einer angeklebten leichten biegsamen Spitze auf eine fortbewegte berufste Fläche (z. B. Walze mit einer Spindel-Axe) eine Sinuskurve schreiben lassen. Während dessen zeichnet eine Vorrichtung neben diese Kurve Marken in bekanntem Takte. Die Anzahl der Wellen, welche zwischen zwei oder mehreren Zeitmarken liegen, wird dann abgezählt. Über die Berechnung vgl. auch 3 II.

Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschlufs (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschlufs geht durch die innere Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der äufseren Rolle mit der berufsten Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind. Die Induktionsfunken durch die Schreibspitze geben dann die Marken ab.

Auch kann man eine Stimmgabel von schon bekannter Schwingungszahl neben die zu bestimmende schreiben lassen und die Wellen abzählen.[1])

---

1) Normal-Stimmgabeln werden von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geaicht.

Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Rufs eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze.

S. Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

2. Stroboskopisch. Man regulirt die Umdrehungsgeschwindigkeit einer stroboskopischen Scheibe so, dafs die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder etc., mit blofsem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Scheibe betrachtet, scheinbar still steht. Erblickt man mehrere ruhende Bilder des schwingenden Körpers, so mäfsigt man die Geschwindigkeit weiter, bis ein einfaches Bild erscheint, oder man dividirt das Resultat noch durch die Anzahl der Bilder. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sec, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = m \cdot k$. Die Umdrehungszahl erhält man entweder mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läfst, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades im Uhrwerke.

Bequemer und auch genauer ist es, die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit zu reguliren, dafs noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sec. s stroboskopische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS \pm s)/t$, und zwar $+$, wenn bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

3. Mit der Sirene. Man erhält eine Sirene mit Zählerwerk auf der Höhe des Tones und zählt die Umdrehungen während einer Anzahl von Sekunden. Durch häufige Wiederholung kann eine brauchbare Zahl entstehen.

4. Schwebungen. Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich aus der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie mit einander geben. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weifs man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig

vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton der höhere und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden.

5. Monochord. Eine gespannte weiche Saite von der Länge l m, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das Gewicht p hat, gibt die Schwingungszahl ihres Grundtons

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Die eigene Elasticität der Saite macht die Schwingungszahl etwas gröfser. Dünner Messingdraht ist am geeignetsten.

Kapillarität und Reibung.

37b. Bestimmung einer Kapillarkonstante.

Die Kapillarkonstante einer Flüssigkeit kann definirt werden als das Flüssigkeitsgewicht, welches von der Längeneinheit der Berührungslinie der Oberfläche mit einer vollkommen benetzten Wand getragen wird. Dasselbe sagt: Wenn man nach dem Laplace'schen Gesetz den von der Krümmung einer Oberfläche herrührenden Kohäsionsdruck d durch den kleinsten und gröfsten Krümmungshalbmesser r_1 und r_2 als $d = \alpha(1/r_1 + 1/r_2)$ darstellt, so ist α diese Kapillarkonstante.

Praktisch pflegt man die Längen in mm, die Kräfte oder getragenen Gewichte in mg-Gewichten auszudrücken. Bei dem Übergang zum absoluten C-G-S-System kommt von mm zu cm der Faktor 10, von mg zu gr der Faktor 1/1000, endlich vom Grammgewicht zu Dyne der Faktor $g = 981$. Die Kapillarkonstante $[\alpha]$ in diesem System ist also 9,81 mal gröfser als die gewöhnlich angegebene α mg-Gew./mm.

I. Aus der Steighöhe.

Ein kreiscylindrisches enges Rohr wird sorgfältig gereinigt und dann längere Zeit in die zu untersuchende Flüssigkeit untergetaucht, so dafs es vollkommen benetzt d. h. dafs der Randwinkel = Null wird. Besonders Wasser und viele wässerige Lösungen sind schwierig zu wirklicher Benetzung zu bringen. Das Kapillarrohr wird alsdann gehoben und vertikal so gestellt, dafs eine nicht bis an die obere Öffnung reichende Flüssigkeitssäule stehen bleibt. Die Höhe der letzteren sei $= H$. Wenn s ihr specifisches Gewicht ist und r der innere Halbmesser des Rohres in mm, so wird die Kapillarkonstante gefunden

$$\alpha = \tfrac{1}{2} r H s \text{ mg-Gew./mm.}$$

H mufs grofs sein gegen r. Man hat die Höhe H zu rechnen bis zu $\frac{1}{3} r$ über dem untersten Punkte des Meniskus.

Beweis. Innerer Umfang $= 2r\pi$, gehobene Menge $= r^2 \pi H s$, also trägt die Längeneinheit des Umfangs die Menge $\frac{1}{2} r H s$. — Oder: Krümmungshalbmesser der halbkugeligen Oberfläche $= r$, also der (negative) Krümmungsdruck der Oberfläche $d = \alpha \cdot 2/r$. Dieser mufs gleich dem negativen hydrostatischen Druck $H \cdot s$ sein. — Eine andere, ältere Defi-

nition nennt wohl, unter Bezeichnung a^2, das Produkt rH Kapillarkonstante. Die beiden Definitionen stehen also im Verhältnis $s:2$. — Vgl. Quincke, Pogg. Ann. 160, 341. 1877.

Bei unvollkommener Benetzung mit dem Randwinkel Θ gilt $\alpha = \frac{1}{2} rHs/\cos\Theta$.

Halbmesser des Rohres. Ein Quecksilberfaden von der Länge l mm bei der Temperatur t wiege m mg, dann ist in mm (19a)

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m}{l}\frac{1+0{,}00018\cdot t}{13{,}60}} \quad \text{oder für } 15^0 \quad r = 0{,}1532\sqrt{\frac{m}{l}}\,.$$

Maſsgebend ist der Halbmesser am oberen Ende der gehobenen Säule, so daſs man die Länge des Quecksilberfadens zu messen hat, während seine Mitte mit dieser Stelle zusammenfällt.

II. Aus der Höhe von Luftblasen oder Flüssigkeitstropfen (Quincke).

1. Luftblasen. Man erzeugt in der Flüssigkeit in einem Trog mit einer vertikalen Planwand eine breite Luftblase (20 mm oder mehr) unter einer eingetauchten horizontalen Platte. Wenn h der Vertikalabstand von dem flachen untersten Teil der Blase bis zu dem Punkte weitester horizontaler Ausbauchung ist, so hat man

$$\alpha = \tfrac{1}{2} s \cdot h^2.$$

2. Tropfen. Eine Flüssigkeit, welche auf ebener Unterlage einen nicht benetzenden breiten Tropfen bildet, z. B. auch ein geschmolzenes Metall, dessen Tropfen auf einer erwärmten Platte erstarrt sind, läſst sich mittels dieser Tropfen genau ebenso untersuchen. h bedeutet den Vertikalabstand der Kuppe von der gröſsten horizontalen Ausbauchung.

Man miſst diese Höhen mit einem kleinen Kathetometer (cf. Quincke l. c.) oder mit dem Sphärometer, dessen Schraubenende man mit einer feinen Spitze oder auch mit einer kleinen horizontalen Scheibe versieht.

Über die Korrektion auf unendlich groſse Blasen oder Tropfen vgl. Quincke l. c. S. 354; für kleinere Dimensionen Lohnstein, Wied. Ann. 54, 713. 1895.

Randwinkel. Kennt man noch die ganze Höhe h' der Blase oder des Tropfens, so wird der Randwinkel Θ zwischen Flüssigkeit und Platte erhalten aus $\cos\frac{1}{2}\Theta = h'/(h\sqrt{2})$.

III. Aus der Länge von Oberflächenwellen (L. Matthiessen).

Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten werden teils durch die Schwere, teils durch die Oberflächenspannung fortbewegt. Bedeutet λ die Wellenlänge, N die Schwingungszahl, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u oder $N\lambda$ gegeben (W. Thomson) durch

$$u^2 = N^2\lambda^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{s}\frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Bei sehr kurzen Wellen von wenigen mm Länge kann man das erste Glied vernachlässigen und hat $N^2\lambda^2 = g\alpha \cdot 2\pi/\lambda s$, also, $g = 9810$ mm/sec^2 gesetzt,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} s \frac{\lambda^3 N^2}{g} = \frac{1}{61600} s\lambda^3 N^2 \frac{\text{mg-Gew.}}{\text{mm}}.$$

Man bringe zwei leichte Stäbchen, welche an die Enden einer Stimmgabel von bekanntem N (**37a**; Tonhöhe zwischen c und c_1 etwa) angeklebt sind, mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung und schlage die Stimmgabel an. Dann bilden sich zwischen den Spitzen stehende Wellen, deren λ (das Doppelte des Abstandes benachbarter Wellenberge) mit einem Cirkel und Maſsstab in mm ausgemessen wird.

Matthiessen, Wied. Ann. 38, 118. 1889, wo $T = \alpha/s$ gesetzt ist.

IV. Durch Abtropfen.

Der Tropfen, welchen eine horizontale kreisförmige Fläche vom Halbmesser r mm tragen kann, wiegt höchstens $2r\pi \cdot \alpha$ mg. Findet man das Gewicht fallender Tropfen von einer sehr gut benetzten vertikal stehenden, unten eben geschliffenen Röhre vom äuſseren Halbmesser r gleich m, so kann man $\alpha = m/(2r\pi)$ schätzen.

Auch von geschmolzenen Metallen läſst α sich so bestimmen, indem das untere Ende eines Drahtes vom Halbmesser r mm (S. 151) in einer kleinen Flamme von möglichst niedriger Temperatur geschmolzen wird, bis der anhängende Tropfen abfällt.

Das Verfahren unterliegt natürlich manchen Fehlerquellen.

Quincke, Pogg. Ann. 134, 365. 1868. Einen Apparat für die Messung s. Traube, Physik. Chem. Methoden S. 43. 1893.

37c. Bestimmung des Reibungskoefficienten einer Flüssigkeit durch Kapillarausflufs (Poiseuille, Hagenbach).

Reibungskoefficient oder Zähigkeitskonstante η heifst die Kraft, welche der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht von der Flächeneinheit dadurch entgegenwirkt, dafs dieselbe sich mit der stationären Geschwindigkeit 1 im Abstande 1 (eigentlich mit der unendlich kleinen Geschwindigkeit u im Abstande u) vor einer ruhenden Schicht parallel vorbei bewegt. Die Längen pflegen in cm, die Kräfte praktisch in gr-Gewichten ausgedrückt zu werden. Im abs. C-G-S-System ausgedrückt wird der Reibungskoefficient also $g = 981$ mal gröfser als bei der praktischen Definition.

Durch ein Kapillarrohr von der Länge l und dem Halbmesser r oder dem Querschnitt q (**19a**) fliefst unter dem konstanten Drucke p in der Zeit τ ein Flüssigkeitsvolumen v aus

$$v = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{8}\frac{r^4}{l}p\cdot\tau \quad \text{oder} = \frac{1}{\eta}\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{l}p\cdot\tau.$$

$1/\eta$ heifst wohl Fluidität der Flüssigkeit.

1. Bestimmung von η. Ein kreiscylindrisches Kapillarrohr ist mit einem Behälter verbunden, der dieselbe Flüssigkeit enthält. Die freie Oberfläche der letzteren werde in konstanter Druckhöhe h erhalten. Um die Gegenkraft der Oberflächenspannung eines Tropfens zu vermeiden, erfolgt der Austritt aus dem Rohre am besten in ein weiteres Gefäfs. h ist dann die Höhendifferenz beider freien Oberflächen. Wenn h nicht konstant ist, so gilt die mittlere Höhe während des Versuchs. Ist s das spec. Gewicht der Flüssigkeit, so beträgt der Druck hs. Fliefst in τ Sekunden das Volumen v aus, so ist also

$$\eta = \frac{\pi}{8}\frac{r^4 hs\tau}{lv} \quad \text{oder} = \frac{1}{8\pi}\frac{q^2 hs\tau}{lv}\,\frac{\text{gr-Gew. sec}}{\text{cm}^2}.$$

In [C-G-S]-Einheiten wird

$$[\eta] = \frac{981}{8\pi}\frac{q^2 hs\tau}{lv}\,[\text{cm}^{-1}\cdot\text{g}\cdot\text{sec}^{-1}].$$

Die Ausführung kann in verschiedener Form geschehen. Am einfachsten ist ein vertikales Kapillarrohr mit einem oben angeblasenen, oder, wenn man genauer messen will, durch Schlauchverbindung angesetzten kleinen Behälter. Unten mündet das Rohr in ein Gefäfs, welches die Flüssigkeit enthält. Durch Aufsaugen wird der Behälter gefüllt. Man läfst zwischen zwei Marken ausfliefsen und beobachtet die Zeit.

Das Volumen zwischen den Marken wird durch Auswägen (**19a**) bestimmt. Als Druckhöhe gilt, wenn das Gefäfs nach oben und unten symmetrisch gestaltet ist, die mittlere Höhe des Behälters über dem mittleren Stand des Niveaus im unteren Gefäfs; man markirt also am Behälter den Stand der Flüssigkeitsoberfläche bei halber Füllung durch einen Diamantstrich. (Ist die Höhe des Behälters selbst nicht klein gegen die Druckhöhe, so kommt wegen der ungleichen Zeit des Abfliefsens der oberen und unteren Hälfte eine etwas kleinere Höhe in Rechnung. Für einen cylindrischen Behälter von der Länge l, bez. eine Kugel vom Halbmesser r ziehe man von h ab $\frac{1}{12}l^2/h$ bez. $\frac{1}{20}r^2/h$.)



Je kleiner die Dimensionen, desto weniger Flüssigkeit genügt, aber um so vorsichtiger mufs man sich gegen feste Partikelchen in der Flüssigkeit schützen. Die Rohrweite richtet sich nach der Zähigkeit des Stoffes. 1 bis 5 min Ausflufszeit wird am besten sein.

1° Temperatur beeinflufst die Zähigkeit um Procente. Die nebengezeichnete Anordnung läfst sich in ein Bad stellen. Durch einen gut schliefsenden Kautschukstopfen tritt das Reibungsrohr und ein Rohr für Luftaustritt in das Vorratsgefäfs.

Beispiel. Volumen $v = 57{,}32$ cm³. Rohrlänge $l = 50{,}54$ cm. 45,33 cm des Rohres fafsten 7,347 g Hg von 18°; also Querschnitt

$$q = \frac{7{,}347}{45{,}33 \cdot 13{,}596\,(1 - 0{,}00018 \cdot 18)} = 0{,}01196 \text{ cm}^2.$$

Wasser von 19,5°: Druckhöhe $h = 53{,}7$ cm. Ausflufszeit $\tau = 100{,}9$ sec. Also

$$\eta = \frac{1}{8\pi}\,\frac{0{,}01196^2 \cdot 53{,}7 \cdot 0{,}9985 \cdot 100{,}9}{50{,}54 \cdot 57{,}32}$$
$$= 0{,}00001063 \text{ gr-Gew. sec/cm}^2 = 0{,}01043\,[\text{cm}^{-1}\,\text{g sec}^{-1}].$$

2. Relative Bestimmung. Man benutzt die vorige Anordnung; aber anstatt dieselbe auszumessen, vergleicht man die Ausflufszeit unter gleichen Umständen mit derjenigen einer bekannten Flüssigkeit. Sind τ_1 und τ_2 die Zeiten, s_1 und s_2 die specifischen Gewichte, so verhalten sich die Reibungskoefficienten

$$\eta_1 : \eta_2 = s_1\tau_1 : s_2\tau_2.$$

Für Wasser von der Temperatur t ist, Längen und Volumina in cm, die Zeit in sec (O. E. Meyer, Wied. Ann. 2, 394. 1877):

$$\eta = \frac{0{,}00001809}{1+0{,}0331 \cdot t + 0{,}000244 \cdot t^2} = \frac{0{,}00001080}{1+0{,}0250(t-18)+0{,}000146(t-18)^2}.$$

Für [C-G-S]-Einheiten werden die Zähler = 0,01775 bez. 0,01059. Hiernach kann man durch Vergleichung mit Wasser die Reibung absolut bestimmen.

Korrektion wegen der Geschwindigkeit. Obige Formeln gelten für hinreichend enge oder lange Röhren, d. h. für kleine Geschwindigkeit des Durchflusses. Ist die Bewegungsenergie der Flüssigkeit ein merklicher Bruchteil der von den Druckkräften gethanen Arbeit, so ist das nach diesen Formeln zu grofs gefundene η zu multipliciren mit

$$1 - \frac{v^2}{\pi^2 g r^4 h \tau^2} = 1 - \frac{0{,}000103 \cdot v^2}{r^4 h \tau^2}.$$

g ist die Schwerbeschleunigung. Für cm und sec ist $g = 981$ und für diesen Fall gilt der Faktor 0,000103.

Vgl. Hagenbach, Pogg. Ann. 109, 385, 402. 1860; O. E. Meyer, Wied. Ann. 2, 387. 1877. — In dem Nenner der Korrektion stand früher noch $2^{1/4}$, welcher Faktor wegfällt. F. Neumann, Einleit. in d. theor. Physik S. 262, 1883. Gartenmeister, Z. S. f. phys. Chemie 6, 524. 1890. — Eine Anordnung zur Messung in hoher Temp. s. Heydweiller, Wied. Ann. 55, 561. 1895.

Über Zähigkeitsmessungen durch die Dämpfung eines mit Flüssigkeit gefüllten schwingenden Gefäfses vgl. O. E. Meyer, Wied. Ann. 43, 1. 1891; Mützel ib. S. 15.

Licht.

37d. Lichtquellen. Spektrum.

Weifse starke Lichtquellen sind aufser der Sonne der Kalk- oder besser Zirkon-Brenner (Linnemann) im Knallgasgebläse oder die Anode der elektrischen Bogenlampe. Auch Auer'sches Glühlicht ist gut zu verwenden.

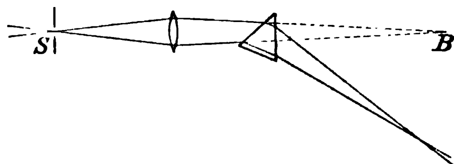
Einfarbiges Licht.

Es ist im folgenden vielfach gleichgiltig, ob die Reinigung des Lichtes durch Absorption bez. spektrale Zerlegung vor dem Eintritt oder nach dem Austritt (vor dem Auge) geschieht. Letzteres ist oft bequemer.

Farbig absorbirende Mittel („Strahlenfilter"). Kräftig rotes Kupferoxydulglas liefert ein leidlich homogenes Licht. Auch einzelne grüne Gläser oder Gelatineplatten sind brauchbar, besonders wenn man verschiedenfarbige Platten geeignet hintereinander stellt. Über farbige Flüssigkeiten vgl. Landolt, Chem. Ber. **1894**, 2872.

Man prüft und definirt die resultirende Farbe mit dem Spektralapparat.

Spektrale Zerlegung. Licht passirt einen Spalt S und dann eine Linse, welche ein objektives Bild B des Spaltes entwirft. Hinter die Linse kommt ein Prisma; falls die Lichtquelle vom Spalte weiter absteht (Sonne), etwa an den Ort des Bildes, welches die Linse von der Lichtquelle entwirft. Ungefähr im Abstande des Bildes B vom Prisma entsteht dann seitlich, bei einem geradsichtigen Prisma mitten, das Spektrum, aus welchem die gewünschte Farbe durch eine Blende herausgeschnitten werden kann. Gewöhnlich gibt man dem Prisma diejenige Stellung, in welcher das Spektrum am wenigsten abgelenkt ist, doch können auch andere Stellungen, welche eine Farbe mehr zusammendrängen oder ausbreiten, Vorteile bieten.



Ein reines Spektrum verlangt einen engen Spalt mit scharfen Schneiden und eine gute achromatische Linse, oft auch ein Abblenden falschen Lichtes. Die Reinheit wird an dem deutlichen Auftreten der Fraunhofer-schen Linien oder auch des Bildes von einem Querfaden im Spalt erkannt, welches im Spektrum als Querlinie auftritt.

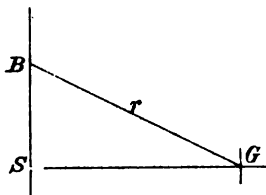
Das Spektrum des elektrischen Lichtbogens ist reicher an ultravioletten Strahlen als das Sonnenlicht. Wegen der Absorption im Glase wird für ultraviolette Strahlen Quarz oder Flufsspat genommen; der letztere absor-

birt auch die ultraroten Strahlen wenig. Von $\lambda = 200\,\mu\mu$ an abwärts absorbirt Quarz, von $\lambda = 185\,\mu\mu$ an sogar die Luft selbst, so dafs schliefslich mit Beugungsgittern im Vacuum gearbeitet werden mufs (Schumann).

Gitterspektrum. An die Stelle des Prismas kann das Beugungsgitter treten, welches nach beiden Seiten Spektra liefert, in der Regel nach der einen Seite lichtstärker als nach der anderen. Das sichtbare Spektrum 1. Ordnung (Fig. S. 198) ist getrennt von den übrigen, die höheren Spektra greifen in einander über.

Reflexionsgitter. Dieselben pflegen in Metallflächen eingegraben zu sein. Ebene Reflexionsgitter wirken ebenso wie die durchlässigen, sobald man das Spiegelbild der Lichtquelle in der Gitterebene als Lichtquelle ansieht (Quincke, Pogg. Ann. 146, 43. 1872).

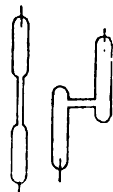
Rowland'sches Gitter. Die Fläche ist schwach sphärisch, daher entsteht ein deutliches Spektrum ohne Linse, was wegen der Absorption von Bedeutung ist. S sei der Spalt, SG und SB sind zu einander senkrechte Schienen, BG ein Arm von der Länge des Krümmungshalbmessers der Gitterfläche. Der Teil des Spektrums bei B erscheint deutlich, wenn das Gitter sich in G befindet.



Glühende Metalldämpfe. Metallsalze, ausser Na besonders noch Li und Tl (Tab. 19a; Fig. S. 179), werden in den Bunsenbrenner eingeführt als Perlen an der Platinöse oder von Platindrahtkörbchen gehalten (Landolt'scher Brenner), in das Luft- oder Sauerstoff-Gebläse auch als gegossene Stäbchen (du Bois Z. S. f. Instr. 1892, 265). Das Chlorid oder Bromid, wegen Verknisterns vorher erhitzt, ist heller, das Carbonat aber ausdauernder, leichter anzuschmelzen und für Lithium durch Ausschütteln des Pulvers mit Wasser leicht zu reinigen. Auch Stäbchen aus Natronglas können dienen. Nebenlicht, z. B. aus der Gasflamme selbst, sucht man durch Absorptionsmittel, z. B. farbige Gläser, für Na-Licht auch durch Lösungen von Kaliumbichromat und Uranosulfat zu beseitigen.

Auch in dem elektrischen Lichtbogen kann man die Metalle verdampfen lassen. Der Bogen kann hier so lang gemacht werden, dafs die Kohlen sich abblenden lassen; die Banden des Kohlendampfes, des Cyans und des Eisens aber bleiben als Verunreinigungen des Lichtes.

Die Metalle K, Sr, Ca, Rb, Cs, Zn, Cd etc. liefern eine Summe von diskreten Farben, die durch das Prisma zerlegt werden können. Die Wellenlänge der am meisten angewandten Linien s. in Tab. 19a, ihre Farbe in Fig. S. 179.



Geifsler'sche Röhren. Die gewöhnliche eingeschnürte Form und, um mehr Licht zu bekommen, eine solche mit Längsdurchsicht s. Fig. Wasserstoff-Füllung gibt die Wellenlängen C, F, eine aus der Gruppe G und h (Fig. S. 179). Quecksilber, Zink, Cadmium werden in der Röhre erwärmt. Das

intensivste Quecksilberlicht gibt die Arons'sche Röhre, in welcher man einen konstanten Strom zwischen zwei Quecksilberelektroden in einer ∩förmigen Röhre übergehen läfst. λ siehe Tab. 19a.

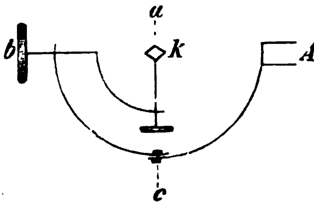
Arons Wied. Ann. 47, 767. 1892.

38. Messung eines Flächenwinkels mit dem Wollaston'schen Reflexionsgoniometer.

Das Instrument wird mit seiner Drehungsaxe parallel zu einer entfernten horizontalen Marke *O* (Fenstersprosse, Dachfirst) aufgestellt. Die zu messende Krystallkante sei bereits der Drehungsaxe parallel gemacht (s. unten). Man hält das Auge dicht vor den Krystall, dreht an der Axe, bis das in einer Krystallfläche gesehene Bild der genannten Marke *O* mit einer direkt gesehenen tiefer gelegenen ebenfalls horizontalen Marke *U* (Rand des Fufsbodens; Spiegelbild der oberen Marke in einem hinter dem Goniometer befestigten Spiegel) zusammenfällt, und liest den Stand der Kreisteilung am Index (Nonius) ab. Dann dreht man den Kreis mit dem Krystall, bis das Spiegelbild von *O* in der anderen Krystallfläche mit *U* zusammenfällt, und liest wiederum ab. Der Winkel, um welchen man gedreht hat, ergänzt den gesuchten Winkel der zwei Flächen zu 180°.

Zur „Repetition“ der Messung ist gewöhnlich innerhalb der Drehungsaxe des Kreises koncentrisch eine zweite Axe angebracht. Vgl. 88.

Einstellung der Kante parallel der Axe. Zwei aufeinander senkrechte Drehungen genügen, um der zu messenden Kante durch Probiren jede Richtung zu geben; systematisch aber kann man die zu messende Kante durch eine dritte Axe orientiren. (Naumann.)



A ist die Axe des Kreises, *a*, *b*, *c* sind die Orientirungsaxen, *k* der mit etwas Wachs befestigte Krystall.

1. Man stelle durch Drehung um *c* die Vorrichtung so, dafs *b* die Fortsetzung von *A* bildet, d. h. beim Drehen von *A* ruhig läuft. Nun wird durch Drehen um *a* die Krystallfläche I zu *A* parallel gestellt. Vgl. darüber unten.

2. Man verdrehe *c* um etwa 60 bis 90°, so wird sich im

allgemeinen die Stellung von Fläche I geändert haben. Durch Drehung um b stellt man I wieder parallel zu A. Jetzt steht I parallel zu A und zu b, also senkrecht zu c. Drehen um c ändert also die Lage von Fläche I nicht mehr.

3. Durch Drehung um c stellt man die Fläche II parallel zu A.

Bei jeder folgenden Einstellung einer Axe dürfen die vorher orientirten nicht mehr gedreht werden!

Den Parallelismus einer Fläche mit der Axe A erkennt man mittels zweier in der Ebene des Teilkreises übereinanderliegender entfernter Marken (vertikale Fenstersprosse und ein darunter gezogener Strich auf dem Fufsboden; Schornstein, Blitzableiter etc. und sein Bild in dem festen Spiegel des Goniometers). Die Fläche ist der Axe parallel, sobald bei passender Drehung um A das Spiegelbild des oberen Punktes in der Fläche mit dem unteren Punkte zusammenfällt.

Zu genauerer Messung, falls die Krystallflächen eine solche gestatten, kann eine Orientir-Vorrichtung nach Art der obigen am Spektrometer (39 I) angebracht werden

Z. B. Konstruktion von Fuefs in Liebisch, phys. Krystallographie S. 379, Leipz. 1891. — S. auch Czapski, Z. S. f. Instr. 1893, 1 u. 242.

39. Bestimmung eines Lichtbrechungsverhältnisses mit dem Spektrometer (Goniometer).

Das Brechungs-Verhältnis (-quotient, -koefficient, -exponent, -index) des Lichtes aus einem Mittel I in ein Mittel II ist das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten $u_1 : u_2$, oder der Wellenlängen $\lambda_1 : \lambda_2$, oder $= \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$, wenn α_1, α_2 die Winkel eines aus I in II dringenden Strahles mit dem Lot auf der brechenden Fläche bedeuten. — Zwischen 3 Mitteln besteht die Beziehung $n_{\mathrm{I\,III}} = n_{\mathrm{I\,II}} \cdot n_{\mathrm{II\,III}}$. — „Auf den leeren Raum reducirt" wird das gewöhnliche, auf Luft als erstes Mittel bezogene B.-V. durch Multiplikation mit 1,00029, dem B.-V. aus dem leeren Raum in die Luft.

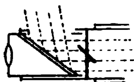
Wenn s die Dichtigkeit eines Körpers, so heifst $r = 1/s \cdot (n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ (früher auch wohl $(n-1)/s$ oder $(n^2-1)/s$) sein specif. Brechungs- oder Refraktionsvermögen. r ist von Temperatur, Druck und Aggregatzustand nahe unabhängig. Also nimmt das Brechungsverhältnis durch Temperaturausdehnung ab. Wenn A das chemische Molekulargewicht des Körpers, so heifst $r \cdot A$ das molekulare Brechungsvermögen.

Allgemeine Regeln.

1. Fernrohr und Spaltrohr (Kollimator). Um das Fernrohr auf parallele Strahlen einzustellen, macht man zunächst das Fadenkreuz des Fernrohres durch Verstellen des ersten Okularglases oder des Fadenkreuzes selbst deutlich sichtbar. Dann richtet man das Rohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszuge, dafs das Bild dieses Gegenstandes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt, d. h. dafs beide bei einer Seitenbewegung des Auges sich nicht gegen einander verschieben. Ist das Fadenkreuz beleuchtbar, so kann das unendlich ferne Objekt auch durch das Spiegelbild des Fadenkreuzes in einem Planglase vertreten werden. Vgl. auch Nr. 8 dieses Abschnittes.

Der Spalt soll im allgemeinen durch die Spaltlinse gesehen ein unendlich fernes Objekt vertreten. Um dies zu erreichen, richtet man das auf unendlich eingestellte Fernrohr auf den beleuchteten Spalt und zieht das Spaltrohr so weit heraus, dafs das Bild des Spaltes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt.

2. Beleuchtetes Fadenkreuz. Die Beleuchtung geschieht durch eine geneigte zwischen (Gaufs'schem) Okular und Fadenkreuz befindliche Planglasplatte. Licht von einer seitlich aufgestellten Flamme fällt auf die Platte und wird von da durch das Fadenkreuz nach dem Objektiv geworfen. Ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt, so treten Strahlen, welche von einem Punkt des Fadenkreuzes kommen, als Parallelstrahlen aus dem Objektiv und geben, etwa von einer Prismenfläche in das Fernrohr reflektirt, ein deutliches Bild des Fadenkreuzes. Fällt das Bild mit dem Fadenkreuz zusammen, so steht die Sehrichtung senkrecht auf der Fläche.



3. Kreisablesung. Die Anbringung zweier gegenüberliegender Ablesepunkte an einer Kreisteilung soll nicht nur die Ablesungsfehler verringern, sondern vor allem die Excentricität der Kreisteilung gegen die Drehungsaxe eliminiren. Man beobachte also jedesmal beide Nonien, zu jeder Ablesung den Nonius notirend. Dann nimmt man entweder das Mittel aus

den Winkeln, die jeder Nonius angibt; oder bequemer, man rechnet die Gradablesung immer nach Nonius I und nimmt nur in den Bruchteilen (Minuten) die Mittel.

4. Ob die Sehlinie des Fernrohrs senkrecht zu seiner Drehungsaxe ist, prüft man mit dem beleuchtbaren Fadenkreuz im Okulare. Auf das Tischchen des Instruments stellt man ein beiderseitig spiegelndes, etwa versilbertes (7, 6) Planparallelglas, welches selbst auf einem kleinen Fuſs mit Stellschraube steht oder auch direkt mit Klebwachs befestigt wird. Dieses Glas orientirt man so, daſs im Fernrohr das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Dreht man nun das Fernrohr um 180°, so müssen, wenn die Sehlinie zur Drehungsaxe senkrecht ist, abermals die Bilder zusammenfallen. Wenn nicht, so korrigirt man die Hälfte der Abweichung durch Neigen des Spiegelglases, die andere Hälfte durch Neigen des Fernrohrs und wiederholt die Probe u. s. f.

Eine nicht ganz parallele Glasplatte schneide und stelle man so, daſs die beiden Bilder des Fadenkreuzes neben einander liegen. Dann läſst sich das Glas zu den Prüfungen verwenden.

5. Daſs die Drehungsaxe des Tischchens oder des Kreises senkrecht zur Sehlinie des Fernrohrs ist, wird erkannt, indem man nach der Einstellung des Fadenkreuzbildes das Spiegelglas um diese Axe um 180° dreht; dann müssen die Bilder wieder zusammenfallen.

6. Hat das Spiegelglas selbst einen kleinen Fuſs mit Stellschrauben, so kann man mit demselben in leicht ersichtlicher Weise prüfen, ob die Ebene des Tischchens mit der Sehlinie des Fernrohrs parallel ist.

7. Um eine spiegelnde Fläche (Prismenfläche u. dergl.) mit der Drehungsaxe des Instrumentes parallel zu machen, kann das beleuchtete Fadenkreuz des berichtigten Fernrohrs gerade wie oben benutzt werden. Ist das Fernrohr berichtigt, so genügt aber auch das Spaltrohr. Man richtet das Fernrohr gerade auf den Spalt und markirt (durch einen Querfaden) die Spalthöhe, welche in das Fadenkreuz fällt. Betrachtet man dann den Spalt in der Fläche gespiegelt, so muſs, wenn diese mit der Axe des Instrumentes parallel ist, dieselbe Spalthöhe im Fadenkreuz erscheinen.

Sind zwei Flächen desselben Körpers (Prisma) einzustellen, so stellt man letzteren so, dafs eine der Flächen auf der Verbindungslinie zweier Fufsschrauben des Tischchens senkrecht steht. Diese Fläche wird zuerst berichtigt; alsdann die andere, wobei aber die genannten beiden Schrauben nicht mehr benutzt werden.

8. Prüfung einer Platte auf Planparallelismus. Die Kennzeichen sind: 1) es mufs bei passender Stellung des Fernrohrauszuges das Spiegelbild des Fadenkreuzes deutlich und einfach erscheinen; 2) wenn das Fadenkreuz gegen sein Spiegelbild auf der einen Seite keine Parallaxe zeigt, so mufs dies ohne Verstellung des Fernrohrauszuges auch auf der anderen Seite der Fall sein. Dann ist zugleich das Fernrohr auf unendlich eingestellt.

Brechungsverhältnis eines Prismas.

Das Prisma wird aus einem festen Körper durch Schleifen, aus einer Flüssigkeit durch Eingiefsen derselben in ein Hohlprisma aus planparallelen Glasplatten hergestellt. Zu messen ist 1) der Prismen- oder brechende Winkel, 2) die Ablenkung des Lichtstrahles.

I. Messung des brechenden Winkels φ.

a) Wenn das Fernrohr feststeht und das Prisma mit dem Kreise drehbar ist. Das Prisma wird so auf das Tischchen gestellt, dafs nach passender Drehung des Kreises die eine brechende Fläche nahe den früheren Ort der anderen einnimmt. Man macht zuerst durch die Fufsschrauben des Tischchens nach Nr. 7 beide Flächen parallel der Drehungsaxe. Alsdann wird durch Drehung des Kreises das Spiegelbild des Spaltes oder auch des beleuchteten Fadenkreuzes in der einen Prismenfläche auf das Fadenkreuz eingestellt und der Kreis an den Nonien abgelesen. Ebenso verfährt man mit der anderen Fläche. Die Differenz beider Ablesungen, selbstverständlich mit Rücksicht auf eine etwaige Überschreitung des Nullpunktes der Teilung, ergibt von 180° abgezogen den brechenden Winkel φ.

b) Wenn das Prisma feststeht, das Fernrohr mit dem Nonius oder mit dem Kreise drehbar ist. Man stellt das Prisma so auf, dafs ungefähr die rückwärts verlängerte Halbirungslinie des brechenden Winkels den Spalt trifft. Sodann

wird das Fernrohr auf das Spiegelbild des Spaltes in jeder Fläche eingestellt. Der Unterschied der Ablesungen am Kreise in beiden Lagen ist der doppelte brechende Winkel. Der Spalt mufs hier nach Nr. 1 sorgfältig auf unendlich eingestellt sein.

Mit dem beleuchteten Fadenkreuz mifst man den brechenden Winkel, indem man dasselbe mit seinem Spiegelbild in jeder der beiden Flächen zur Deckung bringt. Der gemessene Drehungswinkel ergänzt φ zu 180°.

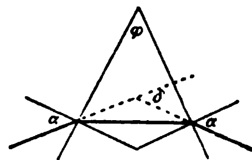
II. Messung des Ablenkungswinkels.

Die direkte Einstellung des Fernrohrs auf den Spalt ergibt die Richtung des nicht abgelenkten Lichtstrahles. Um den Ablenkungswinkel des durch das Prisma gegangenen Strahles und daraus den Brechungsindex zu finden, hat man vier Methoden.

a) Minimumstellung (Fraunhofer). Man stellt Prisma und Fernrohr so, dafs der abgelenkte Strahl im Fernrohr erscheint, dreht dann langsam das Prisma und folgt der Verschiebung des Bildes mit dem Fernrohr. In derjenigen Lage, in welcher der Lichtstrahl die möglichst kleine Ablenkung hat (wo das Bild sich nach derselben Seite bewegt, man mag das Prisma links oder rechts drehen), fixirt man das Prisma, stellt nun das Fadenkreuz auf den Spalt ein und liest den Kreis ab. Diese Einstellung wird von der direkten Einstellung auf den Spalt abgezogen und ergibt den Ablenkungswinkel δ. Statt auf den Spalt direkt einzustellen, kann man noch besser den Lichtstrahl einmal nach links, das andere Mal nach rechts durch das Prisma minimal ablenken lassen und von den beiden Einstellungen des Fernrohrs die halbe Differenz nehmen.

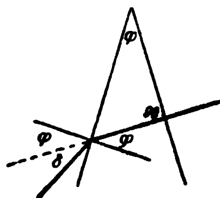
Das Brechungsverhältnis n ist, wenn φ den Prismenwinkel bedeutet,

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$



Beweis. Bei der Minimalablenkung geht der Strahl im Innern des Prismas symmetrisch durch, bildet also mit den beiden Normalen gleiche Winkel, offenbar $= \frac{1}{2}\varphi$. Der Einfallswinkel und ebenso der Austrittswinkel aus dem Prisma seien $= \alpha$, so ist nach dem Brechungsgesetz $\sin\alpha = n \sin\frac{1}{2}\varphi$. Der Ablenkungswinkel ist $\delta = 2\alpha - \varphi$, also $\sin\frac{1}{2}(\delta + \varphi) = \sin\alpha = n \sin\frac{1}{2}\varphi$, woraus obige Formel folgt.

b) Senkrechter Austritt (Meyerstein). Das Verfahren verlangt ein beleuchtbares Fadenkreuz. Man gibt dem Prisma die Stellung, bei welcher die dem Fernrohre zugewandte Fläche zur Sehlinie senkrecht ist, d. h. bei welcher das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Ist δ der Ablenkungswinkel, φ der brechende Winkel, so hat man (Fig.)



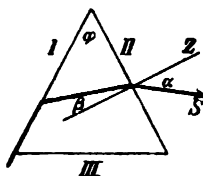
$$n = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

c) In sich zurückkehrender Strahl (Abbe). Das Verfahren bedarf keines Spaltes, aber eines beleuchtbaren Fadenkreuzes. Das Fernrohr wird zur einen Prismenfläche erstens nach Nr. 2 senkrecht gestellt und abgelesen. Dann stellt man vor derselben Fläche so ein, dafs die Strahlen vom Fadenkreuz, welche ins Prisma gedrungen, an der zweiten Fläche reflektirt und durch die erste wieder ausgetreten sind, wieder ins Fadenkreuz fallen (man stellt auf das Spiegelbild des Fadenkreuzes in der hinteren Prismenfläche ein). Beide Fernrohrstellungen mögen den Winkel ε mit einander bilden. Dann ist

$$n = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

Folgt aus der Figur zu *b*), indem $\varepsilon = \varphi + \delta$ ist. Vgl. Abbe, Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens. Jena 1874.

d) Streifender Eintritt. (F. K.) Es wird weder Spalt noch beleuchtetes Fadenkreuz gefordert, sondern nur ein drehbarer Kreis und ein feststehendes Fernrohr. Die eine Prismenfläche (I) werde von einem breiteren Lichtbündel streifend getroffen, etwa von einer Natronflamme beleuchtet, welche man in die Fortsetzung der Fläche gestellt hat. Durch die andere Prismenfläche sieht man das Licht dann scharf abgeschnitten. Man stellt auf diese Grenze zwischen dunkel und hell ein. Der Winkel dieser Sehrichtung S mit der Normalen Z der Fläche II betrage α.



Ist φ klein, so verläuft der Grenzstrahl S nach der anderen Seite von Z; dann soll α negativ gerechnet werden.

Mit beleuchtetem Fadenkreuz kann man α direkt messen, indem man nach Nr. 2 noch auf die Normale Z einstellt.

Ohne beleuchtbares Fadenkreuz verfährt man so, dafs man nach der Beobachtung durch die Fläche II nun durch I beobachtet und II streifend beleuchtet. Man dreht hierbei das Prisma mit dem Teilkreis vor dem Fernrohr oder das Fernrohr mit dem Kreis um das Prisma, bis wieder auf die Grenze zwischen hell und dunkel eingestellt ist. Dieser Drehungswinkel, um die Fläche III herum gezählt, heifse w, dann ist $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}(w - \varphi)$.

Man berechnet n aus der Formel

$$n^2 - 1 = \left(\frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2.$$

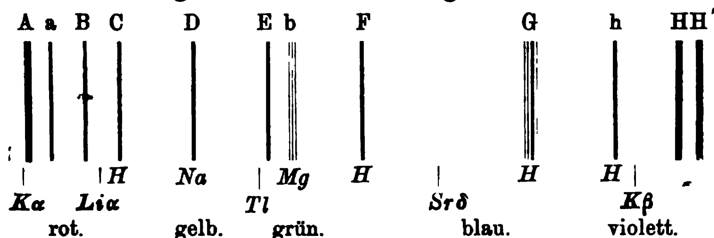
Denn man hat (Fig.) $n = \sin\alpha/\sin\beta$ und von dem streifenden Eintritt an I noch $n = 1/\sin(\varphi - \beta)$. Die Elimination von β aus beiden Gleichungen giebt obigen Ausdruck. Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 606. 1882.

Über eine Bestimmungsweise von kleinen Unterschieden der Brechung mit streifender Incidenz s. Hallwachs, Wied. Ann. 50, 577. 1893. — Das Refraktometer von Pulfrich s. 40 IV.

Die Genauigkeit des Resultates wächst bei allen Methoden im allgemeinen mit dem Prismenwinkel.

a und *d* sind für Glasprismen bis zu 70—80° brauchbar; gebräuchlich ist ein Winkel von etwa 60°. *b* und *c* können höchstens für Prismenwinkel gegen 40°, für stärker brechendes Glas nur bis etwa 35° angewandt werden.

Wellenlänge. Das Brechungsverhältnis mufs sich natürlich auf Licht von einer bestimmten Wellenlänge (Farbe) beziehen. Im Sonnenlicht, welches man mit dem Heliostat horizontal auf den Spalt wirft, benutzt man die Fraunhofer'schen Linien. Die Figur enthält die wichtigsten derselben im sicht-



baren Teil des Spektrums nach ihrer ungefähren Lage im prismatischen Spektrum. Für das Gedächtnis merke man sich, dafs *ADFGH* ungefähr gleichen Abstand von einander haben. Die Wellenlängen s. in Tab. 19a.

Um A und a zu sehen, stelle man den Spalt nicht zu eng und halte ein rotes Glas vor. D zeigt sich bei engem Spalte und starker Vergröfserung als eine sehr feine Doppellinie.

Andere Lichtquellen s. in **37d** und ihre Wellenlängen in Tab. 19a.

Zur Sichtbarmachung des ultravioletten Lichtes dient ein „fluorescirendes Okular", welches am Ort des Fadenkreuzes eine fluorescirende Platte aus Gelatine oder Uranglas trägt. Von Glas wird ultraviolettes Licht teilweise erheblich absorbirt, so dafs man auf Prismen etc. aus Quarz oder Flufsspat angewiesen ist.

Der Unterschied der Brechungsverhältnisse für zwei bestimmte Farben (z. B. für B und H Fraunhofer) wird Dispersionsvermögen für diese Farben genannt.

Vgl. Tab. 19, 19a und 20.

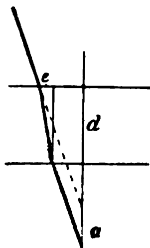
Als Funktion der Wellenlänge λ (42) stellt man das Brechungsverhältnis n wohl dar durch die Reihe $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4 \cdots$; oder nach Lommel und Wüllner $n^2 - 1 = \frac{A + B\lambda^2}{1 - C/\lambda^2}$.

Über die abgesonderte Bestimmung der Dispersion durch Mikrometer s. Pulfrich, Z. S. f. Instr. 1893, 267. Spektrometer neuerer Form s. z. B. bei Lummer in Müller-Pouillet, Physik 9. Aufl. S. 222, 231. 1894.

39a. Lichtbrechungsverhältnis einer Planplatte unter dem Mikroskop.

Die Platte habe die Dicke d und das gesuchte Brechungsverhältnis n.

Durch die Platte gesehen erscheint ein Objekt um $a = d(n-1)/n$ näher. Denn wenn man in den beiden, in Wirklichkeit sehr spitzen, rechtwinkligen Dreiecken, welche e als kleine Kathete haben (Fig.), die Hypotenusen den gröfseren Katheten d bez. $d-a$ merklich gleich annimmt, so stellt $e/(d-a)$ bez. e/d den Sinus des Einfalls- bez. Brechungswinkels des Strahles vor. Also hat man $n = d/(d-a)$, oder $a = d(n-1)/n$.



1. Ein Mikroskop sei auf ein Objekt scharf eingestellt. Bringt man zwischen das letztere und das Objektiv die Planplatte, so wird man den Abstand um eine Strecke a vergröfsern müssen, um wieder deutlich zu sehen. Das Brechungsverhältnis der Platte ist dann $n = d/(d-a)$.

2. Auf der Vorder- und der Hinterseite der Platte be-

finde sich je ein gut sichtbarer Punkt. Um von dem einen auf den anderen einzustellen, sei eine Verschiebung um die Strecke h notwendig. Dann ist, wie man aus obigem leicht ableitet, $n = d/h$.

3. Auf der Vorderfläche der Planplatte wird ein gut sichtbarer Punkt mit weifser Farbe angebracht. Man stellt das Mikroskop auf denselben ein. Um sodann das von der Rückseite der Platte zurückgeworfene Spiegelbild des Punktes zu sehen, wird man den Abstand zwischen Mikroskop und Platte um eine Strecke h verkleinern müssen. Das Brechungsverhältnis der Platte ist $n = 2d/h$.

Bei dem 3. Verfahren beleuchtet man mit auffallendem Licht und verdunkelt den Hintergrund oder noch besser, man versilbert das Glas auf der Rückseite (7, 6).

Um die Gröfse der notwendigen Verschiebungsstrecken des Mikroskopes genau zu bestimmen, kann die Schraubenverstellung des Mikroskopes dienen, wenn die Höhe des Schraubenganges (18 I, 2 u. 3) bekannt ist und wenn der Schraubenkopf eine Kreisteilung besitzt.

Die genaue Einstellung wird am besten mit einem Fadenkreuz im Okulare beurteilt, welches keine Parallaxe gegen das Bild zeigt. Am geeignetsten ist ein Objektiv von kurzer Brennweite und nicht zu grofsem Durchmesser. Dann kann bei dickeren guten Platten die dritte Decimale noch brauchbar werden.

Über die Bestimmung des Brechungsverhältnisses einer Flüssigkeit aus dem Axenwinkel eines Krystalles s. 47 am Schlufs.

40. Lichtbrechungsverhältnis aus dem Winkel der totalen Reflexion (Wollaston).

Wenn ein Lichtstrahl sich in einem Mittel vom Brechungsverhältnis N bewegt und auf die Grenzfläche gegen ein zweites Mittel vom kleineren Brechungsverhältnis n trifft, so tritt totale Reflexion des Lichtstrahles ein, sobald der Einfallswinkel an der Berührungsfläche gröfser als arc sin (n/N) wird. Die Beobachtung des Grenzwinkels Φ der totalen Reflexion liefert also die Beziehung

$$\frac{n}{N} = \sin\Phi,$$

woraus, wenn das Brechungsverhältnis von einem der Mittel bekannt ist, dasjenige des anderen berechnet werden kann.

Diese Bestimmungsweise erfordert im allgemeinen einfachere Hilfsmittel, als die von **39**, und besitzt den Vorzug, auf unvollkommen durchsichtige Körper anwendbar zu sein.

Eine genaue Bestimmung mufs auch hier sich auf Licht von einer bestimmten Farbe beziehen (S. 179).

I. Mit dem Prisma.

1. Brechungsverhältnis des Prismas. Man beleuchtet die eine Fläche I eines Prismas, während das Spektrometer-Fernrohr auf die Fläche II gerichtet ist, von innen d. h. durch die dritte Fläche hindurch, mit diffusem homogenem Licht (**37d**). Die Grenze der totalen Reflexion an I erscheint als eine scharfe Grenzlinie zwischen hell und weniger hell. Auf diese Linie wird eingestellt. Die Richtung des Fernrohrs ist dann offenbar dieselbe wie die Richtung S der Figur S. 178 d) und genau so wie dort, auch nach derselben Formel, erhält man das Brechungsverhältnis des Prismas.

2. Brechungsverhältnis eines anderen Körpers. Man klebt diesen Körper mit einer stark brechenden Flüssigkeitsschicht (Cassia-Öl, Arsenbromür) auf die Prismenfläche I und verfährt nun wie oben. Falsches Licht wird durch Schwärzen der störenden Flächen abgeblendet. Sowohl das Prisma wie die Flüssigkeit müssen stärker brechen als der Körper.

Ist n das gesuchte Brechungsverhältnis des angeklebten Körpers, N dasjenige des Prismas, φ der Prismenwinkel, α der Winkel der Sehrichtung nach der Grenze der totalen Reflexion mit der Normalen auf der anvisirten Prismenfläche (Fig. zu **39***d*), so bekommt man

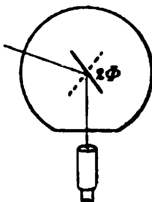
$$n = \sin\varphi \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha} - \cos\varphi \sin\alpha.$$

Denn es ist $N = n/\sin(\varphi-\beta) = \sin\alpha/\sin\beta$, woraus der Ausdruck folgt. Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 607. 1882.

II. Mit dem Totalreflektometer. (F. K.)

Man befestigt den Körper so an dem Instrument, dafs seine spiegelnde Fläche die Drehungsaxe enthält; siehe unten. Rückseite und Umgebung des Körpers seien mit Tusche geschwärzt. Alsdann stülpt man das mit einer stärker brechenden Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff 1,63, α-Monobromnaphthalin 1,66,

Methylenjodid 1,74) gefüllte Fläschchen von unten über den Körper, umgibt das Fläschchen mit gut durchscheinendem, nötigenfalls mit Petroleum bepinseltem Seidenpapier und beleuchtet auf einer Seite mit der Sodaflamme; oder man stellt die Flamme weiter entfernt und wirft mit einer Linse einen Strahlenkegel auf das Objekt. Bei passender, durch Probiren zu findender Stellung der spiegelnden Fläche und der Lampe wird dann das auf grofse Entfernung akkommodirte Auge oder Fernrohr das Gesichtsfeld der Fläche in eine helle und in eine weniger helle Hälfte geteilt sehen, auf deren Grenzlinie man einstellt. Dann dreht man Fläche und Lampe nach der anderen Seite und stellt wieder ein. Der halbe Winkel zwischen beiden Stellungen ist der Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, also $n = N \sin \Phi$, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit bedeutet.



Einstellung. Man dreht das Instrument in seinem Stativ um 90°, so dafs man frei visiren kann, und stellt das Fernrohr auf unendlich ein (**39**, 1). Zur Prüfung, ob das Fernrohr der Kreisebene parallel steht, bringt man einen entfernten, gut markirten Punkt in das Fernrohr. Derselbe mufs dann in der Teilkreisebene liegen.

Nun legt man das Instrument zurück und befestigt den Körper mit einem Kork oder dgl. an dem Träger, wobei die spiegelnde Fläche in die Drehungsaxe gebracht und dieser parallel gemacht wird. Hierzu dient eine Schneide und ein der Axe paralleler fester Spiegel, in welchem das eigene Auge oder ein Flämmchen in gleicher Höhe erscheinen mufs, wie in der Fläche.

Je kleiner oder unvollkommner (bei natürlichen Krystallflächen) die spiegelnde Fläche, desto genauer mufs die Fläche sowie die Sehlinie des Fernrohrs durch die Drehungsaxe gehen.

Das Brechungsverhältnis des reinen Schwefelkohlenstoffs beträgt für Natriumlicht bei 20° 1,6276 und nimmt auf +1° um 0,00080 ab. Die Temperatur mufs also sorgfältig beobachtet werden. Ein Schirm, welcher zugleich den Hintergrund dunkel erhält, mit starker Glasplatte vor der Flamme vermindert deren erwärmenden Einflufs.

Krystalle. Doppelbrechende Objekte geben im allgemeinen zwei Brechungsverhältnisse, also zwei Grenzen. Ein einaxiger Krystall wird am bequemsten in einer zur Hauptaxe senkrechten Fläche (siehe **46a**) untersucht. Der horizontal polarisirte (d. h. im Nicol'schen Prisma bei vertikaler Stellung der gröfseren Diagonale verschwindende) Strahl ist der ordentliche, der andere der aufserordentliche.

Ist die Krystallfläche der optischen Axe parallel, so bekommt man beide Hauptbrechungsverhältnisse, wenn die optische Axe der Drehungsaxe parallel liegt. Horizontal polarisirt ist der aufserordentliche Strahl.

Eine beliebig gelegene Krystallfläche liefert stets den ordentlichen Strahl; sie enthält aber auch eine zur optischen Axe senkrechte Richtung (Halbirungslinie des seitlichen Winkels in der Spaltfläche eines Rhomboeders; Grundlinie des Dreiecks in der Quarzpyramidenfläche). Diese Richtung horizontal gestellt liefert die beiden Hauptbrechungsverhältnisse.

Ein optisch zweiaxiger Krystall mit einem Schliff parallel einem Hauptschnitt (**46a**) gibt zwei Hauptbrechungsverhältnisse, wenn eine optische Elasticitätsaxe horizontal gestellt ist. Drehung um 90° liefert das dritte Hauptverhältnis und eins der obigen noch einmal.

Flüssigkeiten. 1. Brechungsverhältnis N der Flüssigkeit im Fläschchen. Man nimmt eine kleine Planplatte von bekanntem Brechungsverhältnis n (z. B. Bergkrystall mit den Brechungsverhältnissen 1,5442 und 1,5533 für Na) oder eine Luftschicht hinter einer Planplatte. Man hat dann

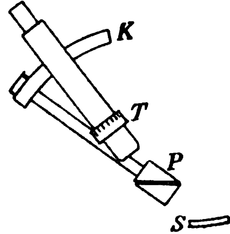
$$N = \frac{n}{\sin \Phi} \quad \text{oder bei Luft} \quad N = \frac{1}{\sin \Phi}.$$

2. Ein Flüssigkeitstropfen hinter einer Planplatte kann ebenso untersucht werden wie ein fester Körper.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 4, 1. 1878. Über die Anwendbarkeit des Totalreflektometers auf weifses Licht mit Hilfe eines Spektroskops vgl. Pulfrich, ib. 30, 487. 1887. Z. S. f. Instr. 1887, 55. Über eine Abänderung des Verfahrens durch Anwendung einer gläsernen Halbkugel anstatt der Flüssigkeit (Krystallrefraktometer nach Abbe) s. Czapski, Z. S. f. Instr. 1890, 246 u. 269.

III. Mit dem Refraktometer (Abbe).

Das Abbe'sche Refraktometer hat ein drehbares Doppelprisma *P* aus schwerem Glase, zwischen dessen Trennungsflächen man zunächst einen Tropfen der zu untersuchenden Flüssigkeit bringt. Man legt hierzu das Instrument um, schiebt das eine Prisma ab (Vorsicht! das weiche Glas ist leicht verletzbar), und nach Aufbringen der Flüssigkeit wieder auf. Lichtstrahlen, welche der Spiegel *S* auf das Prisma wirft, werden, wenn sie über ein gewisses Mafs schräg auf die Flüssigkeitsschicht fallen, total reflektirt, so dafs man bei richtiger Neigung der Prismen in dem auf Parallelstrahlen eingestellten Fernrohr das Gesichtsfeld scharf abgegrenzt sieht, wenn man z. B. Natriumlicht anwendet. Die Grenze wird auf das Fadenkreuz eingestellt, welches man vorher durch den Okularauszug deutlich sichtbar gemacht hat. Die Teilung auf dem Kreisbogen *K* gibt an dem Index der Alhidade direkt das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit für Natriumlicht an.



Unter Anwendung gewöhnlichen weifsen Lichtes erhält man folgendermafsen zugleich die Dispersion der Flüssigkeit. Das Gesichtsfeld ist hier im allgemeinen gefärbt. Man stellt den Kompensator, d. h. die Trommelteilung *T*, mit welcher zwei geradsichtige Prismen sich entgegengesetzt drehen, so, dafs die Färbung einer scharfen Grenze Platz macht. Nun bringt man die Grenze auf das Fadenkreuz und liest Alhidade und Trommelteilung ab. Dann sucht man eine zweite Stellung der Trommel mit scharfer Grenze, stellt wieder ein und liest ab.

Das Mittel der beiden Alhidadenstellungen gibt das Brechungsverhältnis für Natriumlicht; die Dispersion wird nach einer jedem Instrument beigegebenen Tabelle berechnet.

Ein fester Körper wird mit einem Tropfen einer stark brechenden Flüssigkeit (Cassiaöl, Arsenbromür) unter das obere der beiden Prismen geklebt. Durchsichtige Körper werden mittels des Beleuchtungsspiegels durch Tageslicht oder Lampenlicht durchfallend beleuchtet. Andere erleuchtet man auffallend

von der Seite. Einiges Probiren wird die Grenze deutlich sichtbar liefern.

Als Probe für die Richtigkeit, event. für die Korrektion der Teilungen dienen bekannte Flüssigkeiten (Tab. 20), insbesondere das Wasser oder eine bekannte Glas- oder Bergkrystallplatte (cf. II). Die Alhidade mufs mit den Prismen sehr fest verbunden sein. Eine Unsicherheit liegt für manche Flüssigkeiten in der Temperatur.

Vgl. Abbe, Apparate z. Best. des Brechungsvermögens, Jena 1874 und Sitz.-Ber. d. Jen. Ges. f. Med. u. Nat. 1879, Febr. 21.

IV. Mit dem Refraktometer nach Pulfrich.

Das Instrument benutzt nicht eigentlich totale Reflexion, sondern streifenden Eintritt, was aber auf dasselbe hinauskommt. Die Flüssigkeit wird auf die Oberfläche eines Glaswürfels gebracht, über welchen zu diesem Zweck ein Glascylinder gekittet ist. In $^3/_4$ bis 1m Entfernung, ein wenig höher als die obere Glasfläche, stellt man eine Natriumflamme auf und vereinigt ihre Strahlen mit einer Sammellinse auf dem unteren Rand des Cylinders. Auf die Grenze zwischen hell und dunkel richtet man von unten das vertikal drehbare, auf unendlich eingestellte Fernrohr, dessen Teilkreis den Grenzwinkel α des Austritts mit der Normalen auf der Austritts-Glasfläche gibt. Hat das Glas das Brechungsverhältnis N, so hat die Flüssigkeit

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}.$$

Es mufs $n < N$ sein. Zwei Prismen $N = 1{,}615$ bez. 1,78 sind gebräuchlich. Eine Tabelle für n wird beigegeben. Die richtige Orientirung der Teilung kann mit Wasser ($n_{17^\circ 5} = 1{,}3332$) geprüft werden.

Es ist $N/n = 1/\sin\Phi$ und $N = \sin\alpha/\sin(90 - \Phi) = \sin\alpha/\cos\Phi = \sin\alpha/\sqrt{1 - n^2/N^2}$, also $N^2 - n^2 = \sin^2\alpha$ und $n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}$.

Mit einer Heizvorrichtung kann in höherer Temperatur beobachtet werden. Eine Tabelle korrigirt die gleichzeitige Änderung der Brechung im Glase.

Mittels einer Trennungsfläche aus schwarzem Glase können

mehrere Flüssigkeiten gleichzeitig, also bei derselben Temperatur beobachtet werden.

Feste ebene Körper lassen sich durch Vermittelung eines stärker brechenden Flüssigkeitstropfens auf die Glasfläche bringen und ebenso untersuchen. Gepulverte feste Körper können untersucht werden, indem man sie auf der Glasfläche mit einem Flüssigkeitsgemisch (Alkohol, Äther, Aceton, Benzol, Toluol, Bromnaphtalin) übergiefst, welches man durch Ausprobiren abändert, bis die dem festen Körper entsprechende Lichtgrenze scharf erscheint (Le Blanc).

Pulfrich, Z. S. f. Instr. Die einfache Form (Wolz in Bonn) 1888, 47; die vollkommenere (Zeifs, Jena) 1895, 389. Auch Pulfrich, Das Totalreflektometer etc. Leipz. 1890. Le Blanc, Z. S. f. phys. Ch. 10, 433. 1892. Vgl. auch Traube, Physikalisch chemische Methoden S. 164.

V. Mit dem Spektrometer.

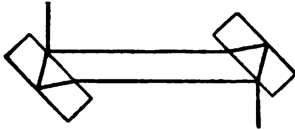
1. Das Verfahren II läfst sich mit dem Spektrometer (**39**) ausführen, wenn man einen Flüssigkeitstrog mit Planwand fest aufstellen kann, in welchem die Objektplatte mit dem Teilkreise drehbar ist.

2. Auf eine sehr dünne gröfsere planparallele Platte in einem Flüssigkeitstrog mit zwei parallelen ebenen Wänden läfst man paralleles Licht vom Spalt (**39**, 1) senkrecht zur einen Wand einfallen und visirt mit dem Fernrohr durch den Körper nach dem Spalt. Diejenigen beiden schrägen Stellungen des Körpers, in denen das Spaltbild plötzlich (bei Anwendung homogenen Lichtes) verschwindet, liegen um 2Φ auseinander. Bringt man zwischen den Trog und das Fernrohr noch ein Prisma, am bequemsten ein geradsichtiges, und beleuchtet den Spalt mit Sonnenlicht, so erscheint ein Fraunhofer'sches Spektrum (S. 179). Durch Drehung der Objektplatte kann man die Grenze der totalen Reflexion auf irgend eine Linie einstellen. Das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit gegen Luft kann ebenso mittels einer dünnen Luftschicht in einem Glaskästchen mit planparallelen Wänden bestimmt werden. Für die Rechnung gelten die Formeln aus II.

Terquem und Trannin, Pogg. Ann. 157, 302. 1876. E. Wiedemann ib. 158, 375.

40a. Bestimmung kleiner Änderungen des Brechungsverhältnisses mit dem Interferentialrefraktor (Jamin).

Zwei gleiche, dicke (z. B. 3 cm), planparallele, am besten rückseitig versilberte Glasplatten stehen sich parallel gegenüber, mit der Verbindungslinie ihrer Mitten einen Winkel von 45—50° bildend. Ein auf I fallender Lichtstrahl liefert durch Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche zwei Strahlen. Durch Reflexion an II liefert jeder Strahl wieder zwei Strahlen, von denen die beiden gezeichneten mit einander austreten und, sobald die Platten etwas verdreht werden, ein System von Interferenzstreifen erzeugen.



In den Weg der beiden Strahlen zwischen den Platten mögen zwei optisch gleiche Körper geschoben sein. Nimmt man nun an dem Wege des einen Strahles Änderungen vor, etwa bezüglich Temperatur, Druck, Koncentration etc., während man die Streifen im Auge behält, so wandern dieselben. Aus ihrer Verschiebung, der Länge der eingeschalteten Körper und der Wellenlänge des Lichtes läfst sich die der Zustandsänderung entsprechende Änderung des Brechungsexponenten bestimmen (II).

I. Aufstellung des Apparates.

Die beiden Platten sind auf einer horizontalen Ebene sehr fest aufgestellt, entweder gemeinsam auf schwerem Stativ montirt, oder, um gröfseren Raum zu bieten, getrennt auf besonderen Stativen.

Wird eine Natriumflamme, am besten in schwarzem Cylinder mit Fenster, etwa 50 cm vor der ersten Platte aufgestellt, so erblickt man, etwa auf unendlich akkommodirend, durch die zweite Platte die Streifen gleich oder nach kleinen Drehungen der Platte um eine Vertikal- und eine Horizontalaxe. Man dreht, bis die Streifen scharf, parallel und gerade erscheinen; auf ihre Richtung kommt es häufig nicht an. Meist wird man jedoch die vertikale oder horizontale (cf. S. 189 u. 190) Richtung vorziehen.

Zum Beobachten dient am besten ein festes Fernrohr mit einer spaltförmigen Blende vor dem Objektiv, die Spaltrichtung senkrecht zu den Streifen. Sollen Bruchteile der Streifenbreiten gemessen werden (es kann dazu auch ein Kompensator dienen, siehe am Schlufs), so ist ein Okularmikrometer zweckmäfsig. Zu viele Streifen im Gesichtsfeld veranlassen leicht Irrtümer beim Zählen; eventuell blende man einige ab.

Nach Einführung der Versuchsröhren etc. zwischen die Platten und eventuell Abblenden der beiden äufseren Bilder werden Streifenrichtung, Streifenabstand und Fernrohr endgiltig eingestellt.

Ist Beobachtung mit weifsem Licht nötig (III), so bewirkt man zunächst mit Natriumlicht horizontale (cf. S. 190) Streifen von gröfserem Abstand. Mit weifsem Licht (durch Schliefsen des Zuges am Brenner) wird man dann durch sehr langsames Drehen der zweiten Platte um ihre Vertikalaxe farbige Streifen ins Gesichtsfeld bringen. Der in ihrer Mitte liegende farblose Streifen wird mitten ins Gesichtsfeld gebracht und das Fernrohr dann auf gröfste Deutlichkeit eingestellt.

Unter Umständen wird eine Anordnung mit parallelem weifsem Licht (Sonne) vorzuziehen sein (Quincke, Pogg. Ann. 132, 50. 1867). Die unvermeidlichen Erwärmungen des Apparates und die Temperaturschwankungen des Beobachtungsraums bewirken aber leicht ein störendes Wandern der Streifen.

Ein Trog mit Alaunlösung vor der Lichtquelle und Abkürzung der Beleuchtungszeit ist auch bei schwachen Lichtquellen anzuraten.

II. Messung bei stetiger Zustandsänderung.

Läfst sich die Änderung eines Körpers so kontinuirlich und überall gleichmäfsig vornehmen, dafs man dabei den Gang der Streifen verfolgen kann, wie z. B. bei Druckänderung in einer Flüssigkeit, der Verdünnung eines Gases u. dgl.: so zählt man einfach, um wieviele Streifenbreiten und Bruchteile derselben sich das mit homogenem Licht (Na) erzeugte Streifensystem im Fernrohre verschiebt. Ist dann

L die Länge der durchstrahlten Schicht,

λ die Wellenlänge des Lichtes (Tab. 19a),

s die Anzahl der gewanderten Streifenbreiten,

n_1 und n_0 der Brechungsexponent nach und vor der Änderung, so ist

$$n_1 - n_0 = s\lambda/L.$$

Denn wenn $\lambda_0 = \lambda/n_0$ und $\lambda_1 = \lambda/n_1$ die Wellenlängen in dem ursprünglichen und dem abgeänderten Mittel, so ist offenbar

$$s = L/\lambda_1 - L/\lambda_0 = (n_1 - n_0)\, L/\lambda.$$

III. Messung bei unstetiger Zustandsänderung.

Die Verschiebung der Streifen kann nicht immer zählend verfolgt werden (z. B. beim Auflösen eines Salzes bez. Ersetzen einer Lösung durch eine andere). Dann schlägt man folgenden Weg ein.

Man nimmt weifses Licht. Die (horizontalen) farbigen Streifen liefern durch ihr verschiedenes Aussehen das Mittel, den im Natriumlicht nicht unterscheidbaren Streifen eine Numerirung von einer dem farblosen Streifen (I) benachbarten schwarzen Franse an zu geben. Die durch die Zustandsänderung eingetretene Verschiebung dieses Nullpunktes wird gefunden, indem man bei einfarbigem Licht die zweite Platte um ihre Vertikalaxe, die Streifenverschiebung abzählend, so weit dreht, bis wieder im weifsen Licht der Nullpunktsstreifen einsteht. Dies gibt bis auf eine Korrektion die Anzahl der infolge der Änderung des Körpers gewanderten einfarbigen Streifen, aus welcher die Änderung des Brechungsexponenten wie unter II bestimmt wird.

Nur horizontale Streifen können im weifsen Licht erscheinen. Der Gangunterschied φ zweier interferirender Strahlen im Refraktor ist nämlich (Verdet-Exner l. c. am Schlufs) $\varphi = 2nd(\cos b - \cos b')$, wo d und n Dicke und Brechungsexponent der Platten, b und b' die Brechungswinkel der Strahlen in der ersten und zweiten Platte sind. Damit $\varphi = 0$, mufs $b = b'$ sein, was nur bei vertikaler gegenseitiger Neigung der Platten eintritt.

Die erwähnte Korrektion besteht in der Abänderung der im Vorigen beobachteten Streifenzahl um eine ganze Zahl; sie entspringt aus der Dispersion.

Die Messung findet, wie wir sahen, mittels Kompensation zweier sich entgegenwirkender Gangunterschiede statt, welche nicht für alle Farben gleichzeitig möglich ist, da die beiden entgegenwirkenden „Apparate“ (Refraktor und eingeschalteter Körper) die Phasenunterschiede für verschiedene Farben nicht in demselben Verhältnis einführen. Einen farblosen Streif bekommt man für denjenigen aus dem Gegeneinanderwirken

der beiden Apparate resultirenden Gangunterschied, der für alle Farben dieselbe Gröfse behält.

Führt z. B. der eine Apparat die Gangunterschiede für Rot und Blau im Verhältnis 7:9,8 ein, der andere im Verhältnis 7:10, so wird bei Einführung von 7,5 bez. 10,5 Wellenlängen mit dem ersten und —7 bez. —10 mit dem zweiten Apparat der resultirende Gangunterschied für Rot und Blau $= + 0,5$ sein. Für die übrigen Farben tritt dann im allgemeinen nahe derselbe Gangunterschied 0,5 auf, so dafs wir einen diesem entsprechenden schwarzen Streif bekommen.

Jener der Achromasie entsprechende Gangunterschied ändert sich mit dem Wachsen des kompensirten Gangunterschiedes. Die farblose Linie wandert also gleichsam auf dem mit Na-Licht erhaltenen kompensirten Streifensystem und durchläuft dabei verschiedene Helligkeiten von Schwarz zu Weifs, die der Helligkeit ihres Ortes im monochromatischen System entsprechen. Fällt sie auf einen dunkelen Streifen, so ist das farbige Streifensystem um eine schwarze Linie symmetrisch gruppirt, und wenn sie auf die Mitte eines hellen Streifens fällt, um eine weifse Linie. Der Nullpunkt unserer Streifennumerirung wandert also langsam auf dem System fort.

Vgl. Şirks, Pogg. Ann. 140, 621; 141, 393. 1870. Die Beobachtung dieser Wanderung liefert auch die Dispersionsänderung (s. Hallwachs, Wied. Ann. 47, 396. 1892).

Um die Korrektion zu ermitteln, wird bei einem Hilfsversuch der zu untersuchende Körper in genügend kleinen Intervallen abgeändert, bis die achromatische Linie schwarz erscheint. Dann ändert man weiter ab, bis die farblose Linie das nächste Mal wieder schwarz erscheint. Daraus ergibt sich die Gröfse der Zustandsänderung, bez. der entsprechenden Streifenverschiebung, für welche sich die farblose Linie um eine Streifenbreite in zu beobachtender Richtung verschiebt. Man kann dann, sobald bei einem Versuch die ganze Streifenverschiebung ermittelt ist, immer sagen, welche Nummer einer der dunkelen Nachbarstreifen der achromatischen Linie ursprünglich hatte, d. h. wie weit er vom einmal gewählten Nullpunkt absteht.

Bei einer Lösung ist die einer bestimmten Koncentrationsänderung entsprechende Wanderung der farblosen Linie von der vorausgehenden Koncentration ziemlich unabhängig.

Je nachdem sich der Nullpunkt im Sinne der Streifenwanderung verschiebt oder entgegengesetzt, ist die Nummeränderung des zur Einstellung gewählten dunklen Nachbarstreifs

der achromatischen Linie von der gesamten Streifenverschiebung abzuziehen oder zu ihr zu addiren.

Da die Bruchteile der Streifen direkt mit dem Okularmikrometer gemessen werden, so dienen die Beobachtungen mit den Streifen im weifsen Licht nur zur Ermittelung der ganzen Anzahl Verschiebungen; die Korrektion beträgt also eine ganze Anzahl Wellenlängen.

Vgl. Siertsema, De Jamin'sche Interferentialrefractor, Proefschrift, Groningen 1890; Hallwachs l. c.

Jamin'scher Kompensator. Dieser läfst sich zur Kompensirung der Gangunterschiede statt der Drehung der zweiten Platte oft vorteilhaft benutzen (s. Quincke l. c. S. 204). Für weifses Licht ist bei der empirischen Graduirung zu beachten, was oben über die Wanderung der farblosen Linie gesagt wurde.

Vgl. noch über die allg. Theorie des Apparates: Verdet-Exner, Wellentheorie d. Lichtes I, 94. 1881; Ketteler, Farbenzerstreuung d. Gase S. 29. 1865; Zehnder, Wied. Ann. 34, 91. 1888; über die Anordnung eines Interferenzrefraktors auch für Dispersion: Borgesius, Wied. Ann. 54, 221. 1895.

40b. Untersuchung optischer Inhomogeneität nach der Schlierenmethode (Toepler).

Vor eine breite Flamme oder in das konvergirende Strahlenbündel des durch eine Linse gegangenen Sonnenlichtes wird eine geradlinig (z. B. dreieckig) begrenzte Öffnung gebracht. Von der letzteren wird durch eine gute Linse in der Entfernung von einigen Metern ein reelles Bild entworfen, an dessen Ort man das Auge oder besser das Objektiv eines Fernrohrs bringt. Die Empfindlichkeit wächst mit dem Abstande des Bildes von der Linse.

Der Körper, in welchem optische Ungleichheiten beobachtet werden sollen, befinde sich dicht hinter oder vor der Linse. Auge oder Fernrohr seien auf ihn akkommodirt.

Nun wird mit einer Schneide, welche einer der Begrenzungskanten der erstgenannten Öffnung parallel ist, allmählich das Gesichtsfeld vor dem Fernrohr verdeckt. In der geeigneten Stellung treten alsdann Ungleichheiten der Raumerfüllung, welche wenn auch nur eine Spur einer Änderung der Lichtbrechung bedingen, als erhellte oder verdunkelte Teile („Schlieren“) des Gesichtfeldes hervor. Um nichts zu übersehen, benutzt man nach einander die verschiedenen Kanten jener Öffnung.

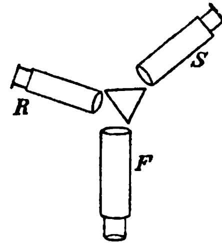
Für manche Zwecke sieht man auch ohne Abblendung bei geeigneter Augenstellung die Schlieren.

Toepler, Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode, Bonn 1864; Pogg. Ann. 131, 35 u. 180. 1867.

41. Spektralanalyse (Bunsen und Kirchhoff).

Der Spektralapparat (Spektroskop) definirt eine Farbe durch eine Skale, auf welcher die durch Brechung zerlegten Teile der Farbe erscheinen. Gradsichtige Spektroskope haben vor einem Spalt ein oder mehrere gradsichtige Prismensysteme und eine Linse oder ein Linsensystem, um den Spalt deutlich erscheinen zu lassen. Die Skale sitzt im Okular. Die brechende Kante der Prismen mufs senkrecht zur Skale und parallel dem Spalte verlaufen.

Der gewöhnliche Spektralapparat besitzt, wie das Spektrometer, Fernrohr *F* und Spaltrohr *S*, aufserdem ein Rohr *R* mit einer Mikrometerskale. Das Bild der Skale wird in der dem Fernrohre zugewandten Prismenfläche gespiegelt.



I. Einstellung des Spektralapparates.

Es ist auch die angegebene Reihenfolge der Operationen einzuhalten.

1. Der Spalt soll einem fernen Objekt entsprechen und deutlich erscheinen. Wenn die richtige Stellung des Spaltrohrs gegeben ist, so hat man nur das Fernrohr auf ein deutliches Bild des Spaltes einzustellen; sonst stelle man erst das Fernrohr auf ein fernes Objekt ein, richte es dann auf den Spalt und verschiebe diesen so, dafs er deutlich erscheint.

2. Das Prisma soll die Minimumstellung erhalten. Man beleuchtet den Spalt mit der Natronflamme, stellt das Prisma in nahezu richtiger Stellung vor die Spaltlinse, orientirt sich mit blofsem Auge ungefähr über die Richtung des austretenden Strahles und sucht das Bild des Spaltes mit dem Fernrohre. Nun dreht man das Prisma (indem man wenn nötig mit dem Fernrohre folgt), bis das Spaltbild im Fernrohr umkehrt, und stellt in dieser Lage das Prisma fest.

3. Das reflektirte Bild der Skale soll deutlich erscheinen. Die Skale wird durch eine nicht zu nahe (20 cm) aufgestellte schmale, kleine Flamme erleuchtet. Nachdem durch Drehen des Skalenrohres das Bild im Fernrohr gefunden ist, zieht man das Skalenrohr heraus, bis die Skale deutlich erscheint. Spalt und Skalenteile im Fernrohr dürfen sich bei dem Bewegen des Auges vor dem Okulare nicht gegen einander verschieben.

4. Ein bestimmter Skalenteil, bei den den Zeichnungen von Bunsen und Kirchhoff angepafsten Skalen der Teil 50, soll mit der Natriumlinie zusammenfallen. Man dreht das Skalenrohr, bis diese Stellung erreicht ist, und stellt es fest.

II. Auswertung der Skale.

Um zu wissen, welchen Punkten der Skale die den einzelnen chemischen Elementen angehörigen Linien entsprechen, genügt es, die Flammen der Stoffe einzeln zu beobachten und die Skalenteile der Linien (nebst Angabe ihrer ungefähren Helligkeit, Breite, Farbe und ihrer Schärfe) zu notiren. Bequemer ist die Anwendung der nach Bunsen-Kirchhoff's Skale veröffentlichten Abbildungen oder der auf dieselbe Skale bezogenen Tab. 19 und 19a, auf welche man die Skale des Apparates folgendermafsen reducirt.

Man beobachtet auf der Skale einige bekannte Linien an den Enden und in der Mitte des Spektrums (Sonne *a*, *D*, *F*, *G*, *H*; oder Kα, Liα, Na, Srδ, Kβ; Fig. S. 179), trägt auf karrirtes Papier die beobachteten Skalenteile als Abscissen, die entsprechenden der B.-K.'schen Skale als Ordinaten auf und verbindet die entstandenen Punkte durch eine Kurve. Selten wird diese erheblich von einer Geraden abweichen. Aus der Zeichnung findet sich dann zu einem beliebigen beobachteten Skalenteil der entsprechende der B.-K.'schen Skale als Ordinate. Wenn die Skale des Apparates der B.-K.'schen nahe kommt, was oft der Fall ist, so stellt man Na auf den Strich 50 ein und macht ebenfalls einen Satz von vergleichenden Beobachtungen. Die Kurve zeichnet man dann für die Korrektion der Skale, indem man die Unterschiede gegen die B.-K.'sche Skale als Ordinate graphisch aufträgt.

Mit Hilfe von Tab. 19a kann man auf demselben Wege der Beobachtung und graphischen Darstellung auch eine Kurve oder Tabelle entwerfen, welche die zu den Skalenteilen bei bestimmter Einstellung der Na-Linie gehörenden Wellenlängen ergibt.

Präparate. Angenehmer als das leicht verknisternde oder rasch verdampfende Kochsalz ist geglühte Soda. Reines Lithiumpräparat erhält man leicht aus Li_2CO_3, welches man wegen seiner geringen Löslichkeit mit Wasser ausschütteln kann. Für Kalium ist KNO_3 sehr rein im Handel. Strontium- und Bariumchlorid werden durch das Ausglühen selbst rein. NaCl und KCl werden, um das Zerknistern zu vermeiden, vor dem Spektralgebrauch erhitzt. — Das Anschmelzen von Perlen ist meist leichter, wenn man das Erhitzen des Platindrahtes von hinten vorschreiten läfst. Die Öse des Platindrahtes soll geschlossen sein.

III. Analyse.

Die Lichtlinien der in der Bunsen'schen Gasflamme am Platindraht verdampfenden Körper werden auf der Skale beobachtet und die Körper aus dem Zusammenfallen dieser Linien mit den Linien bekannter Stoffe erkannt. Dabei ist folgendes zu beachten. Man notire nicht nur die Lage, sondern auch die ungefähre Stärke, Breite und Schärfe der beobachteten Linien. Z. B. fallen Srβ und Liα der Lage nach zusammen; Srβ aber ist verwaschen, Liα ganz scharf. Graphisch kann man die Streifen übersichtlich darstellen, indem man überall die Lichtstärke an irgend einem Punkt der Skale als Ordinate über diesem Punkte auffafst und so die Kurven für die Spektra zeichnet (Bunsen).

Bezüglich der Unterscheidung der alkalischen Erden beachte man vorzugsweise die (lichtschwachen) charakteristischen blauen Linien von Strontium und Calcium.

Immer wird die Perle in den Saum der Flamme gebracht, der glühende feste Teil so tief, dafs er kein störendes kontinuirliches Spektrum gibt. Es ist anzuraten, dafs man einmal mit engem Spalte beobachte, um dicht neben einander liegende Linien zu unterscheiden, und dann mit weiterem Spalte zur Auffindung lichtschwacher Linien; desgleichen einmal mit kleiner

Gasflamme für die leicht verflüchtigten Stoffe (K, Li), das andere Mal mit grofser Flamme für schwer flüchtige (Sr, Ba, Ca). Die Spektra der letzteren treten oft erst nach längerer Zeit deutlich hervor. Das Schwächerwerden eines Spektrums bei längerer Dauer des Versuchs hat häufig seinen Grund darin, dafs die Chlorverbindungen durch das Glühen in die schwerer flüchtigen Oxyde verwandelt werden. Dann läfst sich momentan die Lichtstärke steigern durch Anfeuchten der Perle am Platindraht mit reiner Salzsäure. Verbindungen wie etwa die Sulfate der alkalischen Erden, die an sich kaum flüchtig, durch Salzsäure nicht verwandelt werden, glüht man vor dem Befeuchten mit Salzsäure in dem unteren, reducirenden Teil der Flamme.

Reinigung des Platindrahtes. Am wirksamsten ist wiederholtes Eintauchen in Salzsäure und reines Wasser und andauerndes Ausglühen in der Spitze der Flamme, auch vor dem Lötrohr oder in der Gebläselampe.

Falsches Licht blendet man ab: durch einen schwarzen Schirm hinter der Gasflamme, durch eine Kapsel über dem Prisma, welche den Weg nach den drei Rohren frei läfst, endlich durch eine auf das Fernrohr gehängte Blende aus dunklem Papier, welche zugleich das Schliefsen des anderen Auges überflüssig macht. Die Skale selbst wird nicht stärker beleuchtet, als zum Erkennen von Teilung und Ziffern notwendig ist! Im Interesse sehr lichtschwacher Linien mag man das Licht der Skale vorübergehend ganz abblenden.

Die Bunsen'sche Gasflamme selbst gibt, vorzüglich im unteren Teile, eine Anzahl schwacher, besonders grüner und blauer Linien. Um Irrtümer zu vermeiden, mag man sie vorher beobachten und die stärksten notiren. Den unteren Teil der Flamme benutze man überhaupt nicht zur Beobachtung. Die Natriumlinie sieht man in den meisten Präparaten; ja die Luft enthält häufig so viel Natrium, dafs die Reaktion schon in der freien Flamme hervortritt.

Ultraviolettes Spektrum. Dieses untersucht man mit dem fluorescirenden Okular (S. 180) oder durch Projektion auf einen fluorescirenden Schirm oder durch Photographie. Soll kein Licht absorbirt werden, so sind Quarz- oder Flufsspat- anstatt Glas-Präparate anzuwenden. S. auch Reflexionsgitter.

Absorptionsspektra. Von Bedeutung kann auch die Spektralanalyse weifsen Lichtes sein, welches durch farbige Körper, insbesondere Lösungen, hindurchgegangen ist. Scharfe Linien treten hier selten auf. Über die Messung der Lichtstärke im Spektrum siehe **47a**, III.

Vergleichung zweier Spektra. Mit einem Reflexionsprisma, welches den halben Spalt bedeckt, kann man zwei Spektra über einander entwerfen. Auch kann man dieselben abwechselnd erzeugen und die gegenseitige Lage der Linien mit einem Fadenmikrometer im Okular bestimmen. Sonnenspektrum bez. Eisenspektrum sind als Normalspektra geeignet.

Genau untersucht von Kayser u. Runge, Abh. d. Berl. Akad. 1890 Rowland, Astronomy and Astrophysics 12, 231. 1893.

Mehrere Prismen (Kirchhoff, Angström). Man dreht dieselben, mit dem ersten anfangend, jedes in die Stellung der Minimalablenkung (S. 193) und achtet darauf, dafs kein Licht vorbei geht.

Rowland'sches Reflexionsgitter. Über die Anordnung s. **37d**. Das Fernrohr umfafst hier und im vorigen gleichzeitig nur einen Teil des Spektrums. Über die Auswertung der Wellenlängen der Linien s. **42**.

Photographie des Spektrums. Über empfindliche Platten für die verschiedenen Farben vgl. Vogel, d. Photogr. farbiger Gegenstände, Berlin 1888. Aufnahmen im äufsersten Ultraviolett verlangen luftfreie Spektralapparate und Platten ohne Gelatine; Schumann, Wien. Ber. 102, 415 u. 625. 1893; Beibl. 1894, 187. Über Photographiren mit dem Rowland-schen Gitter s. Kayser, Spektralanalyse in Winkelmann's Handbuch.

Im Ultrarot kann man photographiren, indem man eine Platte mit Balmain'scher Leuchtfarbe anstrahlen läfst, die vorher zu schwachem Leuchten angeregt worden ist. Die ultraroten Strahlen schwächen das Leuchten ab. Dann legt man die Platte auf eine gewöhnliche Bromsilberplatte, auf welcher das Spektrum sich reproducirt. Lommel, Wied. Ann. 40, 681. 1890.

42. Wellenlänge eines Lichtstrahles.

I. Aus dem Ablenkungswinkel durch ein Beugungsgitter (Fraunhofer).

Auf den Tisch des Spektrometers (**39**) kommt eine Glasplatte mit feiner Gitterteilung (Nobert'sches Gitter), die Teilstriche dem Spalte parallel, die Platte senkrecht zum Spaltrohr,

die geteilte Fläche dem Fernrohr zugewandt. Fernrohr und Spaltrohr werden zuvor auf unendlich eingestellt (**39**, 1). Homogenes Licht vorausgesetzt, wird bei passender Stellung des Fernrohrs dann aufser dem mittleren hellen Bild des Spaltes ein erstes, zweites u. s. w. abgelenktes schwächeres Bild auf jeder Seite beobachtet. Ist l die Gitterkonstante, d. h. die Länge des Skalenteiles auf der Glasplatte, bedeuten $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \cdots$ die Ablenkungswinkel der Bilder gegen das mittelste Bild, so ist die Wellenlänge der Lichtsorte

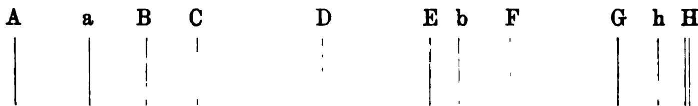
$$1) \qquad \lambda = l \sin \delta_1 = \tfrac{1}{2} l \sin \delta_2 = \tfrac{1}{3} l \sin \delta_3 \text{ u. s. w.}$$

Denn in jeder von diesen Richtungen unterscheiden sich die Wege von den einzelnen Gitteröffnungen zum Fernrohr um ganze Vielfache einer Wellenlänge von einander. Die Lichterschütterungen, welche das (auf Parallelstrahlen eingestellte) Fernrohr treffen, sind also in gleichem Schwingungszustande und summiren sich zu einem Bilde. Jede andere Richtung enthält gebeugtes Licht in unregelmäfsigen Abständen von den Öffnungen und deswegen in den verschiedensten Schwingungszuständen, die sich bei der Vereinigung durch das Fernrohr gegenseitig vernichten.

Die genau senkrechte Stellung der Gitterplatte ist dadurch charakterisirt, dafs zusammengehörige Seitenbilder bei dieser Stellung den kleinsten Abstand haben.

Als Längeneinheit für Lichtwellen pflegt man $\mu\mu = 10^{-6}$ mm oder auch 10^{-7} mm („Angström-Einheit") zu wählen.

Beugungsspektrum. Nicht homogenes Licht wird durch das Gitter in Spektra zerlegt, in denen nach obigen Formeln das Licht von gröfserer Wellenlänge (rot) am stärksten abgelenkt erscheint. Bei Sonnenlicht, in welchem zur Definition und Einstellung der Farbe die Fraunhofer'schen Linien geeignet



sind, ist das erste Spektrum und der gröfste Teil des zweiten rein; von da an greifen die Spektra übereinander. Im Beugungs- oder „Normalspektrum" (Fig.) ist das Licht anders verteilt als im Dispersionsspektrum (S. 179), in welchem der brechbarere Teil weiter ausgedehnt erscheint.

II. Aus der Koincidenz zweier Wellenlängen in den Gitterspektren verschiedener Ordnung.

Sind in den Spektren *m*ter bez. *n*ter Ordnung die Wellenlängen λ_m bez. λ_n gleich abgelenkt, so ist nach den Gleichungen 1) $m \cdot \lambda_m = n \cdot \lambda_n$ also

$$\lambda_m : \lambda_n = n : m.$$

Die Ordnungszahlen *m* und *n* sind ganze Zahlen, lassen sich also, falls sie nicht bekannt sind, aus einer genäherten Kenntnis von λ_m und λ_n ableiten. Zu dem Zweck mifst man nach Abblenden des übrigen Spektrums die Ablenkungen der beiden Lichter durch ein Prisma von bekannter Dispersion.

So kann man durch verschiedene Kombinationen die Wellenlängen, auch im Ultraviolett und Ultrarot (S. 196, 197), auf wenige genau gemessene (Tab. 19a) zurückführen. Kleine Unterschiede in den Ablenkungen werden mikrometrisch subjektiv oder in photographischen Aufnahmen gemessen.

Langley, Wied. Ann. 22, 598. 1884.

III. Durch Talbot'sche Streifen im Spektrum.

Die Pupille wird vor einem Spektralapparat von der Seite des Violett her zur Hälfte mit einem dünnen Blättchen von der Dicke *d* (0,2 mm etwa) bedeckt. Dadurch entstehen Streifen, deren gröfste Dunkelheit an den Orten liegt, wo der Gangunterschied der durch die Luft und das Blättchen gegangenen Wellen ein ungerades Vielfaches von $^1/_2$ beträgt.

Dicke und Brechungsverhältnis der Platte für eine Farbe (z. B. Fraunhofer'sche Linie) von der Wellenlänge λ seien *d* und *n*. Dann ist die Wellenlänge in der Platte $= \lambda/n$ und der obige Gangunterschied $= (n-1)d/\lambda$. Für eine kleinere Wellenlänge λ' gelte n', also der Gangunterschied $(n'-1)d/\lambda'$. Die Anzahl *p* der Streifenbreiten zwischen den beiden Farben ist gleich der Differenz der beiderseitigen Gangunterschiede $p = d[(n'-1)/\lambda' - (n-1)/\lambda]$. Sind d, λ, n und n' (40) bekannt, so kommt hieraus

$$\lambda' = \frac{n'-1}{p/d + (n-1)/\lambda}.$$

Ebenso läfst sich, wenn λ, n, λ' und n' bekannt sind (Tab. 19a), die Dicke *d* ermitteln. Ist dies z. B. im sichtbaren

Spektrum geschehen, so lassen sich nachher Wellenlängen im Ultrarot oder Ultraviolett bestimmen.

Esselbach, Pogg. Ann. 98, 513. 1856, nach Helmholtz.

IV. Durch Umkehrung der Fizeau'schen Methode für Ausdehnungskoefficienten.

Mittels zweier nahe paralleler Oberflächen zweier Glasplatten sei ein System von Interferenzstreifen bewirkt. Man verschiebt die eine Platte senkrecht zu sich selbst um eine gemessene Strecke a. Wenn dadurch die Streifen um k Streifenbreiten wandern, so ist

$$\lambda = 2a/k.$$

Michelson, Journ. de phys. (3) 3, p. 5. 1894.

V. Aus Newton'schen Ringen.

Eine Kugelfläche vom grofsen Krümmungshalbmesser r (**43**) liege auf einer Planplatte. Der $p$te, bei senkrechter Ansicht beobachtete Ring habe den Halbmesser a_1, der $(p+k)$te den Halbmesser a_2. Dann ist die Wellenlänge des betreffenden Lichtes

$$\lambda = (a_2^2 - a_1^2)/(kr).$$

Diese Formel kann man, wenn λ bekannt ist (589,3 $\mu\mu$ für Na), auch benutzen, um den Halbmesser r zu bestimmen.

43. Messung eines Krümmungshalbmessers.

I. Mit dem Sphärometer.

Das Sphärometer (**18**, 7) wird zuerst auf einer als eben bekannten (**39**, 8) Fläche und dann auf der zu messenden Fläche eingestellt. Die Stellungen der mittelsten Spitze bei beiden Versuchen unterscheiden sich von einander um eine Höhe h.

Es sei ferner l die Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches die drei festen Spitzen als Eckpunkte hat. Man mifst l am einfachsten, indem man die Sphärometerspitzen auf Papier abdrückt. Unterscheiden die drei Seiten sich um ein weniges, so darf man den Mittelwert einsetzen. Der gesuchte Krümmungshalbmesser R ist

$$R = \tfrac{1}{6}\, l^2/h + \tfrac{1}{2} h.$$

Denn wenn H die Höhe in dem von den Seiten l gebildeten Dreiecke, so ist $2Rh = \frac{4}{9}H^2 + h^2$. Da ferner $H^2 = \frac{3}{4}l^2$, so folgt obiger Ausdruck.

Neuere Sphärometer haben anstatt der Meſsschraube einen Maſsstab, an welchem die Verschiebungen der Spitze abgelesen werden; auſserdem anstatt der drei Basisspitzen einen Kreis mit scharfer Kante vom Radius r. Dann ist

$$R = \tfrac{1}{2}(r^2/h + h).$$

Bamberg, Z. S. f. Instr. 1887, 297; Abbe, ib. 1892, 307.

II. Durch Spiegelung (R. Kohlrausch).

Anwendbar auf spiegelnde, nicht zu schwach gekrümmte, wenn auch kleine Flächen. Zwei kleine Lichter werden in nicht zu kleiner Entfernung A vor dem Mittelpunkt der aufrecht stehenden Fläche im gegenseitigen Abstande L aufgestellt und mitten zwischen denselben ein Fernrohr, welches auf die Fläche eingestellt wird. Dicht vor der Fläche parallel mit der Verbindungslinie der Lichter wird ein kleiner, am besten auf Glas geteilter Maſsstab angebracht. Die Lichter geben zwei in der Fläche reflektirte Bilder, deren Abstand l auf dem kleinen Maſsstabe mit dem Fernrohre beobachtet wird. Der Krümmungshalbmesser ist

bei einer konvexen, bei einer konkaven Fläche

$$r = \frac{2Al}{L-2l} \qquad r = \frac{2Al}{L+2l}.$$

Je geringer die Krümmung ist, desto gröſser muſs die Entfernung A im Verhältnis zu L genommen werden, damit diese Formeln giltig sind. Auch würden in kleiner Entfernung die Bilder nicht mit dem Maſsstab gleichzeitig deutlich gesehen werden. Durch Verkleinerung der Öffnung des Fernrohrobjektives vermindert man diesen Übelstand.

Als Lichter sind Benzinflämmchen zweckmäſsig. Mit geringem Fehler mag man auch die Ränder eines Fensters nehmen, vor welchem man das Fernrohr aufstellt.

Genauer und bequemer ist anstatt Maſsstab und Fernrohr das Helmholtz'sche Ophthalmometer (**18b**).

Bei der Bestimmung von Linsen entstehen auch Bilder von der Hinterfläche. Bei Bikonkav- oder Bikonvexlinsen sieht man leicht an der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, welche die richtigen sind. Durch Schwärzen der hinteren Fläche fallen die falschen Bilder fort.

Beweis für eine konvexe Fläche. Der Abstand a des hinter der Kugelfläche entstehenden subjektiven Bildes der Verbindungslinie L der Lichter von der Fläche ist gegeben durch $1/a = 1/A + 2/r$, woraus $a = Ar/(2A+r)$. Andrerseits ist offenbar die Länge λ jenes Bildes gegeben durch $\lambda : L = a : A$, also $\lambda = La/A$.

Das Bild λ erscheint auf den Mafsstab projicirt mit der Länge $l = \lambda A/(A+a) = La/(A+a)$, woraus durch Einsetzen obigen Wertes von a wird $l = \frac{1}{2} rL/(A+r)$, oder $r = 2Al/(L-2l)$. Analog für Hohlflächen.

III. Schwach gekrümmte Flächen.

Ein Fernrohr wird so eingestellt, dafs ein Gegenstand (etwa eine Teilung), der sich im Abstande A vor dem Objektiv befindet, deutlich erscheint. Mit dem so eingestellten Fernrohr werde in dem zu untersuchenden Spiegel das Bild eines Objektes deutlich gesehen, wenn der Abstand des letzteren vom Spiegel $= a$, derjenige des Objektives vom Spiegel $= e$ ist. Dann findet man den Krümmungshalbmesser

$$r = 2a \frac{A-e}{A-e-a}.$$

e mag etwa $= \frac{1}{2} A$ gewählt werden.

Positives r bedeutet Hohlspiegel, negatives r Konvexspiegel.

Zur Erkennung des Deutlichsehens dient die Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs.

Vgl. auch die Methode **42** V mit Newton'schen Ringen.

IV. Aus der Brennweite.

Mit geringen Abänderungen läfst sich nach **44**, 1 und 3—6 die Brennweite eines konkaven, nach **44**, 9 diejenige eines Konvexspiegels ermitteln. Der Krümmungshalbmesser ist gleich der doppelten Brennweite.

V. Prüfung von Planflächen.

Vgl. das Verfahren **39**, 8. Ferner kann man z. B. ein auf sehr grofse Entfernung eingestelltes Fernrohr benutzen, mit welchem man das Spiegelbild eines ebenso weiten Objektes in der Fläche betrachtet, wenn diese nahe vor das Objektiv gehalten wird. Das Bild darf keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigen. Ein geübtes Auge kann diese Untersuchung auch unbewaffnet mit ziemlicher Schärfe ausführen.

Einen kleinen Planspiegel prüft man am einfachsten, indem man mit ihm ein Spiegelbild der Sonne auf eine ferne Wand wirft. Dasselbe mufs rund sein und den scheinbaren Durchmesser der Sonne zeigen. Die Prüfung ist sehr empfindlich.

Besitzt man endlich bereits ein Planglas, so lege man dasselbe auf die zu prüfende Fläche und beleuchte mit Natriumlicht. Die entstehenden Interferenzstreifen müssen geradlinig und parallel verlaufen.

44. Brennweite.

Brennpunkt einer Linse ist der Punkt, in welchem zur Axe der Linse parallel einfallende Strahlen nach dem Austritt sich schneiden. Der Abstand des Brennpunktes von der Linse, streng genommen von der zugehörigen Hauptebene der Linse (s. unten), ist die Brennweite. Bei Zerstreuungslinsen gibt man der Brennweite das negative Vorzeichen. Nummer einer Brille nennt man ihre Brennweite, in der Regel in Pariser Zollen ausgedrückt.

Die Stärke einer Linse wird durch die reciproke Brennweite bestimmt; von einer Linse oder einer Linsenkombination, welche die Brennweite f Meter besitzt, sagt man, sie habe eine Stärke von $1/f$ Dioptrien. Die Stärke eines Systems von hintereinander gesetzten Linsen ist gleich der Summe (Vorzeichen!) der einzelnen Stärken, wenn die Dicke des Systems klein ist gegen die Brennweiten.

Die beiden Krümmungshalbmesser r und r' einer Linse, ihre Brennweite f und das Brechungsverhältnis n der Glassorte stehen in der Beziehung:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \quad \text{oder} \quad n = \frac{1}{f}\frac{rr'}{r+r'} + 1.$$

Ist eine Fläche konkav, so wird ihr Krümmungshalbmesser mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Die Brennweite ist für verschiedene Farben verschieden, mufs daher streng genommen auf eine bestimmte Farbe (Sodaflamme, rotes Glas) bezogen werden. Ferner haben bei gewöhnlichen Linsen die äufseren Ringe kleinere Brennweiten als die inneren Teile, so dafs, wenn man die ganzen Linsen untersucht, unscharfe Bilder entstehen.

Centrirung. Bei allen Versuchen werde die Linsenaxe (die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte) in die Richtung vom Objekt nach dem Bilde gebracht, weil andernfalls der Bildabstand zu klein gefunden wird. Die Axenrichtung findet man z. B. mit einer kleinen Flamme in geeignetem Abstande vor der Linse: liegen beide, in der Vorder- und Rückfläche gesehene Spiegelbilder in jeder durch Auge, Flamme und Linsenmittelpunkt gehenden Ebene, so steht die Flamme in der Axe.

1. Mit der Sonne. Die Brennweite einer Sammellinse kann gemessen werden, indem man mit derselben ein Sonnenbild auf einem Stückchen Glas erzeugt und letzteres so stellt, dafs das Bild scharf begrenzt ist. Der Abstand des Glases von der Linse ist die Brennweite.

2. Mit dem Fernrohr. Ein Fernrohr wird auf Deutlichsehen eines sehr entfernten Gegenstandes eingestellt. Visirt man darauf mit dem Fernrohr durch die vor sein Objektiv gebrachte Linse nach einem ebenen Objekt (z. B. Papier mit Schrift), so wird dieses bei einem Abstande von der Linse gleich der Brennweite deutlich erscheinen.

3. Aus Gegenstands- und Bildweite. Im Abstande a von der Linse stellt man ein Licht oder besser einen Blechschirm mit einem Drahtkreuz in einer Öffnung vor einer Flamme, auf der anderen Seite der Linse einen weifsen Schirm in einem solchen Abstande b auf, dafs ein deutliches Bild des Lichtes oder des Kreuzes entsteht. Über Centrirung des Lichtes siehe oben. Wenn f die Brennweite, so ist $b = f \cdot a/(a-f)$ oder

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad f = \frac{ab}{a+b}.$$

4. Durch Verschiebung (Bessel). Befindet sich ein Gegenstand in einem konstanten gröfseren Abstande l von einem Schirm, so gibt es zwei Stellungen einer Linse zwischen beiden, in denen dieselbe ein deutliches Bild entwirft. Die Verschiebung e zwischen diesen beiden Stellungen, welche sich genauer messen läfst, als Abstände von der Linse, betrage die Länge e. Dann ist die Brennweite der Linse

$$f = \tfrac{1}{4}(l - e^2/l).$$

Als Gegenstand kann ein Fadenkreuz dienen und anstatt des Schirmes ein eben solches mit Lupe, wobei das Zusammen-

fallen von Objekt und Bild aus der Abwesenheit der Parallaxe beurteilt wird.

Beweis. Die Abstände des Objektes und des Bildes von der Linse sind bei diesen Versuchen offenbar $\frac{1}{2}(l+e)$ und $\frac{1}{2}(l-e)$. Hieraus folgt $1/f = 2/(l+e)+2/(l-e) = 4l/(l^2-e^2)$, q. e. d.

5. Aus der Gleichheit von Objekt und Bild. Wenn die Gröſse des Bildes gleich der des Gegenstandes ist, so ist ihr gegenseitiger Abstand gleich der vierfachen Brennweite.

Über dickere Linsen oder Linsensysteme. Bis hierher ist angenommen, daſs die Dicke der Linse gegen die Brennweite vernachlässigt werden kann. Im anderen Falle hat man die Brennweite und die Abstände a und b von der zugehörigen Hauptebene der Linse oder des Systemes von Linsen zu rechnen. Eine Hauptebene würde durch Konstruktion erhalten werden, wenn man von einem mit der Axe parallel einfallenden Strahl die Stücke vor dem Eintritt und nach dem Austritt verlängert, bis sie sich schneiden, und durch den Schnittpunkt eine zur Axe der Linse senkrechte Ebene legt. Der Schnittpunkt der Hauptebene mit der Axe heiſst Hauptpunkt. Eine Linse oder ein Linsensystem hat zwei Hauptpunkte, zu denen, wenn beiderseitig sich dasselbe Mittel befindet, die Brennpunkte symmetrisch liegen, so daſs es nur eine Brennweite gibt. Bei Linsen aus gewöhnlichem Glase ($n = 1{,}5$), deren Krümmungshalbmesser groſs gegen die Dicke d sind, liegen die beiden Hauptpunkte im Abstande $\frac{1}{3}d$ von einander, und zwar, wenn beide Oberflächen gleich konkav oder gleich konvex sind, je um $\frac{1}{3}d$ von den Oberflächen entfernt. Eine plankonvexe oder plankonkave Linse hat ihren einen Hauptpunkt in der gekrümmten Fläche, der andere liegt von da um $\frac{1}{3}d$ nach innen.

Die folgenden Methoden geben die richtigen Brennweiten von Linsen oder von Systemen, von den zugehörigen Hauptpunkten gerechnet.

6. Aus der Gröſse stark vergröſserter oder verkleinerter Bilder. Man stelle um ein Weniges auſserhalb des Brennpunktes einen hell beleuchteten Maſsstab auf, am besten von Glas mit durchfallendem Licht. Gegenüber, auf der anderen Seite der Linse, wird ein weiſser Schirm in einem solchen Abstande von der Linse aufgestellt, daſs auf ihm das stark vergröſserte Bild der Teilung deutlich erscheint. Ist l die Länge eines Skalenteiles, L die Länge seines Bildes, A der Abstand des Schirmes von der Linse, so ist die Brennweite f

$$f = A\frac{l}{L+l}.$$

Umgekehrt kann man einen scharf begrenzten Gegenstand in gröfserer Entfernung von der Linse aufstellen und das von ihm auf der anderen Seite der Linse entworfene, nun stark verkleinerte Bild messen. Zu diesem Zwecke dient ein Mikrometer auf Glas mit vorgesetzter Lupe, welches so gestellt wird, dafs Mikrometerteile und Bild des Gegenstandes durch die Lupe deutlich gesehen werden. In obiger Formel ist dann l die Länge des Bildes, L die des Gegenstandes, A des letzteren Abstand von der Linse.

Beweis. Die Abstände A und a des Bildes und des Gegenstandes von den zugehörigen Hauptebenen der Linse hängen durch die Formel $1/A + 1/a = 1/f$ zusammen. Die Gröfsen beider verhalten sich $L:l = A:a$. Durch Einsetzen von $1/a = L/(Al)$ in die erste Gleichung entsteht obiger Ausdruck. Da A gegen die Dicke der Linse grofs ist, so kann man anstatt des Abstandes von der Hauptebene merklich denjenigen von der Linse setzen.

7. Verfahren von Meyerstein.

a) Für Linsen gröfserer Brennweite, z. B. Fernrohrobjektive, fixire man auf einer hinreichend langen Holzschiene zwei in mm geteilte kleine durchsichtige Glasskalen in einer gegenseitigen Entfernung e, welche merklich gröfser ist als die vierfache Brennweite. Die geteilten Seiten der Skalen seien einander zugewandt. Man verschiebe die Linse zwischen den Skalen, bis das (verkleinerte) Bild der ersten in die Ebene der zweiten fällt, was man an dem Verschwinden der Parallaxe erkennt, und bestimme mit einer Lupe das Gröfsenerhältnis: Bild: Objekt $= v$; zugleich messe man den Abstand l_1 eines mit der Linse fest verbundenen Punktes — z. B. am Rande der Fassung — von dem Objekte. Nach Umkehrung der Linse wiederhole man die Operationen; aus der Übereinstimmung der beiden v, aus denen das Mittel genommen wird, kann man auf die Genauigkeit der Einstellungen schliefsen. Der Abstand des mit der Linse fest verbundenen Punktes vom Objekt sei nun l_2, so ist die Brennweite

$$f = \frac{l_1 + l_2 - e}{1/v - v}.$$

Beweis. Sind a und b die zusammengehörigen Abstände des Objekts und des Bildes von den Hauptpunkten (S. 205), so gilt $f = ab/(a+b) = (a-b) \cdot ab/(a^2 - b^2)$. Der Abstand des Objekts vom Mittelpunkt der beiden Hauptpunkte ist offenbar $= \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, also $e - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$

der Abstand des Bildes von demselben Mittelpunkt. Die Differenz dieser beiden Abstände ist aus Symmetriegründen gleich der Differenz $a-b$, also $a-b=l_1+l_2-e$. Andrerseits folgt aus $v=b/a$

$$1/v-v=a/b-b/a=(a^2-b^2)/ab.$$

b) Bei Fernrohr- und Mikroskop-Okularen, sowie bei Mikroskop-Objektiven ist das Bild zu klein, um wie oben gemessen zu werden; hierzu kommt, daſs der Ort des Bildes oft im Innern des Systems liegt.

Man benutzt daher mit Vorteil ein horizontal gelagertes Mikroskop von langer Sehweite mit Okularmikrometer und als Objekt, in etwa $^1/_2$ m Entfernung, rechteckige Klötze geeigneter Gröſse oder farbige Papierscheiben auf weiſsem Hintergrund. v folgt sofort aus der Breite des Objektes, der Gröſse des Bildes und dem Werte eines Skalenteiles. l_1 und l_2 lassen sich leicht direkt abmessen. Um auch e zu erhalten, bringe man nach Entfernung der Linse eine Nadelspitze in die deutliche Sehweite des Mikroskopes und messe ihre Entfernung vom Objekt.

Vgl. Meyerstein, Wied. Ann. 1, 315. 1877.

8. Verfahren von Abbe. Man bestimme für eine Lage des Objektes die Vergröſserung v (Bildgröſse/Objektgröſse), verschiebe das Objekt um eine gemessene Strecke $\varDelta$, und finde nun die Vergröſserung v'. Dann ist die Brennweite

$$f=\frac{\varDelta}{1/v'-1/v}.$$

Aus $v=b/a$ und $1/f=1/a+1/b$ folgt $a=f(1+1/v)$. Ebenso

$$a+\varDelta=f(1+1/v').$$

Also $\varDelta=f(1/v'-1/v)$ q. e. d.

Die Hilfsmittel sind die gleichen wie unter 7. Die Methode besitzt den Vorteil, daſs eine Bestimmung des Bildortes nicht nötig ist.

Über Abbe's Focometer vgl. Czapski, Z. S. f. Instr. 1892, 185.

9. Zerstreuungslinsen, welche kein objektives Bild geben, werden mit einer stärkeren Sammellinse von bekannter Brennweite F' verbunden und nun die gemeinschaftliche Brennweite F beider zusammen nach einer der vorhin angegebenen Methoden gemessen. Dann findet sich die negative Brennweite f der Konkavlinse allein aus der Formel

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{F'} \quad \text{oder} \quad f=\frac{F\cdot F'}{F'-F}.$$

10. Endlich läfst sich die Brennweite einer Zerstreuungslinse auch dadurch ermitteln, dafs man die Gröfse des Zerstreuungsbildes mifst, welches die Linse von der Sonne auf einem Schirm in gegebenem Abstande entwirft. Bedeutet nämlich d den Durchmesser der Linsenöffnung, D den Durchmesser des Zerstreuungsbildes, A den Abstand des Schirmes von der Linse, so ist die Brennweite

$$f = \frac{Ad}{d - D + 0{,}0094 \cdot A};$$

0,0094 ist die doppelte Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne. Bei schärferen, nicht zu kleinen Linsen kann man $0{,}0094 \cdot A$ vernachlässigen und hat die einfache Regel: derjenige Abstand des Schirmes, bei welchem das Zerstreuungsbild den doppelten Durchmesser der Linse hat, ist die Brennweite.

11. Brennweite schwacher Linsen. (Vgl. **43** III.) Ein Fernrohr sei auf ein Objekt im Abstande A vom Objektive deutlich eingestellt. Man bringt die Linse dicht vor das Objektiv und regulirt den gemeinsamen Abstand vom Objekte so, dafs letzteres wieder deutlich erscheint. Dies möge für den Abstand A' der Fall sein. Dann ist die Brennweite der Linse

$$f = \frac{AA'}{A - A'}.$$

Negative Brennweite bezeichnet eine Zerstreuungslinse.

Das Deutlichsehen wird an der Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz erkannt.

12. Astigmatische Linsen haben zwei „Brennweiten“ für die beiden auf einander senkrechten Hauptkrümmungen. Man erkennt jedes „Bild“ eines leuchtenden Punktes daran, dafs die Abbildung sich zu einer Geraden zusammenzieht, deren Richtung zugleich die eine Hauptkrümmungs-Richtung gibt. — Eine schief gehaltene gewöhnliche Linse wirkt wie eine astigmatische.

45. Vergröfserungszahl etc. eines optischen Instrumentes.

I. Lupe.

Die Vergröfserungszahl einer Lupe wird aus der Brennweite, welche für dickere oder zusammengesetzte Gläser nach Nr. 6, vor. Art., zu bestimmen ist, berechnet. Bezeichnen wir

nämlich durch f die Brennweite, A die kleinste deutliche Sehweite des unbewaffneten Auges, so ist die Vergröfserungszahl m der Lupe

$$m = 1 + A/f.$$

Für das mittlere Auge mag die kleinste deutliche Sehweite gleich 25 cm gesetzt werden.

Beweis. Wird ein kleiner Gegenstand von der Länge l in einem Abstande a unter die Lupe gelegt, so dafs sein (virtuelles) Bild im Abstande A erscheint, so ist $1/a = 1/A + 1/f$. Das Bild habe die Länge L, so ist die Vergröfserung $L/l = A/a = 1 + A/f$.

II. Fernrohr.

Vergröfserungszahl heifst das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein ferner Gegenstand im Fernrohre erscheint, zu dem Winkel, unter welchem derselbe mit blofsem Auge gesehen wird.

1. Allgemein anwendbar ist folgendes Verfahren. Das Fernrohr wird in einem gegen die eigene Länge grofsen Abstande vor einem Mafsstabe (Papierskale, Ziegeldach, Tapetenmuster) aufgestellt, auf welchem zwei Punkte hinreichend markirt sind, um mit blofsem Auge gesehen zu werden. Das eine Auge sieht durch das Fernrohr hindurch nach dem Mafsstabe, das andere neben dem Fernrohr vorbei nach demselben, so dafs die mit beiden Augen gesehenen Bilder sich decken. Wenn so die direkt gesehene Länge zwischen den Marken n Teile des im Fernrohr gesehenen Mafsstabes bedeckt, während die wirkliche Länge N Teile beträgt, so ist die Vergröfserungszahl $m = N/n$.

Die Beobachtung wird erleichtert dadurch, dafs man das Fernrohr durch Ausziehen des Okulars so stellt, dafs die beiden Bilder bei einer Drehung der Augenaxen sich thunlichst wenig gegen einander verschieben. Kurzsichtige Augen müssen natürlich mit der Brille bewaffnet sein.

2. Innerhalb kürzerer Abstände kann man so verfahren (v. Waltenhofen): Man stellt das Fernrohr auf grofse Entfernung ein, befestigt dann vor seinem Objektiv eine ganz schwache dünne Konvexlinse (Brillenglas von etwa 2 m Brennweite) und stellt das so vorgerichtete Fernrohr vor einem Mafsstabe so auf, dafs dessen Teile deutlich erscheinen. Man beobachtet wie unter Nr. 1 mit beiden Augen. Decken n im Fernrohr gesehene

Teile N mit blofsem Auge gesehene Teile, beträgt der Abstand des Mafsstabes vom Objektiv a, vom Auge A, so ist die Fernrohrvergröfserung gleich

$$\frac{N}{n}\frac{a}{A}.$$

3. Bei Fernrohren mit konvexem Okular läfst sich fast immer folgendes Verfahren anwenden. Nach Einstellung auf unendlich ersetzt man das Objektiv durch eine rechteckige Blende. Durch die noch übrigen Linsen wird dann ein objektives Bild der Blende entworfen, dessen Gröfse auf einem Glasmafsstäbchen vor dem Okular mit der Lupe gemessen wird. Die wirkliche Gröfse dividirt durch die Bildgröfse gibt die Vergröfserung.

Die Objektivöffnung selbst kann statt der Blende benutzt werden, wenn ihre Randstrahlen nicht etwa durch Diaphragmen abgehalten werden, was häufig der Fall ist. Eine Blende von eckiger Gestalt läfst dies erkennen.

Beweis für das Kepler'sche Fernrohr. Bei der Einstellung auf unendlich ist der Abstand des Objektivs vom Okular gleich der Summe der Brennweiten $F+f$. Die Blende gibt demnach ein Bild im Abstande $b = f(F+f)/F$ (44, 3) vor dem Okular. Also ist $L/l = (F+f)/b = F/f$. F/f aber gibt bekanntlich die Vergröfserung (vgl. Nr. 5).

4. Genauer ist das folgende Verfahren (Gaufs). Ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr ergibt bei umgekehrtem Strahlengange eine Verkleinerung gleich der Vergröfserung bei gewöhnlichem Gange. Man mifst mit einem Theodolit die Winkelgröfse eines sehr entfernten Objektes: erstens direkt, zweitens durch das verkehrt vor den Theodoliten gestellte Fernrohr hindurch. Der Quotient der beiden Winkel ergibt die astronomische Vergröfserung.

Für einen beschränkten Raum läfst sich die Methode folgendermafsen abändern. Dem Okular des auf unendlich eingestellten Fernrohres gegenüber bringe man in wenigstens 1 m Entfernung einen horizontalen Stab mit zwei (besser mehreren) zur Mitte symmetrischen Marken an. Deren gegenseitiger Abstand sei $= a$. In dem vor das Objektiv gesetzten Theodolit mögen diese Marken unter dem Winkel ω erscheinen. Der zugehörige Eintrittswinkel φ ergibt sich daraus, dafs die Strahlen von den Marken durch die Okularblende des Fernrohrs (genauer

den Okularkreis) gehen müssen. Ist A der Abstand des Stabes von der letzteren, so hat man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}a/A$ und die Fernrohrvergröfserung $= \varphi/\omega$.

Statt eines Theodoliten kann auch ein Spektrometerfernrohr dienen; noch vorteilhafter ein mikrometrisch bewegliches Ablesefernrohr mit aufgeklebtem Spiegel, auf den man ein Hilfsfernrohr mit Skale richtet.

5. Aus den Brennweiten und Abständen der Gläser läfst die Vergröfserung sich berechnen. Z. B. ist dieselbe für das Kepler'sche und Galilei'sche Fernrohr gleich dem Verhältnis der Objektiv- zur Okularbrennweite. Solche Regeln praktisch zu verwerten, ist aber in den meisten Fällen mühsam; die Brennweite des Galilei'schen Okulars kann nicht direkt bestimmt werden, und die Okulare mit Konvexlinsen sind meist zusammengesetzt. Die oft sehr kleinen Abstände der Okularlinsen genau zu messen bietet Schwierigkeiten, und aufserdem würde ohne die Bestimmung der Lage der Hauptpunkte nur ein rohes Resultat aus den Formeln hervorgehen.

6. Gröfse des Gesichtsfeldes. Ist l der wirkliche Abstand zweier an den Enden eines Durchmessers des Gesichtsfeldes gesehener Punkte von einander, a ihre Entfernung vom Fernrohr, so ist die Gröfse des Gesichtsfeldes in Bogengraden ausgedrückt $= 57{,}3^0 \cdot l/a$.

Zur Messung dient wieder ein entfernter Mafsstab. Wenn man nicht über eine grofse Entfernung verfügt, so kann man wie bei 2. dem auf unendlich eingestellten Fernrohr eine schwache Sammellinse vorsetzen und den Mafsstab in die jetzige deutliche Sehweite rücken. a ist dann der Abstand des Mafsstabes von der Linse.

III. Mikroskop.

1. Vergröfserungszahl nennt man hier das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein kleiner Gegenstand im Mikroskop gesehen wird, zu demjenigen, unter welchem er in der Sehweite 25 cm erscheint.

Die Bestimmung der Vergröfserung entspricht der unter II, 1 angegebenen. Unter das Mikroskop wird ein Gegenstand von bekannter Länge (Mikrometerteilung) gebracht. In 25 cm Abstand unter dem Okular befestigt man einen Mafsstab.

Während das eine Auge durch das Mikroskop nach dem Gegenstande sieht, blickt das andere nach dem Mafsstab, und nun mufs wieder die Projektion des im Mikroskop gesehenen Bildes auf den Mafsstab gemessen werden. Bedeckt das Bild N Teile, während der Gegenstand wirklich die Länge von n Teilen hat, so ist N/n die Vergröfserungszahl.

Besser noch kann man über dem Okular einen kleinen Spiegel, dessen Belegung in der Mitte weggenommen ist, unter 45^0 geneigt anbringen und den Mafsstab 25 cm entfernt seitlich von demselben vertikal aufstellen, so dafs mit demselben Auge durch das Spiegelglas hindurch das Bild des Gegenstandes im Mikroskop, und im Spiegel reflektirt das Bild des Mafsstabes gesehen wird.

Anstatt mit dem Mafsstabe zu vergleichen, kann man das Bild des Gegenstandes auch auf eine Fläche in 25 cm Abstand vom Auge abzeichnen (projiciren) und nachher ausmessen.

2. Über Längenmessungen mit dem Mikroskop vgl. **18, 4.**

3. Öffnungswinkel und numerische Apertur eines Mikroskop-Objektives.

Der Öffnungswinkel ($2u$) ist der Winkel zwischen den äufsersten Strahlen, welche von einem deutlich gesehenen Axenpunkt aus durch das Mikroskop treten können. Die Begrenzung des Strahlenkegels erfolgt in der Regel an der Unterfläche des Objektivs.

Es bezeichne n den Brechungskoefficienten desjenigen Mediums, aus welchem die Strahlen in das Objektiv übergehen, dann heifst

$$a = n \sin u$$

die numerische Apertur des Objektivs. Bei Trockensystemen ist $n=1$, also $a<1$. Bei Immersionssystemen gilt n für die Flüssigkeit (Wasser, Cedernholzöl, Monobromnaphthalin) und hier kann $a>1$ werden.

Von der numerischen Apertur hängt die s. g. auflösende Kraft des Mikroskopes ab, d. h. die Gröfse der kleinsten durch dasselbe unterscheidbaren Objekte.

Die Striche eines Gitters vom Abstande ε werden bei centraler Beleuchtung noch unterschieden, wenn $\varepsilon \geqq \lambda/a$, bei günstigster schiefer Beleuchtung, wenn $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}\lambda/a$, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft ist (Abbe).

Nach Lister kann man die numerische Apertur eines Trockensystems bestimmen, indem man vor dem horizontal (im Dunkeln) aufgestellten Mikroskop eine Kerze verschiebt, bis

eine Hälfte des Gesichtsfeldes hell erscheint, und in derselben zur Axe senkrechten Ebene eine zweite Kerze so aufstellt, dafs auch die andere Hälfte gerade erhellt wird. Ist der Abstand der Kerzen e, und die Ebene derselben um A vom deutlich gesehenen Punkte entfernt, so hat man $\mathrm{tg}\, u = e/2A$.

Aperturen über 1 mifst das stets anwendbare Apertometer von Abbe. Einem flachen Halbcylinder aus Glas (9 cm Durchmesser, 1,2 cm Höhe) ist in der Richtung des Durchmessers ein Reflexionsprisma von 45° angeschliffen, während der Mittelpunkt durch eine kleine Öffnung in einem aufgekitteten versilberten Deckgläschen markirt ist.

Die obere Fläche trägt 2 Teilungen, dem Öffnungswinkel und der Apertur entsprechend; als Indices dienen 2 rechtwinklig gebogene geschwärzte Messingplättchen.

Das Apertometer wird auf den Tisch des Mikroskopes gesetzt und dieses (ev. nach Einfügung der Immersions-Flüssigkeit) zunächst auf Deutlichsehen der kleinen Öffnung eingestellt. Blickt man nach Herausnehmen des Okulars in das Rohr, so sieht man bei schwächeren Objektiven das vom Objektiv entworfene Bildchen der beiden Indices, deren Spitzen man auf den Rand des Gesichtsfeldes einstellt, worauf man an der Teilung abliest.

Bei stärkeren Objektiven wird das Bildchen für Beobachtung mit dem unbewaffneten Auge zu klein. Man benutzt dann ein Hilfsmikroskop, das man bei den Instrumenten von Zeifs durch Einschrauben eines besonderen schwachen Objektives in das untere Ende des Tubusauszugs und Einsetzen eines Okulares herstellt. Bei andern Instrumenten wird man ein geeignetes Objektiv mit einem Kork im Tubus-Auszug anbringen können.

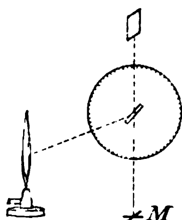
45a. Polarisationswinkel eines Körpers.

Das von einem Spiegel zurückgeworfene Licht ist bei demjenigen Einfalls- oder Reflexionswinkel vollständig polarisirt, für welchen der eindringende und der zurückgeworfene Strahl auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt, wenn ω diesen „Polarisationswinkel" und n das Lichtbrechungsverhältnis des Spiegels bedeutet,

$$n = \mathrm{tg}\, \omega.$$

Ist n bekannt, so kann ω hiernach berechnet werden. Umgekehrt ergibt sich n, wenn ω bekannt ist.

Um ω zu messen, beleuchtet man den Spiegel mit einer in der Einfallsebene hinreichend ausgedehnten Lichtquelle, etwa durchscheinendem Papier vor einer Natriumflamme oder, wenn die Einfallsebene vertikal steht, mit einer langen Gasflamme aus einem Spitzbrenner und beobachtet das reflektirte Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsrichtung (gröfsere Diagonale) senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes liegt. Bei richtiger Stellung erscheint im Gesichtsfeld ein verwaschener dunkeler Streifen; die der Mitte des letzteren entsprechende Visirrichtung bildet mit der Spiegelnormalen den Polarisationswinkel, welchen man z. B. mit dem Goniometer (**38. 39**) folgendermafsen bestimmen kann. Man läfst den Nicol ruhig stehen und dreht den an der Goniometeraxe befestigten Spiegel von dem einen Minimum der Helligkeit zu dem auf der anderen Seite liegenden, wobei man mit der Lichtquelle folgt. Die Visirrichtung auf die Mitte des dunkelen Streifens kann durch eine Marke *M* hinter dem Spiegel oder durch das Fernrohr gegeben sein, mit welchem man den Nicol verbindet. Man hat dann um 2ω gedreht. Die Anordnung mit einem Vertikal-Goniometer s. Fig. Bei der zweiten Einstellung kommt die Flamme rechts zu stehen. An Flüssigkeitsoberflächen bestimmt man 2ω durch Einstellung einer vertikal drehbaren Visirvorrichtung mit Nicol (Wollaston'sches Goniometer, Theodolit, umgelegtes Spektrometer) auf den dunkelen Fleck, indem man die Flüssigkeit einmal links, das andere Mal rechts stellt.



46. Optisches Drehungsvermögen. Saccharimetrie (Biot).

Wird das dunkele Gesichtsfeld eines Polarisationsapparates hell durch das Einschieben eines durchsichtigen Körpers, so ist der letztere entweder doppelbrechend oder „optisch aktiv", d. h. er dreht die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes. „Rechts drehend" heifst eine Substanz, wenn die Schwingungsebene sich im umgekehrten Sinne des Korkziehers verschiebt, d. h. wenn dieselbe dem empfangenden Auge in der Richtung des Uhrzeigers gedreht erscheint.

Specifische Drehung nennt man bei Krystallen den Drehungswinkel für die Längeneinheit des durchstrahlten Körpers. Bei drehenden Flüssigkeiten und Lösungen aktiver Körper in einem inaktiven Lösungsmittel bezieht man die Drehung auf die Masseneinheit des drehenden Körpers.

Enthält die Flüssigkeit in der Volumeinheit (cm^3) die Masse c (Gramm) des Körpers und gibt die Schicht von der Länge l den Drehungswinkel α, so ist die spec. Drehung also $d = \alpha/(l \cdot c)$. Die spec. Drehung pflegt mit wachsender Koncentration der Lösung etwas veränderlich zu sein, was man in zugefügten Korrektionsgliedern darstellt. Molekulares Drehungsvermögen heifst die spec. Drehung multiplicirt mit dem Molekulargewicht des Körpers.

Die Drehung hängt stark von der Farbe ab. Stärker brechbares Licht wird auch stärker gedreht. Über farbige Lichtquellen s. 37d. Über Beobachtungen mit spektral zerlegtem Licht vgl. den Schlufs.

Am häufigsten werden Zuckerlösungen in Bezug auf ihre Lichtdrehung beobachtet. Wir wollen uns an die Instrumente anschliefsen, welche zu diesem Zwecke dienen. Die Drehungen anderer Körper werden ebenso gemessen.

Die spec. Drehung des in Wasser gelösten Rohrzuckers ist für Natron-Gelb $= 66{,}5°/\text{dm}$, d. h. der Drehungswinkel α durch eine Lösung, welche in 100 cbcm z g Zucker enthält, beträgt in einer Schicht von l dm Länge

$$\alpha = 0{,}665° \cdot z\,l, \text{ woraus } z = 1{,}504\,\alpha/l.$$

Für das weifse Licht im Mittel gilt

$$\alpha = 0{,}71° \cdot z\,l, \text{ woraus } z = 1{,}41\,\alpha/l.$$

Streng genommen wächst die Drehung mit dem Zuckergehalte der Lösung ein wenig verzögert an. Genauer ist für Natronlicht (Schmitz und Tollens)

$$\alpha = (0{,}6667 \cdot z - 0{,}000096 \cdot z^2)\,l \text{ oder } z = 1{,}500 \cdot \frac{\alpha}{l} + 0{,}00032 \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2.$$

Das spec. Drehvermögen des Quarzes in der Richtung der Axe ist für Natronlicht bei der Temperatur t gleich $21{,}72\,(1 + 0{,}00015\,(t - 20))$ °/mm (Gumlich).

Setzt man die Drehung für Natrongelb gleich Eins, so stellen sich die Drehungen für die anderen Farben, bei Quarz und Zucker fast genau in gleichem Verhältnis, im Mittel etwa folgendermafsen dar:

Mittleres	Rot	Gelb	Grün	Blau	Violett
Drehung =	$^3/_4$	1	$^4/_3$	$^5/_3$	$^9/_4$

Hiernach kann man mit Hilfe der im Eingang gegebenen Zahlen für Natrongelb die Erscheinungen der Färbung übersehen.

Das Drehungsvermögen d kann als Funktion der Wellenlänge λ (Tab. 19a) durch den Ausdruck $d = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$ dargestellt werden.

Genauere Angaben für Quarz s. Tab. 20; für andere Körper vgl. Landolt, Optisches Drehungsvermögen, 1879; Landolt u. Börnstein Tabellen, 2. Aufl. S. 450 ff.

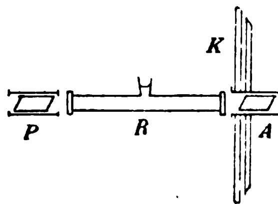
Die Instrumente zur Messung der Lichtdrehung (Saccharimeter) haben entweder einen Teilkreis an der Polarisationsvorrichtung, durch dessen Drehung man die Drehung der untersuchten Substanz mifst (Mitscherlich), oder einen „Kompensator“,

nämlich Quarzkeile, welche man verschiebt, bis sie die Drehung aufheben (Soleil).

Eine Anordnung zur Messung in hoher Temperatur s. Landolt Chem. Ber. 1895, 3102.

I. Saccharimeter mit gedrehtem Nicol.

1. Mitscherlich. Das Instrument besteht aus dem festen polarisirenden Nicol P und dem auf dem Teilkreis K drehbaren analysirenden Okular-Nicol A. Ein weitsichtiges Auge verlangt aufserdem eine schwache Lupe vor A oder die Brille. Man stellt eine Natronflamme hinter dem Instrument vor einem schwarzen Schirm auf. Das von dem Leuchtgase herrührende bläuliche Licht wird durch gelbes Glas oder eine Lösung von Kaliumbichromat beseitigt.



Man bringt eine leere oder mit Wasser gefüllte Röhre zwischen die Nicol'schen Prismen und dreht den Okular-Nicol so, dafs die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel erscheint. Endlich wird die mit der (sehr gleichförmig gemischten!) Zuckerlösung gefüllte Röhre eingeschoben, wodurch das Gesichtsfeld in der früheren Stellung des Index hell wird. Die Anzahl Grade, um welche man nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen mufs, damit wieder die Mitte dunkel wird, ist der Drehungswinkel α.

Die Deckplatten der Röhren darf man nicht zu fest anschrauben, weil die dadurch entstehende Doppelbrechung des Glases die Einstellung stört.

Eine Regulirung des Nullpunktes der Drehung, etwa auf den Nullpunkt der Teilung, geschieht leicht durch Drehung eines der Nicol's in seiner Fassung.

Den Drehungswinkel eines festen Körpers, z. B. einer zur Axe senkrecht geschnittenen Quarzplatte, mifst man ebenso wie oben, indem man den Körper zwischen die beiden Nicol bringt. Die optische Axe des Quarzes mufs genau in der Visirrichtung liegen, wenn man nicht grofsen Täuschungen ausgesetzt sein will. Man orientirt die Platte nach dem Spiegelbilde des eigenen Auges oder einer kleinen vor das Auge gehaltenen Flamme.

Im weifsen Licht entsteht, weil die einzelnen Farben verschieden stark gedreht werden, nach Einbringung der drehen-

den Lösung kein Dunkel mehr, sondern ein Wechsel von Farben. Man stellt auf die „empfindliche Farbe“, in welcher das Gelb ausgelöscht ist, ein, d. h. auf ein Violett, welches den ziemlich schroffen Übergang von Rot in Blau bildet. Für die Berechnung gilt die Konstante 1,41 (S. 215).

Den Zweifelfall, ob ein Körper links oder rechts dreht, entscheidet man danach, dafs in dem richtigen Sinne der Drehung des Okulars der empfindliche Farbenwechsel von blau nach rot stattfinden mufs.

Sollte man unsicher sein, ob der Drehungswinkel gröfser oder kleiner als 180° ist, so beobachte man mit rotem Lichte (Kupferglas) und mit Natrongelb. Die beiden Drehungen verhalten sich etwa gelb : rot = 4 : 3.

Eine gröfsere Schärfe der Einstellung bieten die folgenden Abänderungen des Mitscherlich'schen Instrumentes.

2. Doppelquarzplatte. Zwei nebeneinander stehende, gleich dicke links und rechts drehende Quarzplatten, am günstigsten 3,75 mm dick, werden vor den Polarisator eingesetzt, genau senkrecht zur Sehlinie.

Bei gekreuzten wie bei parallelen Nicols erscheinen beide Platten im Natronlicht gleich hell, im weifsen Licht gleich gefärbt. Platten von 3,75 mm Dicke geben bei parallelen Nicol's die violette sog. empfindliche Farbe und sind auch im Natronlicht, welches sie um etwa 80° drehen, sehr empfindlich.

Nach Einbringung einer drehenden Substanz erscheinen beide Hälften ungleich. Dreht man den Okular-Nicol um den Drehungswinkel α der Substanz nach, so wird die Gleichheit wieder hergestellt. Ist die Drehung beträchtlich, so verhindert die Farbenzerstreuung weifsen Lichtes eine vollständige Gleichheit der Doppelplatte. Dann mufs man also mit einfarbigem Lichte beobachten.

3. Polaristrobometer (Wild). Dasselbe gibt vermöge einer eingeschobenen Savart'schen Platte (zwei Quarze oder Kalkspate unter 45° gegen die Axe geschnitten, mit rechtwinklig gekreuzten Hauptschnitten) Streifen im Gesichtsfeld, welche bei homogenem Licht hell und dunkel, bei weifsem Licht farbig sind. Das Okular wird zunächst so weit herausgezogen, dafs diese Streifen möglichst scharf erscheinen.

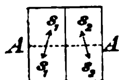
Die saccharimetrische Einstellung findet auf das Verschwinden der Streifung in der Mitte des Gesichtsfeldes statt. Da das dem Auge abgewandte Nicol'sche Prisma gedreht wird, so ist die Drehung vom Auge aus gesehen im entgegengesetzten Sinne wie die Bewegung des Uhrzeigers zu rechnen.

Die Streifen verschwinden in vier je um 90° verschiedenen Stellungen. Über die etwaige Frage, ob der Drehungswinkel α gröfser oder kleiner als 90° ist, vgl. vorige S.

Die Instrumente haben häufig noch eine zweite Kreisteilung, welche bei Anwendung einer 200 mm langen Röhre direkt den Gehalt von 1 l der Lösung an gr Zucker ergibt.

Halbschattenapparate. Das Gesichtsfeld ist in zwei Hälften geteilt, in denen beiden sich polarisirtes Licht, aber von verschiedenen Schwingungsrichtungen s_1 und s_2 (Fig.) befindet. Nullpunkt der Stellung des Analysators ist diejenige Stellung, in welcher die beiden Hälften gleich hell erscheinen, d. h. in welcher die Schwingungsrichtung A des Analysators gleiche Winkel mit den Schwingungsrichtungen in den beiden Hälften des Gesichtsfeldes bildet.

Die gröfste Empfindlichkeit des relativen Helligkeitswechsels entsteht, wenn s_1 und s_2 sich wenig von einander unterscheiden und die Richtung A den stumpfen Winkel zwischen ihnen halbirt. Doch ist der Kleinheit der Neigung s_1 s_2 durch die abnehmende Lichtstärke eine Grenze gesetzt. Man probirt die günstigste Stellung für die Lichtstärke und für die Durchsichtigkeit des Körpers, dessen Drehung gemessen werden soll, aus.



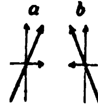
Der Nullpunkt ist immer erst nach dieser Regulirung zu bestimmen.

Nach Einschiebung des drehenden Körpers wird wieder auf gleiche Helligkeit eingestellt. Der Unterschied der jetzigen Einstellung gegen den Nullpunkt ist gleich dem Drehungswinkel.

In neuester Zeit werden auch Instrumente mit mehr als zweiteiligem Gesichtsfelde konstruirt, bei denen der Kontrast der Helligkeiten die Genauigkeit der Einstellung vergröfsert.

4. Halbschattenapparat nach Laurent. Man beleuchtet mit Natriumlicht. Die Hälfte des Gesichtsfeldes ist vor dem Polarisator bedeckt von einer Krystallplatte (Glimmer- oder

Quarzplatte parallel zur Axe geschnitten), welche die beiden Schwingungskomponenten, in welche der Strahl bei dem Eintritt in die Krystallplatte zerfällt (Fig. *a*), um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschiebt. Bei dem Austritt setzen sich beide Komponenten wieder zu einer einzigen Welle zusammen, deren Schwingungsebene also gegen die des eintretenden Strahles gedreht ist (Fig. *b*), so daſs aus der belegten und der unbelegten Hälfte, ähnlich wie bei dem Doppelquarz, Strahlen von verschiedener Schwingungsrichtung heraustreten.



5. Halbschattenapparat nach Lippich. Das Licht durchläuft zuerst ein gröſseres Polarisationsprisma mit geraden Endflächen (Glan'sches Prisma), dann ein zweites ähnliches, welches nur das halbe Gesichtsfeld einnimmt. Ersteres ist mit Hilfe eines Hebelarms um seine Längsaxe drehbar, so daſs der Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen verändert werden kann.

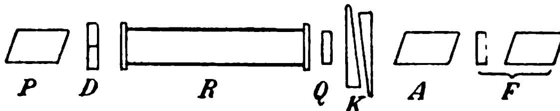
Die Beobachtung erfordert homogenes Licht, welches aber beliebige Wellenlänge haben kann.

6. Ein Cornu-Jellet'sches Prisma gibt gleichfalls zwei Hälften des Gesichtsfeldes, auf deren gleiche Helligkeit man einstellt.

II. Saccharimeter mit Quarzkeilen (Soleil).

Die Drehung der Polarisationsebene durch eine Zuckerlösung kann durch eine entgegengesetzt drehende Quarzplatte kompensirt werden, und zwar nicht nur für einfarbiges sondern für beliebiges Licht, weil die Farbenzerstreuung im Quarz derjenigen in der Zuckerlösung sehr nahe proportional ist (S. 215). Keilförmige Quarze, von denen beliebige Dicken eingeschaltet werden können, lassen aus der zur Kompensation notwendigen Dicke die Drehung im Zucker beurteilen.

Beschreibung des Soleil'schen Saccharimeters. Das Licht tritt durch den polarisirenden Nicol *P* ein und geht von da durch die Doppelquarzplatte *D* (vgl. I 2). Hierauf folgt das Rohr *R*, welches mit



der Lösung gefüllt werden kann. Dann der Kompensator, bestehend aus einer rechtsdrehenden Quarzplatte *Q* und den beiden linksdrehenden Quarz-

keilen K, welche sich mittels eines Triebes gegeneinander verstellen lassen, also zusammen einen Linksquarz von veränderlicher Dicke vorstellen. In einer mittleren Stellung ist die Gesamtdicke derjenigen des Rechtsquarzes Q gleich, so dafs Q und K zusammen keine Wirkung haben. Diese Stellung soll der Einstellung Null auf der mit dem Trieb verbundenen Teilung entsprechen. Es folgt dann der analysirende Nicol A, dessen Polarisationsebene derjenigen von P parallel sein soll.

Da Zuckerlösungen etc. gefärbt sein können, da auch nicht alle Augen für den gleichen Farbenwechsel empfindlich sind, so ist die violette Übergangsfarbe nicht immer die empfindlichste. Deswegen hat man in der Regel nach dem Auge zugewandt (bei manchen Instrumenten auch wohl umgekehrt auf der Seite der Flamme) einen Farbenregulator F. Dieser besteht wieder aus einer Quarzplatte und einem drehbaren Nicol, mit dessen Drehung die Farbe des Gesichtsfeldes sich ändert. Auf den Nullpunkt des Instrumentes hat diese Drehung keinen Einflufs.

Man legt das leere oder mit Wasser gefüllte Rohr ein, beleuchtet mit einer weifsen Flamme oder mit Tageslicht und zieht zuerst das mit dem Okular verbundene, oben nicht mit gezeichnete kleine Fernrohr so weit heraus, dafs die Quarzplatten scharf begrenzt erscheinen. Um die zweckmäfsigste Färbung zu erhalten, stellt man mittels der Zahnstange zunächst auf nicht ganz gleiche Färbung der Halbkreise ein. Durch Drehung des Farbenregulators (siehe oben) bewirkt man dann diejenige Färbung, welche den gröfsten Unterschied der Halbkreise gibt.

Nun stellt man mit dem Trieb auf gleiche Färbung ein und liest die Teilung ab, bringt die Zuckerlösung ein, stellt wieder ein und liest ab, beide Einstellungen einige Male wiederholend.

Es entspricht die Verschiebung um 1, bez. auch 0,1 Teilstrich einer Drehung des gelben Natronlichtes bei den Saccharimetern

Soleil-Ventzke um $0{,}346^0$ und Soleil-Dubosq um $0{,}217^0$.

Der Zuckergehalt von 100 cbcm der Lösung in gr wird also nach dem früheren bei Anwendung der 2 dm langen Röhre gefunden, wenn die Verschiebung am Mafsstabe von der leeren auf die gefüllte Röhre p Teile betragen hat,

Soleil-V. $z = 0{,}2605 \cdot p$, Soleil-D. $z = 0{,}1635 \cdot p$.

Für Zuckersorten, deren Gehalt an reinem Zucker gefunden werden soll, ergibt sich also die Regel: man löse 26,05 bez. 16,35 g des Rohrzuckers zu 100 cbcm Lösung, dann zeigt die Verschiebung des Mafsstabes den reinen Zuckergehalt in Procenten an.

Die Probe für richtige Teilung ist durch die Anwendung reiner „Normal-Lösung“ von 26,05 bez. 16,35 g in 100 cbcm gegeben. Die Verschiebung mufs dann 100 Teilstriche betragen. Teilungen von unbekanntem Wert werden durch bekannte Zuckerlösungen oder Quarzplatten bestimmt.

Soll der Nullpunkt der Teilung mit dem Zuckergehalt Null zusammenfallen, so stellt man bei leerer Röhre den Index auf Null und dreht am hinteren Nicol'schen Prisma, bis die Quarzplatten gleich gefärbt sind.

Bestimmung des Zuckergehaltes, wenn noch andere drehende Substanzen vorhanden sind.

Die Elimination des Einflusses anderer drehender Substanzen als Rohrzucker (z. B. Invertzucker oder Dextrin) beruht auf der Erfahrung, dafs der rechtsdrehende Rohrzucker durch 10 Minuten langes Erwärmen mit Salzsäure auf etwa 70° in links drehenden Invertzucker verwandelt wird. Während Rohrzuckerlösungen von der Temperatur so gut wie unabhängig drehen, wird die Invertzuckerlösung ziemlich stark beeinflufst. Eine invertirte Lösung von der Länge l dm, welche in 100 cbcm z gr früheren Rohrzuckers enthält, dreht die Polarisationsebene des Natron-Lichtes bei der Temperatur t' um den Winkel (Gubbe)

$$(0{,}2330 - 0{,}00304(t' - 20)) \cdot zl.$$

Hieraus wird die praktische Regel abgeleitet: Nachdem die Drehung (d. h. der Winkel α oder die Verschiebung p der Quarzkeile) der gewöhnlichen Lösung bestimmt worden ist, nimmt man 100 cbcm derselben, versetzt sie mit 10 cbcm koncentrirter Salzsäure und erwärmt 10 Minuten lang auf 70°. Nach der Abkühlung füllt man mit dieser invertirten Lösung eine um den zehnten Teil längere Röhre als die erste (oder wenn dieselbe Röhre benutzt wird, so multiplicirt man die jetzt beobachteten Winkel mit 1,1) und beobachtet die nunmehr erfolgende Drehung α' (bez. p') nach links. Die Temperatur der Lösung bei dieser zweiten Beobachtung sei t'. Um schliefslich die Drehung durch den Rohrzuckergehalt allein zu bekommen, teilt man die Summe $\alpha + \alpha'$ oder $p + p'$ durch $1{,}350 - 0{,}00457(t' - 20)$.

Denn wenn die zu eliminirende Drehung durch den Nichtzucker gleich β gesetzt wird, so hat man (S. 215 und 221)

$$\alpha = 0{,}665\,zl + \beta.$$
$$\alpha' = (0{,}2330 - 0{,}00304(t' - 20))\,zl - \beta.$$

Folglich

$$\alpha + \alpha' = (0{,}8980 - 0{,}00304(t' - 20))\,zl = (1{,}350 - 0{,}00457(t' - 20)) \cdot 0{,}665\,zl.$$

$0{,}665\,zl$ ist aber die Drehung durch den Zuckergehalt allein.

Bestimmung eines Drehungsvermögens im Spektrum.

Beleuchtet man den Polarisationsapparat (Mitscherlich) mit gemischtem Licht (Sonne), so kann man das durchgegangene Licht mit einem Spektralapparat zerlegen. Die gekreuzte Stellung der Nicol's zeigt sich darin, dafs das ganze Spektrum dunkel ist. Das Einschalten einer drehenden Substanz erhellt das Spektrum. Dreht man den Analysator nach, so tritt im Spektrum ein dunkles Band auf, welches bei weiterer Drehung von dem roten nach dem violetten Ende wandert. Die Mitte dieses Streifens entspricht demjenigen Licht, welches vollkommen ausgelöscht wird. Durch die jeweilige Stellung des Analysators wird also der Drehungswinkel dieses Lichtes gemessen.

46a. Untersuchung doppelbrechender Körper. Erkennung des optischen Charakters einaxiger Krystalle.

Ein Körper bricht das Licht einfach, wenn er amorph oder regulär krystallisirt ist; doppelt, wenn er einem nicht regulären Krystallsysteme angehört oder aus anderen Ursachen, wie Druck, Zug, rasche Kühlung, nach verschiedenen Richtungen ungleich beschaffen ist.

Man erkennt diese Beschaffenheit mit dem Polarisationsapparat, einer Verbindung von zwei das Licht polarisirenden Vorrichtungen. Polarisatoren sind Nicol'sche Prismen, Turmalinplatten, unbelegte, meistens schwarze Glasplatten, von denen man das Licht unter einem Einfallswinkel von 56° spiegeln läfst, oder Sätze von aufeinandergelegten Glasplatten, durch welche das Licht unter dem genannten Neigungswinkel hindurchgeht. Doppelbrechende Prismen (Kalkspat, Quarz) zerlegen das Licht in zwei senkrecht zu einander schwingende Strahlen; die gleichzeitige Farbenzerstreuung kann durch ein angekittetes Glasprima aufgehoben sein. Für manche Zwecke bedarf man eines Lichtbündels von verschiedenen Richtungen im Krystall (eines „grofsen Gesichtsfeldes"). Dann werden zwischen den Krystall und die Polarisatoren Konvexlinsen eingeschaltet (Nörremberg'sches Polarisationsmikroskop). Zur Beobachtung kleiner Körper im polarisirten Lichte unter dem gewöhnlichen Mikroskop bringt man zwischen Beleuchtungsspiegel und Körper ein Nicol'sches Prisma und legt ein zweites auf das Okular des Mikroskops.

Vgl. hierzu Klein, Berl. Sitz. Ber. 1893, 221. — Über Polarisationsinstrumente überhaupt z. B. Groth oder Liebisch, Krystallographie. Eingehende Regeln zur Unterscheidung der Krystalle unter dem Mikroskop s. Lehmann, Molekularphysik 1 295. 1888.

Die dem Auge zugewandte Polarisationsvorrichtung heifst Analysator, die andere wohl Polarisator schlechtweg.

Meistens gebraucht man den Polarisationsapparat mit „gekreuzten Polarisationsvorrichtungen", wobei das Gesichtsfeld dunkel erscheint. Die beiden in diesem Falle auf einander senkrechten Polarisationsebenen der Vorrichtungen sollen „Hauptebenen" des Apparates heifsen.

Ob ein durchsichtiger Körper einfach oder doppelt bricht, erkennt man mit gekreuzten Polarisatoren. Ein einfach brechender Körper läfst das Gesichtsfeld dunkel mit Ausnahme der wenigen Körper, welche das Licht drehen (46) ohne doppelt zu brechen. Ein doppelbrechender Körper erhellt, bez. färbt im allgemeinen das Gesichtsfeld. Nur in einzelnen Stellungen und auch dann nur bei kleinem Gesichtsfelde bleibt die Erhellung aus.

Es sei eine Planplatte von einem doppelbrechenden Krystall gegeben. Das Licht zerlegt sich bei dem Durchgang in zwei Wellenzüge, welche senkrecht zu einander polarisirt sind. Die Schwingungsebenen werden leicht erkannt, wenn man die Platte zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen bringt. Die Platte hat dann nämlich zwei um 90° verschiedene Lagen, bei denen das Gesichtsfeld bez. die Mitte des Feldes dunkel bleibt. In diesen Stellungen fallen die Schwingungsebenen mit den Hauptebenen des Apparates zusammen.

Einaxiger Krystall. Eine der beiden Schwingungsebenen mufs ein „Hauptschnitt" sein, d. h. die Hauptaxe enthalten. Wenn die Mitte immer dunkel bleibt, so zeigt dies an, dafs die Platte senkrecht zur Axe geschnitten ist. In einem Apparat mit gröfserem Gesichtsfelde — Turmalinzange, Polarisations-Mikroskop — erstreckt sich die Dunkelheit von der Mitte in die beiden Hauptebenen des Apparates (dunkles Kreuz); die vier Quadranten sind von Ringen durchsetzt, welche im einfarbigen Lichte (rotes Glas vor das Auge halten!) abwechselnd hell und dunkel, im weifsen Lichte gefärbt erscheinen.

Lichtdrehende Körper (Quarz) zeigen das dunkle Kreuz im allgemeinen nicht.

Je enger die Ringe beisammenliegen, desto gröfser ist bei gleich dicken Platten die „Doppelbrechung", d. i. der Unterschied der Lichtgeschwindigkeiten des ordentlichen und des aufserordentlichen Strahles.

Über Schleifen und Poliren von Krystallplatten s. 7, 17.

Unterscheidung positiver und negativer Krystalle.

Ein Krystall, in welchem der aufserordentliche Strahl stärker gebrochen wird als der ordentliche, heifst positiv und umgekehrt.

Man erkennt das Vorzeichen mit einer sog. Viertelwellen- oder cirkular polarisirenden Glimmerplatte, d. h. einer Platte von solcher Dicke, dafs die beiden Schwingungen, welche die Platte durchsetzen, einen Gangunterschied von ein Viertel Wellenlänge erfahren. Diese Glimmerplatte legt man irgendwo zwischen die Polarisationsvorrichtungen, und zwar so, dafs die Ebene der optischen Axen der Glimmerplatte um 45° gegen die Hauptebenen des Apparates geneigt ist. Dann zeigt die zu untersuchende Krystallplatte nicht mehr das schwarze Kreuz mit den gleichen Ringquadranten, sondern die Ringstücke sind in benachbarten Quadranten gegen einander verschoben, und in der Nähe des nunmehr hellen Mittelpunktes sind zwei dunkle Flecke entstanden. Liegen diese Flecke in der optischen Axenebene der Glimmerplatte, so ist der Krystall negativ und umgekehrt.

Das Glimmerplättchen läfst sich leicht in erforderlicher Dicke abspalten. Man erkennt seine Brauchbarkeit und die Richtung seiner optischen Axenebene am einfachsten dadurch, dafs man dasselbe einmal auf einen bekannten Krystall (Kalkspat, negativ) anwendet. Die Axenebene des Glimmers läfst sich auch aus seiner Lemniskatenfigur (f. S.) bestimmen.

Die Erscheinung erklärt sich unter Zugrundelegung der Fresnel'schen Hypothese in folgender Weise: Angenommen, die Krystallplatte sei negativ, also von den den Krystall schräg durchsetzenden Strahlen pflanzen sich die aufserordentlichen, d. i. die im Apparate radial schwingenden rascher fort als die ordentlichen, peripherisch schwingenden Strahlen. In einer gewissen geneigten Richtung, d. h. in der Krystallfigur in einer gewissen

Entfernung vom Mittelpunkte, welche innerhalb des ersten dunkelen Ringes liegen mufs, wird der radial schwingende Strahl dem anderen im Krystall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorauseilen; denn dem ersten dunkelen Ringe entspricht ja ein Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$.

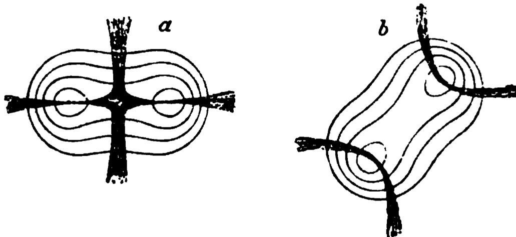
Nun pflanzt eine Glimmerplatte einen sie durchsetzenden Strahl, wenn er in der Axenebene schwingt, am langsamsten fort; unsere Viertelwellen-Platte verzögert also die in ihrer Axenebene schwingende Lichtkomponente gegen die andere um $\frac{1}{4}\lambda$. Fafst man nun von den oben genannten Strahlen, deren radiale Komponente im Krystall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorausgeeilt war, diejenigen ins Auge, welche in der Axenebene der Glimmerplatte liegen, so sieht man, dafs hier der Gangunterschied im Krystall durch die Glimmerplatte aufgehoben wird, das Gesichtsfeld also seine natürliche Beschaffenheit d. h. Dunkelheit haben mufs. Daher entstehen die beiden dunkelen Flecke in der Axenebene der Glimmerplatte.

Dafs ein positiver Krystall sich umgekehrt verhalten mufs, folgt von selbst. — Zugleich übersieht man leicht, dafs die Durchmesser der Ringe in zwei Quadranten um $\frac{1}{4}$ Ringabstand vergröfsert, in den anderen beiden Quadranten um ebensoviel verkleinert sein müssen.

Über die Messung von Lichtbrechungsverhältnissen der Krystalle vgl. 40.

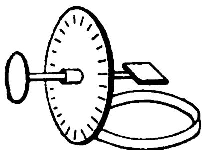
47. Winkel der optischen Axen eines Krystalles.

Aus einem optisch zweiaxigen Krystall sei eine zur Mittellinie der beiden Axen senkrechte Platte geschliffen. Im gekreuzten Polarisationsapparat (46a) liefert die Platte, wenn das Gesichtsfeld hinreichend grofs ist, eine Figur aus hellen und dunkelen, bez. gefärbten Lemniskaten, welche von einem dunkelen Kreuz oder von hyperbolischen dunkelen Ästen durchzogen sind. Die beiden Scheitelpunkte der Hyperbel, um welche sich die Lemniskaten zusammenziehen, bezeichnen die optischen Axen des Krystalles.



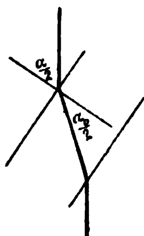
Fällt die Verbindungslinie der beiden Axenbilder mit einer Hauptebene des Apparates zusammen, so erscheint das dunkle Kreuz *a*. Dreht man die Krystallplatte von hier aus um 45°, so erscheinen die dunkelen Äste symmetrisch gegen die Lemniskaten. Dieses in *b* dargestellte Bild ist zum Messen am ge-

eignetsten. Man markirt an der Krystallplatte die zur Verbindungslinie der optischen Axenbilder senkrechte Richtung.



Eine kleine Meſsvorrichtung, bestehend aus einem geteilten Kreis, an dessen Drehungsaxe die Krystallplatte mit Wachs oder mit einem Kork befestigt wird und die mit einem Ring auf den unteren Teil des Nörremberg'schen Apparates aufgesetzt wird, ist leicht herzustellen. Einen besonderen Axenwinkelapparat nach Groth führt die Fueſs'sche Werkstätte aus.

Um mit Fig. *b* (vor. S.) zu messen, stellt man die Drehungsaxe symmetrisch gegen die Hauptebenen des Apparates. Man befestigt nun an der Drehungsaxe die Krystallplatte so, daſs die oben markirte Richtung in der Axe liegt, stellt eins von den optischen Axenbildern (Scheitelpunkt der Hyperbel) in die Visirrichtung des Apparates (Fadenkreuz) ein und liest die Kreisteilung ab. Der Winkel α, um welchen man alsdann drehen muſs, damit der andere Scheitelpunkt in die Visirlinie des Apparates fällt, ist der scheinbare optische Axenwinkel, d. h. der Winkel der Lichtstrahlen, welche den Krystall in der Richtung der Axen durchlaufen haben, nach ihrem Austritt in die Luft.



Kennt man das mittlere Haupt-Brechungsverhältnis n des Lichtes in dem Krystall (**40**, II; Tab. 20), so findet man den wirklichen Winkel α_0 der optischen Axen im Krystall aus der Beziehung

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha_0 = 1/n \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Bei weiter auseinanderstehenden Axen erscheint natürlich nur eine Axe zur Zeit im Gesichtsfeld. Wenn der Winkel noch gröſser ist, so kann es vorkommen, daſs wegen der Brechung und der totalen Reflexion überhaupt kein Licht, welches die Platte in der Richtung der Axen durchlaufen hat, in die Luft austritt. In diesem Falle kann man die Messung innerhalb einer Flüssigkeit ausführen, welche von zwei ebenen, zur Sehlinie senkrechten Glasflächen begrenzt wird. Das Verfahren ist im übrigen das nämliche wie vorhin. Der hier beobachtete Axenwinkel sei α', so findet man α, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit ist, aus der Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = N \sin \tfrac{1}{2} \alpha'.$$

Da der Axenwinkel von der Farbe abhängt, so verlangt die genaue Messung eine bestimmte Lichtsorte, z. B. das Licht der Natronflamme oder auch des roten Kupferglases, welches man vor das Auge hält. Der Unterschied der Axenwinkel in verschiedenen Farben heifst Axendispersion für diese Farben.

Brechungsverhältnis N einer Flüssigkeit. Eins der einfachsten Mittel, dieses zu bestimmen, ist die Messung eines und desselben Axenwinkels (z. B. Baryt) in der Luft α und in einer Flüssigkeit α'. Es gilt dann die vorige Gleichung.

47a. Photometrie.

I. Durch Beleuchtung aus verschiedener Entfernung.

Alle Photometer stellen auf gleiche Helligkeit ein. Lichtquellen können mit einander nach dem Satze verglichen werden: geben zwei Lichtquellen in den Abständen a_1 bez. a_2 gleiche Helligkeit, so verhalten sich ihre Lichtstärken

$$i_1 : i_2 = a_1^2 : a_2^2.$$

Sobald verschiedene Färbung vorhanden ist, wird die Schätzung gleicher Helligkeit vom subjektiven Ermessen abhängig.

1. Schatten-Photometer (Rumford). Vor einen weifsen Schirm kommt ein dunkler, nicht zu schmaler Stab zu stehen. Die Lichtquellen werden so gestellt, dafs die beiden Schatten des Stabes dicht nebeneinander liegen. Die Entfernungen werden dann so geregelt, dafs die beiden Schatten gleich dunkel erscheinen, wobei darauf zu achten ist, dafs beide Lichtbündel den Schirm in den Schattengebieten unter gleichem Winkel treffen. Die Abstände werden von jedem Lichte zu dem Schatten des anderen gemessen.

2. Beleuchtung zweier Flächen. Zwei gleiche Flächenstückchen werden unter gleichen Winkeln von den beiden Lichtquellen erhellt, deren Abstände a_1 und a_2 so ausgesucht werden, dafs die Flächenhelligkeit gleich erscheint (Foucault). Fremdes Licht ist hier auszuschliefsen. Entweder neigt man die Flächen gegeneinander, beleuchtet von aufsen und beobachtet in der Mittellinie (Ritchie) oder man trennt durch eine Scheidewand und beobachtet das durchfallende Licht.

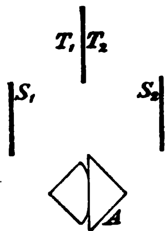
In dem Photometer von Leonh. Weber werden 2 Milchgläser beleuchtet, das eine mit einer konstanten Hilfsflamme

(Benzin), das andere erst mit der einen, dann mit der anderen Lichtquelle. Ein total reflektirendes Prisma bringt die Bilder der Gläser neben einander. Durch Regelung der Abstände wird gleiche Helligkeit bewirkt. Dieses Photometer gestattet auch Helligkeitsmessungen beleuchteter Flächen bei beliebiger Lage der letzteren, indem man den Abstand der Benzinkerze regulirt. (Wied. Ann. 20, 326. 1883.)

3. Vergleichung auffallenden Lichtes mit durchfallendem (Bunsen). Ein kleiner Schirm (Papier) sei an verschiedenen Stellen ungleich stark durchscheinend gemacht, entweder vermöge eines kreis- oder besser ringförmigen Fett- oder Stearinfleckes oder auch durch teilweises Bekleben eines dünnen Papiers mit einem zweiten.

Einseitig von dem Schirm in ungeändertem Abstande befinde sich eine konstante Lichtquelle (kleine Gasflamme von konstanter Höhe; Benzin- oder Petroleumlampe, etwa eine halbe Stunde zuvor angezündet; elektrische Glühlampe mit konstanter Spannung). Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen werden folgeweise auf der anderen Seite des Schirmes in solchen Abständen r_1 und r_2 aufgestellt, dafs die verschiedenen Schirmteile gleich hell erscheinen. Da die scheinbare Helligkeit von dem Winkel abhängt, unter welchem man das Papier ansieht, so ist eine konstante Visirrichtung innezuhalten.

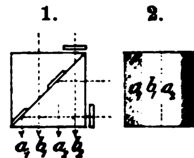
Photometerwürfel (Lummer und Brodhun). Die Hypotenusenflächen zweier rechtwinkliger Prismen berühren sich mit ihren mittleren Teilen unter Druck vollständig, so dafs hier keine Reflexion, sondern vollständige Durchlässigkeit vorhanden ist. Aufsen ist das eine Prisma angeschliffen, so dafs die Fläche des anderen totale Reflexion gibt. Rechts und links von dem beiderseits gleichen weifsen Schirm T werden die zu vergleichenden Lichtquellen aufgestellt. S_1 und S_2 sind gleiche Spiegel. In die Fläche A hineinsehend erblickt man die Schirmseite T_1 durch die Mitte hindurch, T_2 dagegen total reflektirt an den Rändern. Beide Teile erscheinen gleich hell, wenn T_1 und T_2 gleich hell beleuchtet sind. Die Vergleichung kann auf weniger als 1% Fehler sicher sein.



Gegen Ungleichheiten der Seiten 1 und 2 schützt folgendes Verfahren: auf die Seite 1 kommt ein konstantes Hilfslicht; die zu vergleichenden Lichtstärken stellt man folgeweise auf die Seite 2. Vgl. vor. S.

Kontrast-Photometer. Die Genauigkeit der Einstellung wird noch erhöht, wenn man 4 Felder herstellt, von denen je zwei auf gleiche, aber paarweise verschiedene Helligkeit eingestellt werden. Die Abschwächung des Lichtes geschieht durch Glasplatten (Fig. 1), welche geeigneten Teilen der Eintrittsflächen vorgesetzt werden und etwa 8% des Lichtes wegnehmen. Eine Gestalt des Photometerwürfels mit Kontrast ist z. B. die folgende.

Die Teile über a_1 und a_2 der hinteren Hypotenusenfläche (Fig. 1) sind mit dem Sandgebläse weggeätzt. An diesen Stellen findet in dem vorderen Prisma totale Reflexion des von rechts kommenden Lichtes statt, während durch die Teile über b_1 und b_2 das geradeaus kommende Licht durchgeht. Die beiden Glasplatten schwächen die Beleuchtung von a_1 und b_2 ab. Die Plattenränder liegen so, dafs man sie nicht sieht. Die Einstellungsfigur ist unter 2 dargestellt.



Lummer und Brodhun, Z. S. f. Instr. 1889, 44 u. 461; 1892, 41.

4. Rotirender Sektor (Talbot). Durch eine rasch rotirende undurchsichtige Scheibe mit einer Sektoröffnung, deren Gröfse mefsbar verändert werden kann, wird eine Strahlung bis zur Gleichheit mit einer anderen abgeschwächt.

Ähnlich läfst sich eine verstellbare Sektorblende vor einem die Strahlen zusammenfassenden Objektiv benutzen (Kundt und Stenger).

Vergleichung sehr verschiedener Lichtstärken. Man vergleicht beide Lichtquellen mit einer Lampe, deren Helligkeit am besten etwa gleich dem geometrischen Mittel aus beiden Lichtstärken ist. Die beiden Helligkeitsverhältnisse sind mit einander zu multipliciren.

II. Durch Polarisation.

Passirt polarisirtes Licht einen Polarisator und bilden die Schwingungsrichtungen (oder was auf dasselbe hinauskommt, die Polarisationsrichtungen) beider den Winkel φ mit einander, so wird, von einem durch

Reflexion verloren gehenden Bruchteil abgesehen, der Bruchteil $\cos^2\varphi$ durchgelassen (Malus).

1. Die eine Hälfte eines Gesichtsfeldes werde konstant durch polarisirtes Hilfslicht beleuchtet, die zweite Hälfte durch eine weniger helle Lichtquelle, welche mit einer anderen verglichen werden soll. Man betrachte dieses Gesichtsfeld mit einem Nicol. Die Hälften mögen gleich hell erscheinen, wenn des letzteren Schwingungsrichtung mit derjenigen des Hilfslichtes den Winkel φ_1 bildet. Nun beleuchtet man mit der anderen Lichtquelle aus derselben Entfernung. Der Winkel φ_2 bewirke die Gleichheit der beiden Hälften. Dann ist

$$i_1 : i_2 = \cos^2\varphi_1 : \cos^2\varphi_2 .$$

2. Zwei Lichter werden senkrecht zu einander polarisirt und beleuchten so die beiden Hälften eines Gesichtsfeldes, welche durch einen drehbaren Nicol beobachtet werden. Man drehe letzteren so, daſs die Helligkeit gleich erscheint. Sind φ_1 und $\varphi_2 = 90 - \varphi_1$ die Winkel, welche alsdann von der Schwingungsrichtung des Nicol mit denjenigen der beiden Lichtquellen eingeschlossen werden, so ist $i_1 : i_2 = \cos^2\varphi_2 : \cos^2\varphi_1 = \mathrm{tg}^2\varphi_1$. Fehlerquellen können durch Auswechseln der Lichtquellen erkannt und eliminirt werden (Zöllner).

3. Gleiche Mengen senkrecht zu einander polarisirten Lichtes mit einander gemischt verhalten sich wie gewöhnliches Licht. Man kann also die gleichen Mengen beider Teile durch ein Polariskop (z. B. Savart) an dem Ausbleiben der Interferenzerscheinungen erkennen (Arago; Wild, Pogg. Ann. 118, 193. 1863).

Lichteinheit. Während einiger Zeit konstant brennt eine Gasflamme mit Druckregulator oder etwa auf konstante Höhe gedreht; oder eine vor vielleicht einer halben Stunde angezündete Benzin- oder Petroleumlampe. Für längere Zeiträume kann eine elektrische Glühlampe, mit konstanter Spannung und nie länger als nötig gebrannt, eine unveränderte Lichtstärke gewähren.

Eine immer reproducirbare Lichteinheit herzustellen ist mit groſsen Schwierigkeiten verbunden. Das alte Mittel, die Normalkerze aus Wallrat, deren Flamme eine bestimmte Höhe haben soll (englische Kerze bei 45 mm Flammenhöhe) und deren Verbrauch an Brennstoff die Wage kontrolirt, wird mehr und

mehr verlassen. In Deutschland ist jetzt die Hefner-Lampe[1]) mit Amylacetat gebräuchlich, welche an einem 8 mm dicken Docht eine Flamme von 40 mm Länge gibt (Elektrotechn. Z.-S. 1884 S. 20). — Die Leuchtkraft wird durch Kohlensäuregehalt der Luft beeinträchtigt.

Das von 1 qcm schmelzenden Platins ausgestrahlte Licht (Violle) als Einheit zu verwirklichen besteht geringe Aussicht.

Lummer und Kurlbaum schlagen glühendes festes Platin vor, dessen Temperatur aus dem Procentgehalt an solchen Strahlen definirt wird, die von einer Wasserschicht von bestimmter Dicke absorbirt werden. Berl. Sitz. Ber. 1894, 229.

III. Stärke farbigen Lichtes im Spektrum.

1. Vergleichsfeld. An die Stelle der Skale im Spektralapparat (41) kommt eine horizontal verschiebbare Öffnung, die konstant beleuchtet wird (Petroleumlampe) und deren von dem Prisma zurückgeworfenes weifses Bild sich auf den zu untersuchenden Teil des Spektrums projicirt. Durch eine geeignete Kombination von Rauchgläsern schwächt man das Licht der Lampe bis zu einem solchen Bruchteile ab, dafs jenes Bildchen gerade nicht mehr auf dem Spektrum sichtbar ist. Diesem Bruchteile wird die Lichtstärke in dem betreffenden Teil des Spektrums proportional gesetzt. Die Durchlässigkeit der Rauchgläser wird nach I, 1 oder 2 bestimmt. Haben mehrere Gläser die einzelnen Durchlässigkeiten d_1, d_2, $d_3 \cdots$, so besitzen sie hintereinander gestellt die Durchlässigkeit $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdots$. Das Verfahren ist instrumentell einfach, aber unvollkommen.

2. Verstellbarer Spalt. Durch die beiden Hälften eines Spaltes, die einzeln zu gemessenen Breiten verstellbar sind, werden von zwei zu vergleichenden Lichtquellen zwei sich berührende Spektra entworfen. Sind an einer Stelle die Helligkeiten der Spektra gleich, so verhalten sich die Intensitäten für diese Farbe der Spektra nahe umgekehrt wie die Spaltbreiten. Grofse Helligkeitsunterschiede werden zuvor durch Rauchgläser abgeschwächt.

Über 1 u. 2 vgl. Vierordt, Pogg. Ann. 137, 200, 1869; 140, 172, 1870.

Ein Photometer mit verstellbaren Spalten an zwei Rohren

---

1) Die Phys.-techn. Reichsanstalt beglaubigt Hefner-Lampen.

unter Anwendung des Photometerwürfels (S. 228) siehe bei Lummer und Brodhun, Z. S. f. Instr. 1892, 132.

3. Spektro-Photometer mit Polarisatoren. Auch die unter II genannten Methoden lassen sich durch Einschieben von Prismen zur Vergleichung der Stärken der einzelnen Farben von Lichtquellen benutzen. Dies geschieht in den Spektrophotometern von Glan (Wied. Ann. 1, 351. 1877) und von Wild (ib. 20, 452. 1883).

Das Glan'sche Photometer hat einen in eine obere und eine untere Hälfte geteilten Spalt. In diese beiden Hälften treten die beiden zu vergleichenden Lichter ein, das eine etwa durch ein totalreflektirendes Prisma hineingeworfen. Auf dem Wege durch das Spaltrohr werden die beiden Lichter senkrecht zu einander polarisirt, die andere Schwingungskomponente von jedem ist abgeblendet.

Im Fernrohr erscheinen die Spektra beider Lichter übereinander; durch passendes Ausziehen des Spaltrohres bringt man sie an einer beliebigen Stelle zur Berührung. Durch verstellbare Schirme werden die Spektra bis auf den jeweiligen zur Untersuchung bestimmten Teil abgeblendet. Eine Skale erlaubt, gerade wie am Spektralapparat, die Farben durch Zahlen zu bezeichnen.

Vor dem Spaltrohr sitzt ein Teilkreis mit drehbarem Nicol, welchen man so stellt, daſs die beiden Hälften gleich hell erscheinen. Findet man diese Gleichheit bei einem Drehungswinkel φ aus der Nullstellung des Nicol, so ist das Helligkeitsverhältnis der beiden Lichter $= k \cdot \mathrm{tg}^2 \varphi$. k ist ein von 1 nicht sehr verschiedener Faktor, welcher aus ungleichen Schwächungen der beiden Lichter im Instrument entsteht.

Sonst wäre $\cos^2(90 - \varphi)/\cos^2 \varphi = \mathrm{tg}^2 \varphi$ das Verhältnis.

Die Nullstellung des Nicol kann aus dem Maximum der Dunkelheit gefunden werden, welches eine von den Hälften des Gesichtsfeldes bei dieser Stellung haben muſs. Der Faktor k ergibt sich, wenn man beide Hälften, etwa durch eine Flamme hinter sehr homogenem Milchglas, gleich erleuchtet und auf gleiche Helligkeit einstellt, aus dem hierfür erforderten Drehungswinkel φ_0 des Nicol als $k = \mathrm{ctg}^2 \varphi_0$.

Über eine andere Anordnung des Photometers s. A. König, Wied. Ann. 53, 785. 1894.

IV. Bestimmung eines Absorptions-Koefficienten mit dem Spektro-Photometer.

Wird von einer Lichtmenge s auf ihrem Wege von der Länge δ durch einen Körper die kleine Menge σ absorbirt, so heifst $\sigma/(s\delta) = A$ der Absorptionskoefficient des Körpers für das betreffende Licht. A hängt von der Farbe ab. Bei der Durchstrahlung einer Dicke d wird die Intensität i des eintretenden Lichtes geschwächt zu

$$i' = i \cdot e^{-A \cdot d}.$$

Ist i/i' gemessen, so findet man also

$$A = \frac{1}{d} \log \text{nat} \frac{i}{i'} = \frac{1}{d} \cdot 2{,}30 \cdot \log \text{brigg} \frac{i}{i'} \cdot$$

i/i' wird nach dem vorigen gemessen, indem die eine Spalthälfte frei gelassen, die andere mit dem absorbirenden Körper bedeckt wird.

Lichtverlust bei Reflexionen. Mit jedem Durchtritt durch die Trennungsfläche zweier verschieden brechender Mittel ist eine Schwächung verbunden, indem von dem (senkrecht) einfallenden Licht der Bruchteil $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ reflektirt wird (Fresnel), wo n das gegenseitige Brechungsverhältnis der Mittel ist. Für gewöhnliches Glas gegen Luft also ist $[(n-1)/(n+1)]^2 = (0{,}5/2{,}5)^2 = \frac{1}{25}$. Aus den bekannten n lassen sich die Schwächungen ausrechnen und die aus ihnen entspringenden Korrektionen anbringen. Man kann dieselben auch vermeiden, indem man sie auf beiden Wegen praktisch merklich gleich macht. Zu dem Zweck bedeckt man die beiden Spalthälften mit verschieden dicken, gleich begrenzten Schichten des Körpers und setzt die Differenz der beiden Dicken für d in Rechnung. Bei absorbirenden Gläsern kann man auch die eine Spalthälfte mit einem dünnen farblosen Glase bedecken und dann von der Schwächung absehen.

47b. Messung einer Wärmestrahlung.

Die Energie einer Strahlung wird gemessen, indem man die Strahlung durch Absorption in einer mit Lampenrufs oder mit Platinschwarz (7, 18) überzogenen Fläche in Wärme umsetzt. Um an mehreren Flächen identische Absorption zu haben, mufs man auf identische Herstellung derselben grofse Sorgfalt verwenden.

Gröfsere Strahlungsmengen können direkt kalorimetrisch gemessen werden, z. B. im Pyrheliometer von Pouillet. Auch die Geschwindigkeit einer bestrahlten Crookes'schen Lichtmühle kann zur Beurteilung der Strahlung dienen.

Spektrale Zerlegung geschieht mit Steinsalz- oder Flufsspat-Präparaten.

Thermosäule (Melloni).

Die eine Gruppe von Lötstellen wird geschwärzt und bestrahlt. Man mifst den ersten Ausschlag einer vorher ruhenden Galvanometernadel von mäfsiger Dämpfung und setzt die Strahlungsenergie diesem Ausschlage proportional.

Auch kann ein leichter Thermobügel, in einem starken magnetischen Felde aufgehangen, durch die Bestrahlung selbst zum Ausschlage verwendet werden (Radiomikrometer).

Bolometer (Langley).

Man benutzt die Widerstandsänderung eines dünnen Platin-, Eisen- oder Nickel-Drahtes oder Blechstreifens durch die bei der Einstrahlung entstehende Erwärmung. Platinbleche, mit einer zehnfach dickeren Silberschicht zusammengeschweifst, lassen sich auf $^1/_{2000}$ mm Dicke auswalzen; nach dem Aufspannen auf einen Rahmen wird das Silber abgeätzt.

Der zu bestrahlende Draht bildet den Zweig einer von einem konstanten Strom durchflossenen Wheatstone'schen Brücke (71b). Der Strom ist einige Zeit vorher geschlossen und das Galvanometer durch Abgleichen der Widerstände auf Null gebracht. Die Bestrahlung des einen Zweiges bewirkt einen der Strahlungsenergie nahe proportionalen ersten Ausschlag.

Um von Temperaturschwankungen unabhängig zu sein, werden die Materialien benachbarter Zweige gleich gewählt.

Doppelte Empfindlichkeit erreicht man durch gleichzeitige Bestrahlung gegenüberliegender Brückenzweige.

Über die Ausführung vgl. z. B. Lummer u. Kurlbaum, Wied. Ann. 46, 204. 1892.

47c. Erzeugung beliebig elliptischen Lichtes und Untersuchung eines Polarisationszustandes. Babinet's Kompensator.

Schwingungsformen des Lichtes nach dem Durchtritt durch eine Krystallplatte.

Geradlinig polarisirtes d. h. nur in einer Ebene schwingendes Licht von der Wellenlänge λ gehe durch eine Platte aus einem doppelbrechenden Krystall in einer anderen Richtung, als derjenigen einer optischen Axe. Die Schwingung zerfällt im Krystall in zwei auf einander senkrechte Komponenten. Die durch die Strahlenrichtung gehenden Ebenen, welche diese Komponenten enthalten, sollen die Hauptebenen heifsen.

1. Fällt die Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes in eine der Hauptebenen, so wird das Licht nicht geändert.

2. Ebenso ist dasselbe nach seinem Austritt ungeändert, wenn der Gangunterschied der beiden Schwingungen im Krystall λ, 2λ, 3λ etc. beträgt.

3. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ etc.; dann bleibt das austretende Licht geradlinig polarisirt, schwingt aber im allgemeinen in einer anderen Ebene als beim Eintritt. Bildete die Schwingungsrichtung vor dem Eintritt den Winkel φ mit einer Hauptebene, so bildet die Schwingungsrichtung des austretenden Lichtes mit derselben Hauptebene den gleichen Winkel φ nach der entgegengesetzten Seite. Specieller Fall: $\varphi = 45^\circ$; das austretende Licht hat eine um 90° gedrehte Schwingungsrichtung.

4. Die Schwingung des eintretenden Lichtes sei gegen die Hauptebenen um 45° geneigt. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ etc. Das austretende Licht ist cirkular polarisirt, d. h. die Bahnen der Ätherteilchen sind Kreise. $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$, etc. gibt die Kreisbewegung entgegengesetzt wie $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ etc. Ebenso wird die Schwingungsrichtung umgekehrt, wenn die Schwingungsebene des eintretenden Lichtes um 90° geändert wird.

5. In allen anderen Fällen tritt elliptisch polarisirtes Licht aus. Wenn die Neigung der Schwingungsrichtung gegen die Hauptebenen 45° beträgt (vgl. Nr. 4), so sind die Ellipsen um so gestreckter bez. um so runder, je näher der Gangunterschied 0, $\frac{1}{2}\lambda$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$ etc. bez. $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ etc. beträgt. Vgl. auch die Figur S. 237. Das Axenverhältnis der Schwingungsellipse für den Gangunterschied $k \cdot \lambda$ ist

$$a/b = \operatorname{tg} k\pi.$$

I. Erzeugung beliebig elliptischen Lichtes mit dem Kompensator.

Der Babinet'sche Kompensator gibt die Möglichkeit, in den Weg eines Lichtstrahles eine Krystallplatte von beliebiger wirksamer Dicke einzuschalten und hierdurch dem Lichte verschiedene Schwingungsformen zu erteilen.

Zu dem Zwecke sind hintereinander zwei sehr schwach keilförmige Quarzplatten von gleichem brechenden Winkel vorhanden, die in der Mitte gleich dick sind. Die Schneiden sind einander parallel auf entgegengesetzter Seite gelegen. Beide Keile haben die optische Axe parallel der einen Begrenzungsebene, der eine aber parallel der Schneide, der andere senkrecht dazu. Der längere Keil ist in seiner Richtung mittels einer Mikrometerschraube verschiebbar, deren Bewegung an einer Trommel abgelesen wird. Man visirt durch einen Okular-Nicol, dessen Polarisationsebene (gröſsere Diagonale des Rhombus) um 45° gegen die Hauptschnitte der Quarze geneigt sei, mittels eines Okularfadens immer nach der Mitte des feststehenden kleineren Keils. Liegen an dieser Stelle gleich dicke Schichten der beiden Keile hintereinander, so tritt hier der durchgegangene Strahl ungeändert aus. Indem man den beweglichen Keil verschiebt, bewirkt man einen dieser Verschiebung proportionalen Gangunterschied der beiden Schwingungskomponenten.



Wert ε eines Trommelteils. Um den Trommelteil in Gangunterschied auszuwerten (selbstverständlich für Licht von einer bestimmten Wellenlänge), läſst man das betreffende Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsebene ebenfalls unter 45° gegen die Hauptschnitte geneigt ist, einfallen und beobachtet dasselbe mit dem Okular-Nicol. Wir wollen annehmen, daſs die beiden Nicol gekreuzt sind. Irgendwo wird dann im Gesichtsfeld ein dunkler Streifen erscheinen, den man mit der Trommel auf den Faden einstellt. Die Trommelstellung sei jetzt $= p_0$. Dann dreht man die Trommel, bis der nächste dunkele Streifen auf dem Faden liegt. Die jetzige Trommelstellung (die ganzen Umdrehungen natürlich mitgezählt) sei $= p_1$. Dann entspricht also der Trommelunterschied $p_1 - p_0$ gerade einer Wellenlänge, d. h. es bedeutet die Verschiebung um einen Trommelteil eine Änderung des Gangunterschieds um $\lambda/(p_1 - p_0)$, und es ist

$$\varepsilon = 1/(p_1 - p_0).$$

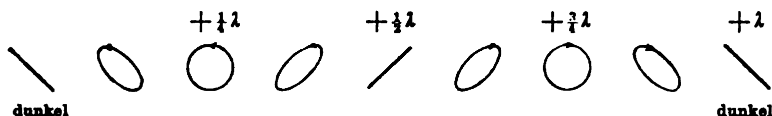
Für verschiedene Farben ist bei der geringen Dispersion des Quarzes ε ungefähr deren Wellenlänge umgekehrt proportional.

Die umstehende Figur deutet die Schwingungszustände des durchgegan-

genen Lichtes in dem Bezirk zwischen zwei dunkelen Streifen für den Fall an, dafs das eintretende Licht von links oben nach rechts unten schwingt (d. h. dafs, nach Fresnel, die kurze Diagonale des polarisirenden Nicol so gerichtet ist). In den dunkelen Streifen ist das Licht ungeändert (2); mitten dazwischen ist durch Voraneilen um $\frac{1}{2}\lambda$ linear polarisirtes Licht von einer um 90° gedrehten Schwingungsrichtung entstanden (3).

In je $\frac{1}{4}$ Abstand von den Enden haben wir Voraneilen um $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}\lambda$, also cirkular polarisirtes Licht etc.

In der einen Hälfte findet die Schwingung links-, in der anderen rechtsherum statt.



Wie man sieht, entspricht die Figur dem Falle, dafs von links nach rechts gerechnet die horizontale Schwingungskomponente gegen die vertikale verzögert ist. Da nun im Quarz, als in einem positiven Krystall, der aufserordentliche, parallel der optischen Axe schwingende Strahl der stärker verzögerte ist, so steht für unsere Figur die Schneide desjenigen Keils, dessen optische Axe in der Richtung des Keils liegt, links.

Axenverhältnis der Ellipsen. Die Elliptieität eines Lichtes ist durch das Verhältnis a/b der beiden Hauptaxen der Ellipse charakterisirt. Steht die Trommel auf dem Teilstrich p, so befindet sich in dem Fadenkreuz Licht von dem Axenverhältnis (vgl. oben Nr. 5).

$$a/b = \operatorname{tg}[\varepsilon \cdot 180^0 (p - p_0)].$$

Bestimmung des Nullpunktes. An den dunkelen Stellen beträgt der Gangunterschied ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge; ob aber $0, \lambda, 2\lambda \cdots$, kann man homogenem Licht nicht ansehen. Um denjenigen Streifen zu finden, in welchem der Gangunterschied 0 ist, d. h. wo die Quarze gleich dick sind, braucht man nur weifses Licht anzuwenden. Dann findet man nur einen wirklich dunkelen Streifen, der eben den Nullpunkt bezeichnet. Die übrigen sind wegen der verschiedenen Wellenlänge der Lichtsorten gefärbt.

II. Untersuchung der Schwingungsform eines Lichtes.

Wir setzen homogenes Licht voraus von eben der Farbe, welche im Vorigen angenommen, für welche also ε bestimmt wurde. Aufserdem soll dieses Licht eine ganz bestimmte Schwingungsform haben, also nicht etwa natürliches Licht mit

polarisirtem gemischt sein, sondern Licht von einer bestimmten Schwingungsellipse, wie es etwa aus geradlinig polarisirtem nach dem Durchgang durch einen Krystall, z. B. Glimmer, entstanden ist.

Lage der Axen der Schwingungsellipse. Man stelle den Kompensator mit der Trommel genau auf den Punkt $\frac{1}{4}\lambda$ Fig. v. S.) ein, an welchem er geradlinig polarisirtes Licht in cirkularpolarisirtes verwandelt, mit anderen Worten nach S. 236 die Trommel auf den Teilstrich $p_0 + 1/(4\varepsilon) = p_0 + \frac{1}{4}(p_1 - p_0)$. Nun richte man den Kompensator auf das zu untersuchende Licht. Der Kompensator sei um seine Seh-Axe drehbar. Bei dieser Drehung wandert der dunkele Streifen im allgemeinen; man drehe, bis er auf den Beobachtungsfaden fällt. Die beiden Hauptschnitte des Kompensators fallen in dieser Lage mit den beiden Axen der Schwingungsellipse zusammen. Den analysirenden Nicol dreht man dabei so, daſs der Streifen immer möglichst kräftig bleibt. Wird der Faden bei keiner Stellung des Kompensators von einem Streifen erreicht, so drehe man den Analysator um 90°; dann wird es der Fall sein.

Specielle Fälle. 1. Ändert sich das Gesichtsfeld nicht, wenn man den ganzen Kompensator dreht, so bedeutet dies cirkularpolarisirtes Licht. Wird in diesem Falle der Analysator allein gedreht, so wechselt ein auf dem Faden liegender dunkler Streifen mit zwei beiderseitig in gleichem Abstande auftretenden ab. 2. Beobachtet man andrerseits bei der Drehung des ganzen Kompensators anstatt der Wanderung der Streifen ein abwechselndes Auftreten von Streifen links und rechts symmetrisch vom Faden, so zeigt dies linearpolarisirtes Licht an.

Axenverhältnis der Ellipse. Um dieses zu bestimmen, drehen wir den Analysator sorgfältig in die Lage, bei welcher der Streifen möglichst dunkel ist. Die Polarisationsebene des Analysators bilde mit einem Hauptschnitt des Kompensators jetzt den Winkel φ, dann ist

$$\frac{\text{Axe parallel jenem Hauptschnitt}}{\text{Axe senkrecht zu jenem Hauptschnitt}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Über die Theorie d. Bab. Kompensators, s. z. B. Dorn, im Anhang zu Neumann, Vorlesungen über Optik; C. Schmidt, Zeitschr. f. Instr.-Kunde, 1891, 439; und Wied. Ann. 45, 377. 1892.

Hilfsbeobachtungen für Magnetismus und Elektricität.

48. Winkelmessung mit Spiegel und Skale (Poggendorff und Gaufs).

Die Messung kleiner Drehungen mit Spiegel und Skale findet eine vielfache Anwendung. Sie ist an den Magnetometern und Galvanometern entstanden. Die Methode setzt voraus, dafs die zu messenden Winkel klein sind.

Mit der Axe, deren Drehung gemessen werden soll, ist ein derselben paralleler Spiegel verbunden. In diesem wird mit einem Fernrohre eine zur Drehaxe senkrechte Skale beobachtet, welche in der Nähe der Spiegelnormale, nach Umständen bis 5 m vom Spiegel entfernt aufgestellt ist. Meist gibt man der Skale bez. dem Fernrohr die Stellung, in welcher bei nicht abgelenktem Spiegel nahezu der Punkt, welchen ein vom Spiegel auf die Skale gefälltes Perpendikel trifft, in dem Fadenkreuz erscheint. Wir nennen diesen Punkt kurz den „mittleren Skalenteil". Eine genauere Bestimmung desselben macht man am einfachsten mit einem rechten Winkel, den man an die Skale so anlegt, dafs die Visirlinie längs des anderen Schenkels den Spiegel trifft.

Einstellung von Fernrohr und Skale. Zuerst stellt man das Fernrohr durch Verschieben des Okularrohres genähert auf die richtige Sehweite ein, d. h. auf die doppelte Entfernung der Skale vom Spiegel. Dann gibt man ihm, während das Rohr nach dem Spiegel gerichtet ist, diejenige Stellung, bei welcher das dicht neben dem mittleren Skalenteil visirende Auge das Objektiv des Fernrohres, oder das neben dem Fernrohr visirende den mittleren Skalenteil im Spiegel sieht. Alsdann wird das Bild der Skale, wenn es nicht bereits im Gesichtsfelde des Fernrohres ist, durch eine kleine Drehung in demselben erscheinen. Schliefslich werden die feineren Einstellungen vorgenommen.

Zu den letzteren gehört das Deutlichsehen von Skale und Fadenkreuz. Zuerst wird das Fadenkreuz auf richtige Sehweite gestellt, dann das Okularrohr verschoben, bis Skalenteile und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen, d. h. sich bei dem seitlichen Bewegen des Auges vor dem Okular nicht gegeneinander verschieben.

Wechseln bei zusammenhängenden Ablesungen Beobachter von verschiedener Sehweite, so soll ein Jeder das deutliche Bild nur durch Verschieben des zwischen Auge und Fadenkreuz befindlichen Teiles des Okulars hervorbringen. Jedes Ablesefernrohr soll also das Akkommodiren des Auges auf das Fadenkreuz durch leicht verschiebbare oder verschraubbare Linsen vor dem Fadenkreuz gestatten.

Objektive Beobachtung. Man kann die Anordnung auch so treffen, dafs man das Licht von einer scharf markirten Lichtquelle (Spalt; Faden vor einer Flamme; elektrische Glühlampe mit geradem Faden) durch eine Linse auf den Spiegel und von da auf eine Skale fallen läfst. Durch richtige Linsenstellung kann ein deutliches objektives Bild der Marke auf der Skale erhalten werden, dessen Verschiebung zur Winkelmessung gerade so benutzt wird wie das Bild im Fernrohr. Ein Hohl- anstatt des Planspiegels läfst auch die Projektionslinse ersparen.

Über Versilberung von Glasspiegeln s. 7, 6

49. Reduktion der Skalenablesung auf den Winkel und seine Funktionen.

Wir nehmen an, dafs die Skaleneinstellung des nicht abgelenkten Spiegels u. s. w. mit dem Fufspunkt der Senkrechten von dem Spiegel auf die Skale (dem „mittleren" Skalenteil) nahe zusammenfällt. Skalenausschlag nennen wir die Differenz e des beobachteten Skalenteils von dieser Ruhelage.

1. Für kleine Ablenkungen ist der Ausschlagswinkel φ dem Skalenausschlag proportional. Und zwar, wenn A den Abstand der spiegelnden Fläche von der Skale, ausgedrückt in Skalenteilen bedeutet (also mm, wenn die Skale in mm geteilt ist), so wird der Bogenwert eines Skalenteiles gefunden in absolutem Mafse (Anh. Nr. 3) $=1/(2A)$; in Bogengraden u. s. w.:

$$=\frac{1}{A}\cdot 28{,}648^{\circ}=\frac{1}{A}\cdot 1718{,}9'=\frac{1}{A}\cdot 103132''.$$

Ferner $$\sin\varphi=\operatorname{tg}\varphi=e/(2A).$$

2. Für gröfsere Ablenkungen gelten die Reihen

$$\varphi = \frac{28{,}648^0}{A} e \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{5}\frac{e^4}{A^4} \cdots\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{8}\frac{e^4}{A^4} \cdots\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{31}{128}\frac{e^4}{A^4} \cdots\right)$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{e}{4A}\left(1 - \tfrac{11}{32}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{431}{2048}\frac{e^4}{A^4} \cdots\right).$$

Bis zu Ablenkungen von 6° wird meistens das erste Korrektionsglied genügen. Man reducirt hiernach einen Skalenausschlag e auf eine dem Bogen, der Tangente, dem Sinus, dem Sinus des halben Winkels proportionale Gröfse, indem man bez. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ oder $\frac{11}{32} \cdot e^3/A^2$ von e abzieht.

3. Für beliebig grofse Ablenkungen ist an gerader Skale

$$\operatorname{tg} 2\varphi = e/A \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(e/A).$$

Die letztere Formel erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung, die anderen aus den Reihenentwickelungen für φ, $\operatorname{tg}\varphi$ u. s. w.

In Tab. 21a findet sich für verschiedene Skalenabstände die Korrektion auf Bögen; um auf die Tangente zu reduciren, hat man die Korrektionszahlen um ihren 4ten Teil zu verkleinern. Man stellt die Tabelle am besten graphisch dar und entnimmt aus der Kurve die Werte für bestimmte Ausschläge.

Ausführliche Reduktionstafeln s. Czermak, Berlin 1890.

Messung eines Skalenabstandes. Die Messung bis auf etwa ± 1 mm mit Bandmafs, mit einem Draht, den man nachher vergleicht, oder mit zwei Mafsstäben, die man an einander gleiten läfst, bietet meist keine Schwierigkeit. Zu genauen Messungen können etwa zwei Kontaktmafsstäbchen dienen, die man, den einen mit dem Spiegel, den anderen mit der Skale in Berührung bringt. Von den Mafsstäbchen senkelt man mit feinen Drähten herab vor einen hinreichend langen Mafsstab oder auf zwei Punkte des Fufsbodens, deren Abstand genau gemessen werden kann.

Papierskalen ändern ihre Länge mit der Zeit merklich; mm-Skalen auf Milchglas (z. B. von Hartmann & Braun) sind wohl die besten.

Korrektionen wegen verschiedener Umstände.

a) Wegen Deckglasdicke. Liegt in dem Wege der Lichtstrahlen eine feste Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsverhältnis n, so hat man von dem gemessenen Skalenabstand abzuziehen $d \cdot (n-1)/n$, also für gewöhnliches Glas nahe $\frac{1}{3}d$. (Vgl. 39a, 1.)

b) Wegen Spiegeldicke. Der von der Vorderfläche eines rückwärts belegten Glasspiegels bis zur Skale gemessene Abstand A ist zu vermehren, nicht um die ganze Dicke δ, sondern nur um die optische Dicke δ/n des Spiegels, also nahe um $\frac{2}{3}\delta$. Ist die Glasdicke der Messung

mit dem Maſsstabe unzugänglich, so kann man diese „optische Dicke“ auch mit dem Mikroskop als den halben Abstand eines Punktes auf der Vorderfläche von seinem Bilde in der spiegelnden Fläche bestimmen. Vgl. **39 a 3.**

c) Wegen Spiegelneigung. Die Vertikalebene der Skale werde getroffen von der Spiegelnormale in der Höhe N, von der durch den Spiegel gelegten Horizontalen in der Höhe H, von der Visirlinie des Fernrohrs in der Höhe F. Dann ist anstatt des gemessenen Horizontalabstandes A_0 der Skale vom Spiegel in Rechnung zu setzen

$$A = A_0 + \frac{(N-H)(N-F)}{A_0}.$$

d) Wegen Spiegelkrümmung. Ist ein nicht ebener Ablesespiegel in der Entfernung a von der Drehaxe angebracht, so muſs der gemessene Skalenabstand A_0 für Konkavspiegel vermehrt, für Konvexspiegel vermindert werden um $A_0\, a/r$, wenn r den Krümmungshalbmesser des Spiegels (**48** III) bedeutet. Da die Spiegel sich schon durch das Fassen leicht etwas verziehen, so kann diese Korrektion für stark excentrische Spiegel beträchtlich werden.

F. K., Wied. Ann. 31, 95. 1887.

50. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen.

Der Skalenteil, auf welchen der Spiegel sich einstellen würde, wenn er in Ruhe wäre, die Ruhelage oder Gleichgewichtslage, läſst sich durch Beobachten des schwingenden Spiegels auf folgende Weisen ableiten.

1. Umkehrbeobachtungen. Sind die Schwingungen rasch oder groſs, so beobachtet man einige auf einander folgende Umkehrpunkte des Fadenkreuzes auf der Skale. Aus je dreien findet sich die Ruhelage, indem das arithmetische Mittel aus Nr. 1 und 3 mit Nr. 2 zum arithmetischen Mittel vereinigt wird. Die Vorschriften zur Bestimmung der Ruhelage einer Wage (7) können ohne weiteres angewandt werden. Bei raschen Schwingungen kann man die Umkehrpunkte Nr. 1, 4, 7 etc. beobachten.

2. Standbeobachtungen. Wenn die Bewegung der Nadel so langsam ist, daſs man in jedem Augenblick den Stand des Fadenkreuzes auf der Skale genau angeben kann, so gibt das arithmetische Mittel aus zwei beliebigen, um die Zeit der Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen die Ruhelage.

3. Gedämpfte Schwingungen. Beide Regeln setzen eine langsame Abnahme der Schwingungsweite voraus. Ist eine stärkere Dämpfung vorhanden (z. B. durch Umgebung eines Magnets mit einem Kupferrahmen), so findet sich aus

zwei um die Schwingungsdauer aus einander liegenden Ablesungen p_1 und p_2, z. B. aus zwei Umkehrpunkten, die Ruhelage p_0, wenn k das Dämpfungsverhältnis, (vgl. 51 und das Beispiel daselbst)

$$p_0 = p_2 + (p_1 - p_2)/(1+k).$$

Zur Beruhigung von Schwingungen einer Magnetnadel dient ein Magnet, welcher nach dem Gebrauch hinreichend entfernt in der Höhe der Nadel vertikal aufgestellt wird, oder auch ein galvanischer Strom in der Nähe der Nadel, den man geeignet schliefst und unterbricht.

51. Dämpfung und logarithmisches Dekrement.

Von grofser Bedeutung für magnetische und elektrische Messungen ist die Abnahme der Schwingungen, etwa einer Magnetnadel, welche durch eine Kupferhülse oder einen Multiplikator gedämpft ist. Die Dämpfung entsteht durch die von der bewegten Nadel in dem Kupfer inducirten Ströme; ihr Gesetz (78) sagt, dafs kleine Bogen in geometrischer Reihe abnehmen. Das konstante Verhältnis k eines Schwingungsbogens zu dem folgenden heifst Dämpfungsverhältnis und $\log k = \lambda$ das logarithmische Dekrement (Gaufs).

Die Bestimmung geschieht durch die Beobachtung einer Reihe von Umkehrpunkten. Die Differenz zweier auf einander folgenden Umkehrpunkte, bei gröfseren Schwingungen nach 49 auf Bogenwert korrigirt, gibt den Bogen. Ist a_p die Gröfse des $p$ten, a_q des $q$ten Bogens, so ist

$$k = \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{1}{q-p}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log a_p - \log a_q}{q-p}.$$

Für die Genauigkeit des Resultates ist es günstig, wenn die beiden durch einander dividirten Bogen zu einander etwa im Verhältnis 2,7 stehen.

Aus einer Reihe (am besten einer ungeraden Zahl) von Umkehrpunkten kann man die Dämpfung so herleiten, wie das Beispiel auf f. S. zeigt. e ist die Entfernung des Umkehrpunktes vom mittleren Skalenteil (hier 500). Der Skalenabstand betrug 2600 Sk.-T., also die Korrektion der Ausschläge auf Bogenwert $\frac{1}{3}e^3/2600^2$ (49). Aus Bogen Nr. 1 und 4, 2 und 6 etc. wird λ und k erhalten.

Hinter dem Vertikalstrich wird mit dem bekannten Dämpfungsverhältnis $k = 1{,}151$ aus je 2 Umkehrpunkten die Ruhelage (50, Nr. 3) berechnet.

Beob. Umk.-Punkte	e	$\frac{e^2}{8 \cdot 3600^2}$	Korr. Umk.-Punkte	Bogen α	$\frac{\alpha}{2,151}$	Ruhelage.
285,0	215	0,5	285,5	424,0	197,1	512,4
710,0	210	0,5	709,5	368,1	171,1	512,5
341,2	159	0,2	341,4	320,9	149,2	513,1
662,5	162	0,2	662,3	278,3	129,4	513,4
383,9	116	0,1	384,0	241,6	112,3	513,3
625,7	126	0,1	625,6	210,0	97,6	513,2
415,6	84	0,0	415,6		Mittel	= 513,09

Man erhält aus 1 und 4 $\lambda = \frac{1}{3}(\log 424{,}0 - \log 278{,}3) = 0{,}0610$
" 2 " 5 368,1 241,6 0,0609
" 3 " 6 320,9 210,0 0,0614
Mittel $\lambda = 0{,}0611$; $k = 1{,}151$

Die Anwendung natürlicher Logarithmen oder die Multiplikation der obigen λ mit 2,3026 liefert das „natürliche log. Dekrement“. Über die Theorie und über aperiodische Dämpfung vgl. **78.**

Inkonstanz der Dämpfung. Für gröfsere Schwingungen nimmt die Dämpfung, besonders bei schmalem oder hohem Multiplikator und längerem Magnet etwas ab. Die Abnahme ist ungefähr dem Quadrate der Schwingungsweite proportional und wird empirisch bestimmt.

Luftwiderstand. Wird die Dämpfung gesucht, welche ein Multiplikator etc. allein geben würde, so beobachtet man sowohl bei geschlossener wie bei unterbrochener Leitung. Das log. Dekrement im letzteren von dem im ersteren Falle abgezogen gibt dasjenige des Multiplikators allein.

52. Schwingungsdauer.

Schwingungsdauer nennt man hier, wie bei dem Pendel,[1]) die Zeit, welche zwischen einer Elongation (Umkehr, gröfste Ablenkung) bis zur nächsten auf der anderen Seite verfliefst. Bei langsamen Schwingungen ist die Umkehr zur Zeitbestimmung ungeeignet, denn die Bewegung ist gerade in diesem Augenblick unmerkbar. Dagegen passirt der Körper einen der Gleichgewichtslage nahe gelegenen Punkt mit der gröfsten Geschwindigkeit, so dafs der Durchgang scharf zu beobachten ist. Aus zwei aufeinander folgenden Durchgangszeiten durch

1) In der Akustik und Optik heifst der doppelte Wert die Schwingungsdauer.

denselben Punkt (in entgegengesetzter Richtung) findet sich der zwischenliegende Augenblick der Umkehr als arithmetisches Mittel.

Man markirt also einen der Ruhelage nahe liegenden Punkt (an der Skale durch Überhängen eines hinreichend sichtbaren Fadens), beobachtet die Zeiten, in welchen dieser Punkt passirt wird, nach dem Schlage einer Sekundenuhr und nimmt zunächst aus je zwei solchen benachbarten Zeiten das Mittel. Die Zehntel Sekunden schätzt man aus dem Verhältnis der Abstände des Fadens von der Marke bei dem dem Durchgang vorausgehenden und dem nachfolgenden Sekundenschlage.

Berechnung der Schwingungsdauer. Würde man aus *n* so beobachteten auf einander folgenden Schwingungsdauern wieder das Mittel nehmen, so erhielte man dasselbe Resultat, wie wenn man die Differenz der ersten von der letzten Umkehrzeit durch *n* dividirt. Die zwischenliegenden Beobachtungen wären also nutzlos. Um alle zu verwerten, kann man sie in zwei Hälften teilen, immer die Differenzen der entsprechenden Nummern aus beiden Hälften nehmen, aus diesen das arithmetische Mittel berechnen und dasselbe durch $\frac{1}{2}n$ dividiren.

Durchgang beob.		Umkehrzeit ber.			Schwingungsdauer	
min	sec	Nr.	min	sec		sec
10	3,3					
	16,5	*1.*	10	9,90	aus Nr. *1* und *4*	39,90 : 3 = 13,300
	29,9	*2.*		23,20		
	43,0	*3.*		36,45	*2* und *5*	40,05 : 3 = 13,350
	56,6	*4.*		49,80		
11	9,9	*5.*	11	3,25	*3* und *6*	40,15 : 3 = 13,383
	23,3	*6.*		16,60		Mittel = 13,344.

Über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf solche Beobachtungen vgl. 3 II.

Am vorteilhaftesten ist es, sich einige genau bestimmte, weiter auseinander liegende Umkehrzeiten auf folgende Weise zu verschaffen. Es wird zweimal (oder mehrmals) eine gerade Anzahl, z. B. sechs auf einander folgende Durchgangszeiten durch den markirten Punkt beobachtet. Dann nimmt man in jedem Beobachtungssatz aus je zwei symmetrisch gegen die mittelste Elongation gelegenen Zeiten das arithmetische Mittel und aus diesen wieder das Hauptmittel.

Erster Satz. Durchgang.			Mittel.			Zweiter Satz. Durchgang.		Mittel.	
Nr.	min	sec	Nr.	min	sec	min	sec	min	sec
1.	7	40,7				10	10,5		
2.		49,0					18,9		
3.		55,6	*3. 4.*	7	59,80		25,6	10	29,75
4.	8	4,0	*2. 5.*		59,85		33,9		29,75
5.		10,7	*1. 6.*		59,75		40,6		29,70
6.		18,8					48,9		
			Hauptmittel	7	59,80			10	29,73.

Die beiden Hauptmittel sind die Zeitpunkte zweier Elongationen, so genau, wie sie aus diesen Beobachtungen zu entnehmen sind. Ihr Unterschied (= 149,93 Sec.), dividirt durch die Anzahl der zwischen ihnen verflossenen Schwingungen, gibt die Schwingungsdauer. Es ist nun nicht notwendig, diese Schwingungen wirklich gezählt zu haben; man kann sie aus den Beobachtungen selbst ableiten. Nämlich ein Näherungswert der Schwingungsdauer ist z. B. aus dem ersten Satze zu entnehmen. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Beobachtungen desselben finden sich 7^{min} $44{,}8^{sec}$ und 8^{min} $14{,}7^{sec}$ als Zeitpunkte, zwischen denen 4 Schwingungen liegen. Danach würde die Schwingungsdauer = 29,9 : 4 = 7,47 Sec. sein. Wäre dieser Wert genau, so würde 7,47 dividirt in 149,93 die gesuchte Anzahl der Schwingungen sein. Nun findet sich 149,93 : 7,47 = 20,07; die gesuchte Anzahl von Schwingungen ist also ohne Zweifel 20, die Schwingungsdauer also

$$149{,}93 : 20 = 7{,}496 \text{ Sec.}$$

Diese Bestimmung der Schwingungszahl mufs natürlich um so vorsichtiger geschehen, je gröfser die Zahl und je kürzer die Schwingungsdauer ist. Beginnt man die Beobachtungen immer mit einer bestimmten Richtung, so mufs die Schwingungszahl jedenfalls eine gerade sein.

Für genaue Messungen macht man eine gröfsere gerade Anzahl $2m$ von Beobachtungssätzen, kombinirt Nr. 1 mit $m+1$, 2 mit $m+2, \cdots m$ mit $2m$ und nimmt das Mittel der einzelnen Resultate.

Folgen die Schwingungen zu rasch, um alle Durchgänge zu notiren, so kann man immer zwei (allgemein eine gerade Anzahl) Durchgänge überspringen, z. B. aus den Durchgängen Nr. 1 4 7 10 13 16 den Satz von Beobachtungen bilden. Übrigens rechnet man wie oben und teilt schliefslich das Resultat durch 3.

Kurz dauernde Schwingungen von wenigen Sekunden Dauer beobachtet man besser in ihren Umkehrpunkten, als in den Durchgängen durch die Mitte, und zwar am bequemsten in lauter einseitigen Umkehrpunkten, wobei man nach Bedürfnis überspringen kann.

Die Schwingungsdauer einer gedämpften Nadel vom log. Dekrement λ verhält sich zu derjenigen ohne Dämpfung wie $\sqrt{\pi^2+(2{,}303\cdot\lambda)^2}$ zu π (51; 78; Tab. 21b).

Ob mit Spiegel und Skale oder mit bloſsem Auge beobachtet wird, ist für die Methode natürlich gleichgiltig.

Methode der Koincidenzen. Siehe **19b**.

Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bögen.

Bei der Schwingung eines Magnets oder eines bifilar aufgehangenen Körpers, oder auch eines Pendels, in welchen Fällen das zurücktreibende Drehungsmoment dem Sinus der Ablenkung proportional ist, nimmt die Schwingungsdauer t mit der Schwingungsweite α um einen nahe mit α^2 proportionalen, also für kleine Weiten sehr geringfügigen Betrag zu. Fast immer sucht man den Grenzwert, welchem t sich annähert, wenn α verschwindend klein wird: man muſs also, sobald die Schwingungen nicht klein genug waren, den durch Beobachtung gefundenen Wert auf diesen Grenzwert t_0 korrigiren. Dies geschieht nach der Formel (Tab. 21)

$$t_0 = t - (\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{5}{64}\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha)\,t.$$

Bei der Beobachtung mit Fernrohr und Skale sind die Schwingungen (etwa 50 bis 300 Skalenteile) stets so klein, daſs der erste Teil des Korrektionsgliedes genügt. Man kann dann rechnen, wenn p den Schwingungsbogen, A den Skalenabstand, beide in Skalenteilen, bedeuten,

$$t_0 = t - \frac{t}{256}\cdot\frac{p^2}{A^2}.$$

Als den Wert von α oder p, welcher in obige Formeln eingesetzt wird, kann man meistens das arithmetische Mittel a aus dem ersten und dem letzten Bogen einsetzen. Genauer und immer genügend ist, wenn noch die Differenz des ersten und letzten Bogens mit d bezeichnet wird, einzusetzen $a(1-\frac{1}{12}d^2/a^2)$.

Die vollständige Formel ist $t = t_0(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{64}\sin^4\frac{1}{2}\alpha\cdots)$. Wird t_0 durch t ausgedrückt und bei der Division nur die vierte Potenz berücksichtigt, so entsteht die erste Formel. Diejenige für Skalenbeobachtungen wird mit Hilfe von **49** leicht gefunden.

53. Bifilare Aufhängung (Harris, Gauſs).

Ein an zwei Fäden aufgehangener schwerer Körper verlangt für seine Gleichgewichtslage, daſs die Fäden in derselben Vertikalebene liegen. Für kleine Drehungen des Bifilarkörpers

ist das rücktreibende Moment dem Sinus der Ablenkung proportional. Wenn die Länge der Fäden sehr grofs gegen ihren Abstand ist, gilt dies auch für gröfsere Ablenkungen.

Es sei e_1 und e_2 der obere bez. untere Horizontalabstand der beiden Fadenenden,

h die mittlere Fadenlänge. Sollten die Fäden von der Vertikalen abweichen, so bedeutet h den mittleren Vertikalabstand der beiden Fadenenden,

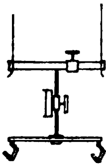
P die Summe der nahe gleichen Vertikalspannungen der Fäden.

Dann ist das rücktreibende Drehungsmoment für den Ablenkungswinkel α gleich

$$P\frac{e_1 e_2}{4h}\cdot\sin\alpha.$$

P bedeutet das Gewicht des angehängten Körpers, vermehrt um das halbe Gewicht der Fäden. Im „absoluten" Mafssystem ist das Gewicht als Masse mal Schwerbeschleunigung einzusetzen (s. **19b**, Anh. Nr. 6 und Tab. 8a).

Die beiden Fäden sind gleich gespannt, wenn der Schwerpunkt des Bifilarkörpers in der mittleren Vertikalen zwischen ihnen liegt. Man prüft diese Bedingung durch Heben des Körpers an einem Punkte in der mittleren Vertikalen, wobei seine Lage sich nicht ändern darf.



Zur bifilaren Aufhängung eines Körpers ist oft eine Suspension wie Fig. bequem. Das kleine Laufgewicht dient zum Äquilibriren.

Steifheit der Fäden. Die Steifheit hat denselben Einflufs, als ob die Drähte verkürzt würden. Es sei ϱ und E Halbmesser und Elasticitätsmodul. Dann mufs man von der gemessenen Länge abrechnen

$$\delta = \varrho^2\sqrt{\frac{2\pi E}{P}}.$$

Da der gewöhnliche Elasticitätsmodul (**33** und Tab. 17) sich auf kg-Gewicht und qmm bezieht, so werden für gr und cm die Elasticitätsmoduln 100000 mal gröfser; also z. B. für Eisen $E = 200\cdot10^7$, Messing $90\cdot10^7$. ϱ in cm, P in gr-Gewichten geben δ in cm.

Torsionselasticität. Das Torsionsmoment beider Fäden zusammen beträgt (36)

$$\frac{2\pi}{5}\frac{\varrho^4 E}{h}\cdot\alpha,$$

oder auch merklich $\cdot\sin\alpha$, wenn α klein ist. Im absoluten Mafssystem kommt der Faktor $g(=981\ \mathrm{cm/sec^2})$ hinzu.

Die gesamte mit $\sin\alpha$ zu multiplicirende „Direktionskraft" ist also

$$D = gm\frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} + \frac{2\pi}{5} gE\frac{\varrho^4}{h},$$

wo m die Masse des Bifilarkörpers, vermehrt um die halbe Masse der Aufhängefäden, bedeutet.

Beispiel. Die 300 cm langen Aufhängedrähte aus Messing waren 0,01 cm dick, also $\varrho = 0{,}005$. Der Bifilarkörper wog 100 g. Dann ist $\delta = 0{,}005^2\sqrt{(2\pi\cdot 90\cdot 10^7/100)} = 0{,}19$ cm. Ferner ist

$$\frac{2\pi}{5} gE\frac{\varrho^4}{h} = \frac{2\cdot 3{,}14}{5}\,981\cdot 90\cdot 10^7\cdot\frac{0{,}005^4}{300} = 2{,}3\,[\mathrm{cm^2\cdot g\cdot sec^{-2}}].$$

Die Drähte wogen zusammen 0,42 g, also $m = 100 + 0{,}21 = 100{,}21$ g.

Endlich war $e_1 = e_2 = 12$ cm; also

$$gm\frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} = 981{,}0\cdot 100{,}21\,\frac{12\cdot 12}{4\cdot 299{,}81} = 11829\,[\mathrm{cm^2\cdot g\cdot sec^{-2}}].$$

Die gesamte Direktionskraft beträgt danach 11831 $[\mathrm{cm^2\cdot g\cdot sec^{-2}}]$.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

Direktionskraft aus Schwingungsbeobachtungen. Ist das Trägheitsmoment K des Bifilarkörpers, bezogen auf die Drehungsaxe, bekannt, so findet man aus der Schwingungsdauer t die Direktionskraft als (54; Anh. 10) $D = \pi^2\cdot K/t^2$. Bei dickeren Aufhängedrähten oder bei geringem Abstande derselben ist man auf dieses Verfahren angewiesen.

54. Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment eines Punktes von der Masse m im Abstande l von einer Drehungsaxe ist $l^2 m$. Das T.-M. mehrerer fest mit einander verbundener Punkte oder eines Körpers ist die Summe oder das Integral dieser Ausdrücke, berechnet für alle Körperelemente. Die Einheit, nach welcher Masse und Länge gemessen sind, wird durch ein der Zahl für das T.-M. beigesetztes $[\mathrm{g\cdot cm^2}]$ oder $[\mathrm{mg\cdot mm^2}]$ u. s. w. angegeben. (Vgl. Anhang Nr. 10.)

Schwingungsdauer t, Direktionskraft D und Trägheitsmoment K hängen durch die Formel $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

I. Berechnung.

Dieselbe setzt regelmäſsige Gestalt und homogenes Material voraus. m bedeute immer die Masse des Körpers, K sein T.-M., bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehungsaxe.

Dünner Stab von der Länge l. Bezogen auf die zum Stabe senkrechte Axe ist $K = \frac{1}{12} m l^2$.

Rechtwinkliges Parallelepipedum. a und b seien zwei Kanten desselben. Das T.-M., bezogen auf die zur dritten Kante parallele Axe, ist $K = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$.

Cylinder (auch Kreisscheibe) vom Halbmesser r. Es ist, bezogen auf die Axe des Cylinders, $K = \frac{1}{2} m r^2$.

Bezogen auf den Kreis-Durchmesser des Cylinders, wenn dessen Länge $= l$, ist $K = m(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} r^2)$.

Hohlcylinder (auch Ring) von den Halbmessern r_0 und r_1. Bezogen auf die Axe $K = \frac{1}{2} m (r_0{}^2 + r_1{}^2)$; bezogen auf die zur Axe senkrechte Mittellinie $K = m(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4}(r_0{}^2 + r_1{}^2))$.

Kugel vom Halbmesser r. Bezogen auf einen Durchmesser ist $K = \frac{2}{5} m r^2$.

Hilfssatz. Ist das T.-M. K auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Axe bezogen, K' aber auf eine dieser parallele im Abstande a befindliche Axe, so ist $K' = K + m a^2$. Z. B. ist das T.-M. eines dünnen Stabes, bezogen auf eine zum Stab senkrechte Axe an seinem Ende $= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$.

II. Bestimmung durch Belastung (Gauſs).

Das Verfahren ist anwendbar auf Körper, die mit konstanter Direktionskraft um eine vertikale Axe schwingen, also besonders auf Magnete. Man beobachtet die Schwingungsdauer t, vermehrt dann das Trägheitsmoment, ohne die drehenden Kräfte zu ändern, um eine bekannte beträchtliche Gröſse K_1 und beobachtet wieder die Schwingungsdauer t'. Dann ist das gesuchte T.-M.

$$K = K_1 t^2/(t'^2 - t^2).$$

Als bekanntes T.-M. kann z. B. dasjenige eines ausgemessenen Ringes von bekannter Masse (s. oben) dienen, mit welchem man den Magnet beschwert. Oder man verbindet zwei gleiche cylindrische Massen in gleichen horizontalen Abständen von der Drehungsaxe (dem Aufhängungsfaden) so mit dem Körper, daſs die Axe der Cylinder vertikal steht. Das T. M. dieser Cylinder zusammengenommen ist $K_1 = m(l^2 + \frac{1}{2} r^2)$, wenn m ihre Masse, l den Abstand ihrer Schwerpunkte von der Drehungsaxe des

Magnets, r ihren Halbmesser bedeutet. Der Ausdruck setzt voraus, daſs die Cylinder sich mit drehen, also daſs sie z. B. bifilar aufgehangen sind oder auf Spitzen mit groſser Reibung, oder daſs sie auf Stifte aufgesteckt sind. Hingen die Cylinder an ganz dünnen Fäden, so daſs sie keine merkliche Drehung mit dem Magnet erführen, so wäre $K_1 = ml^2$ zu setzen.

l ist der halbe Abstand der Aufhängepunkte der Gewichte von einander. Bei bifilar aufgehangenen Massen miſst man die Fadenabstände längs jeder Seite und nimmt das Mittel. Der Abstand der Mittelpunkte festgesteckter Cylinder wird an eingedrehten Kreismarken gemessen. Excentricität des Schwerpunktes fällt durch Drehen der Gewichte um 180° heraus.

Genaueres über die allgemeine Berücksichtigung des Mitschwingens der Belastungen s. Kreichgauer, Wied. Ann. 25, 289. 1885.

Beispiel. Durchmesser der Cylinder 1,00 cm $\quad r = 0,50$ cm
Sie wiegen zusammen 50,00 g $\quad m = 50,00$ g
Abstand ihrer Axen von einander = 10,026 cm $\quad l = 5,013$ cm

$$K_1 = 50,00(5,013^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 0,25) = 1262,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Ferner seien die Schwingungsdauern des Magnets gefunden: unbelastet $t = 9,737$, belastet $t' = 14,267$ sec.

Das gesuchte T.-M. des Magnets ist

$$K = 1262,8 \cdot 9,737^2/(14,267^2 - 9,737^2) = 1101,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

III. Durch bifilare Aufhängung.

Gegeben sei eine Bifilarsuspension (Fig. S. 248), in welche man den zu bestimmenden Körper einlegen kann. Aus ihrem Gewicht und den Dimensionen der Aufhängefäden werde die Direktionskraft D_0 berechnet. Die Schwingungsdauer betrage t_0. Dann ist das T.-M. der Suspension $K_0 = D_0 t_0^2/\pi^2$.

Nun legt man den Körper von dem gesuchten Trägheitsmoment K ein, so daſs sein Schwerpunkt in der mittleren Fadenvertikale liegt. Die jetzige Direktionskraft sei D und die Schwingungsdauer t; dann ist offenbar

$$K = (Dt^2 - D_0 t_0^2)/\pi^2.$$

Über die Beobachtung der raschen Schwingungen s. S. 247.

Ist der zu bestimmende Körper magnetisirt, so kann man denselben in den zwei entgegengesetzten Meridianlagen beobachten. Sind t_1 und t_2 die Schwingungsdauern, so ist zu setzen

$$t^2 = 2 t_1^2 t_2^2/(t_1^2 + t_2^2).$$

F. K., Wied. Ann. 22, 422. 1884.

55. Torsionsverhältnis eines aufgehangenen Magnets (Gaufs).

Das vom Faden ausgeübte Torsionsmoment steht bei kleinen Ablenkungen zum erdmagnetischen Drehungsmoment in einem konstanten Verhältnis Θ, dem „Torsionsverhältnis". Um Θ zu bestimmen, teilt man dem Faden eine gemessene Torsion α mit und beobachtet die neue Einstellung des Magnets, welche sich von der ursprünglichen um den Winkel φ unterscheide. Dann ist

$$\Theta = \varphi/(\alpha - \varphi).$$

In Ermangelung eines Torsionskreises dreht man den Magnet einmal ganz herum, ohne an der oberen Befestigung etwas zu ändern; dann ist $\alpha = 360^0$ zu setzen.

Bei dem Skalenabstand A bedeutet der Ausschlag e den Winkel $\varphi = 57{,}3^0 \cdot e/(2A)$. Wenn α eine ganze Umdrehung beträgt, rechnet man $\alpha = 2\pi = 6{,}28$ und $\varphi = e/(2A)$.

Indirekte Bestimmung. Das Torsionsmoment eines Fadens kann auch für sich bestimmt werden, indem man an den Faden eine Masse von bekanntem Trägheitsmoment k (54 I) hängt und die Dauer t ihrer Torsionsschwingungen beobachtet. Die Direktionskraft ist dann in absolutem Mafse $d = \pi^2 k/t^2$ (Anh. 10). Wenn zugleich die Direktionskraft D des an dem Faden aufzuhängenden Magnets bekannt ist, z. B. aus Stabmagnetismus M und Erdmagnetismus H als $D = MH$ (62 oder Anh. 16), so ist das Torsionsverhältnis $\Theta = d/(D + d)$.

Je leichter ein Magnet, desto kleiner kann man das Torsionsverhältnis machen, denn die Tragkraft eines Fadens wächst mit dem Quadrate, das Torsionsmoment aber mit der 4. Potenz der Dicke. Coconfäden (7, 20) haben je nach ihrem Ursprung ein sehr verschiedenes Torsionsmoment. 10 cm lange, feine Fäden aus dem Inneren eines Cocons gehen bis unter $d = 0{,}0001$ [C-G-S], so dafs oft ihr Torsionsverhältnis kaum in Betracht kommt. Andere erreichen ein mehr als zehnfaches Moment. Freilich ist auch die Tragkraft sehr ungleich. Wegen der elastischen Nachwirkung ist Θ für einen Cocon um eine Anzahl von Procenten unsicher.

Äufserst kleine Torsionsmomente erreicht man auch mit Quarzfäden (7, 21), die gegen den Cocon den Vorteil viel kleinerer elastischer Nachwirkung haben.

Magnetismus.

55a. Allgemeines.

I. Magnetstäbe.

Material. Am besten ist Wolframstahl. Die geeignetste Härtungstemperatur ist etwa 800° (Kirschrotglut). Überhitzen verringert die Magnetisirbarkeit, ohne die Haltbarkeit zu erhöhen. Überhitzte Stäbe lassen sich durch Neuhärten nach vorhergegangenem Ausglühen verbessern. Vgl. Holborn, Z. S. f. Instr. 1891, 113.

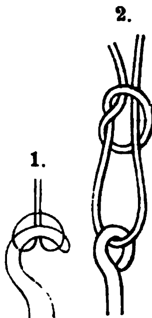
Gestalt. Die Magnetisirbarkeit wächst mit dem Verhältnis der Länge zu der Querdimension. Röhrengestalt kann sehr vorteilhaft sein. — Das magnetische Moment, welches man Stäben aus gleich beschaffenem Material von ähnlicher Gestalt erteilen kann, ist ihrer Masse proportional.

Specifischen Magnetismus eines Stabes nennt man das durchschnittliche magn. Moment seiner Volumeinheit oder auch wohl seiner Masseneinheit. 1 cm^3 wiegt etwa 7,5 g. Bei sehr gestreckter Gestalt kann man auf 1 g etwa 100 [C-G-S]-Einheiten (Anh. 15), bei dem Verhältnis Länge: Dicke = 10:1 etwa 35 permanent erreichen.

Haltbarkeit. Ein frisch magnetisirter Stab verliert einen Teil seines Magnetismus zuerst rasch, später langsamer, durch äufsere Einflüsse und auch dadurch, dafs der gehärtete Stahl schon bei gewöhnlicher Temperatur ein Anlassen erfährt. Der stationäre Zustand wird rascher erreicht, wenn man den gehärteten Stab gleich und sodann nach dem Magnetisiren jedesmal mehrere Stunden lang im siedenden Wasserdampf behandelt (Strouhal und Barus, Wied. Ann. 20, 662. 1883).

Polabstand. Für Fernwirkungen eines gewöhnlichen Magnets kann man die beiden Magnetismen in zwei Punkten, den Polen (Fernpolen) koncentrirt annehmen. Der Polabstand („reducirte" oder „virtuelle" Länge) beträgt durchschnittlich etwa $^5/_6$ der Stablänge. F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 411. 1884. Vgl. Anh. 15 u. 62b.

Aufhängung eines Magnets. Gröfsere Magnete werden, wenn man über eine beträchtliche Höhe, etwa von der Zimmerdecke herab, verfügt, am besten an hartem Messingdraht aufgehängt, der eine grofse Tragkraft und einen mäfsigen Elasticitätsmodul (Tab. 17) besitzt. Sonst nimmt man Coconfäden (7,20; 55 Schlufs) oder Bündel von solchen. Die letzteren stellt man durch Aufwickeln eines langen Fadens über 2 Glasstäbe her, die im geeigneten Abstande an der Tischkante befestigt sind. Die beiden Enden knüpft man zusammen, spannt möglichst gleichmäfsig und schlingt die äufsersten Enden des Bündels um den oberen bez. den unteren Aufhängestift (Fig. 1),



vor dem festen Anziehen die Spannung nochmals möglichst ausgleichend.

Einzelne Fäden schlingt man, wie Fig. 2, v. S. gezeichnet, wobei der Knoten schliefslich festgezogen wird, aber so, dafs der Aufhängefaden sich noch fest schlingen läfst. Das Aufhängen in losen Schlingen ist zu vermeiden. Freie Fadenenden werden kurz abgeschnitten, um nicht Reibung zu bewirken.

Für leichte Magnete können Quarzfäden dienen (7, 21), die mit Schellack angeklebt werden.

II. Verschiedene Umstände.

Erdmagnetische Variationen. Die Unruhe des Erdmagnetismus kann zu Zeiten die Beobachtungen wesentlich stören. Gewöhnlich ist die Unruhe von Mittag an am geringsten, doch kommen magnetische Störungen zu allen Tageszeiten vor.

Astasirung einer Magnetnadel. Vorzüglich für sehr empfindliche Galvanometer wird oft eine Verminderung der erdmagnetischen Direktionskraft verlangt. Man gebraucht zu diesem Zwecke Nadelpaare mit entgegengerichteten Polen; oder man umgibt das Instrument mit einem „Schutzring“ von weichem Eisen, der durch seinen eigenen Magnetismus die Wirkung des Erdmagnetismus abschwächt; oder man hängt die Nadel bifilar in verkehrter Lage auf; oder endlich, es wird ein Hilfsmagnet in geeigneter Lage (nicht zu nahe) fest angebracht, der dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. In beiden letztgenannten Fällen werden freilich auch die Deklinationsschwankungen vergröfsert. Die letzteren Mittel kann man auch verwenden, um umgekehrt die Direktionskraft zu verstärken oder der Nadel ein anderes Azimut zu geben als das nordsüdliche.

Äufsere Störungen. Magnetische Störungen aus der Umgebung durch bewegte Magnete oder veränderliche Ströme, etwa auch durch elektrische Strafsenbahnen können die Anwendung des gewöhnlichen Magnetspiegels unmöglich machen. Eine Besserung der Verhältnisse ist an Galvanometern unter Umständen möglich durch den Schutzring oder eine vollständige Einhüllung des Instruments, einschliefslich des Multiplikators, mit weichem Eisen. Durch dicke Eisenhüllen lassen äufsere Einwirkungen sich fast ganz abhalten. An Stelle der alsdann auch wegfallenden erdmagnetischen Direktionskraft kann man die Elasticität des Aufhängefadens treten lassen, ist aber dann den Fehlern der elastischen Nachwirkung unterworfen. Oder man bringt im Innern der Eisenhülle einen Richtmagnet an. Auf dauernde Konstanz des magnetischen Feldes in dicken Eisenmassen ist nicht zu rechnen.

Mechanischen Erschütterungen unterliegen besonders stark niedrige Systeme, z. B. direkt aufgehangene magnetische Spiegel. Häufig läfst die Störung sich dadurch vermindern, dafs die magnetische Axe nicht genau horizontal liegt; dann dämpft der Kupferdämpfer auch vertikale Drehungen.

Erdmagnetische Instrumente. Für Reise- und ähnliche Zwecke sind kompendiöse Instrumente, teilweise zugleich für Deklination und Intensität bestimmt, hergestellt worden von Fox, Lamont, Meyerstein, Neumayer, Weber, Wild u. a. (vgl. **59a**).

Untersuchung von Materialien auf ihren unmagnetischen Zustand. Am einfachsten bringt man dieselben dicht an den Pol eines aufgehangenen kräftigen Magnets mit Spiegel, z. B. an den Magnet eines Bifilarmagnetometers mit dünnem Deckglase (**61**). Ganz unmagnetisch sind wenige Körper; ziehen sie nicht an, so stofsen sie ab (sind diamagnetisch). Hierher gehören die meisten organischen Körper, Wasser, reines Kupfer. Bei Metallen übersehe man nicht, dafs die Annäherung eines Leiters an sich Abstofsung bewirkt und umgekehrt. Man halte oder lege die Stücke also ruhig neben den Magnetpol. Der Magnetismus von Kupfer und dgl. stammt nicht selten von Eisenteilchen an der Oberfläche, auch von eisenhaltigem Lack. Abkochen mit verdünnter Schwefelsäure hilft dann. Nachher mit heifsem Wasser reinigen!

Über starke Felder s. **81b**.

56. Erdmagnetische Inklination.

Inklination ist der Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalen bildet (Tab. 24).

Die Orientirung des geteilten Kreises in den magnetischen Meridian geschieht mit Hilfe einer gewöhnlichen Bussolennadel, wobei eine Genauigkeit bis auf 1^0 ausreichend ist.

Die Bezifferung der Kreisteilung variirt bei verschiedenen Instrumenten. Wir wollen annehmen, dafs in allen Quadranten die Bezifferung von dem horizontalen Teilstriche als Nullpunkt ausgeht. Bei jeder Nadelstellung werden beide Spitzen abgelesen und das Mittel genommen. Wegen der Reibung ist es gut, die Ruhelage der Nadel aus Schwingungsbeobachtungen abzuleiten (8; **50**, 1).

Ein Inklinatorium mit feststehendem Kreise wird zuerst nach einem von dem obersten Teilstrich herabhängenden Senkel vertikal gestellt. An einem Instrumente mit drehbarem Kreise soll die Drehungsaxe vertikal sein, was man daran erkennt, dafs die Blase einer am Instrumente angebrachten Wasserwage in jeder Stellung des Kreises dieselbe Lage einnimmt (**88**, 1).

Die etwaige seitliche Verschiebung des Schwerpunktes verlangt ein Umlegen der Nadel (bei drehbarem Kreise eine Drehung des Kreises mit der Nadel um 180^0), wodurch zugleich eine Abweichung der geometrischen von der magnetischen

Axe der Nadel herausfällt (und bei drehbarem Kreise eine Abweichung der Verbindungslinie der Nullpunkte von der horizontalen Richtung). Die etwaige Längsverschiebung des Schwerpunktes verlangt ein Ummagnetisiren der Nadel. Es werde also beobachtet der Neigungswinkel φ_1 bei irgend einer Auflegung der Nadel, und ψ_1, nachdem die Nadel um ihre magnetische Axe um 180° gedreht ist; oder bei drehbarem Kreise, nachdem letzterer mit der Nadel um 180° gedreht worden ist.

φ_2 und ψ_2 seien entsprechend nach dem Ummagnetisiren die Winkel in den beiden genannten Lagen.

I. Sind die vier Winkel nahe gleich, so ist die Inklination i das arithmetische Mittel

$$i = \tfrac{1}{4}(\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2).$$

II. Jedenfalls kann man durch seitliches Abschleifen der Nadel vor der Messung leicht bewirken, dafs φ_1 und ψ_1, sowie φ_2 und ψ_2 unter sich nahezu gleich sind; dann ist

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2)].$$

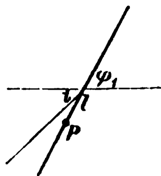
III. Sollten aber auch φ_1 und ψ_1 um einen gröfseren Betrag von einander abweichen, so setze man

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \psi_1)$$
$$\operatorname{cotg} \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \psi_2),$$

und rechne endlich

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Formel II und III ergeben sich, wenn man die unbekannte Verschiebung des Schwerpunktes in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur magnetischen Axe zerlegt denkt und nun die Bedingungen des Gleichgewichts der magnetischen und der Schwerkräfte aufstellt. Wäre z. B. der Schwerpunkt um die Gröfse l nach dem Nordende verschoben, so ist, wenn wir Gewicht und magn. Moment der Nadel durch p und M bezeichnen, und durch C die ganze Intensität des Erdmagnetismus (59 und Anh. Nr. 16), $pl \cos \varphi_1 = MC \sin(\varphi_1 - i)$. Wird ummagnetisirt, so ist ebenso $pl \cos \varphi_2 = MC \sin(i - \varphi_2)$.



Die kreuzweise Multiplikation beider Gleichungen und die Auflösung der Sinus gibt, wenn durch $\cos i \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ dividirt wird,

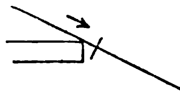
$$\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} i.$$

woraus (II) folgt. Ähnlich III.

Vorausgesetzt wird, dafs der Magnetismus vor und nach dem Umstreichen der Nadel gleich ist, was bei sorgfältig

gleichem Streichen einer dünnen Nadel nahe vorausgesetzt werden kann. Immerhin ist anzuraten, dafs diese Excentricität des Schwerpunktes nur kleine Differenzen der Einstellung vor und nach dem Ummagnetisiren ergibt.

Streichen der Nadel. Man fafst dieselbe auf der einen Seite in der Nähe der Drehungsaxe, setzt die andere Seite an den Pol des Magnets und führt die Nadel bis über das Ende an dem Pol entlang, etwa wie in beistehender Figur. So mögen z. B. beide Flächen des einen Endes je zweimal, dann die des anderen je viermal und endlich die des ersteren noch zweimal gestrichen werden.



Vollkommene Vorschriften s. Gaufs Werke, Bd. V, S. 444.

57. Erdmagnetische Deklination.

Deklination (Tab. 28) ist der Winkel des magnetischen mit dem astronomischen Meridian. Um die Richtung festzustellen, zählt man den Winkel vom astronomischen zum magnetischen Norden, nennt also bei uns die Deklination „westlich". Insofern man die Lage der magnetischen Axe in einem Magnet nicht verbürgen kann, wird für eine genaue Messung die Magnetnadel in zwei Lagen beobachtet.

Zur Bestimmung nach Gaufs gehört ein Theodolit mit Horizontalkreis und eine ihrem astronomischen Azimut nach vom Theodolit aus bekannte Visirrichtung: etwa ein Fadenkreuz mit Linse im Observatorium oder eine entfernte terrestrische Marke, welche man mit Hilfe des Polarsterns oder der Sonne festgelegt hat (88. 89). Endlich ein Magnetometer, dessen Magnet sich um 180^0 um seine Axe drehen läfst. Das Theodoliten-Fernrohr steht nahe in der Fortsetzung des Magnets.

Am bequemsten ist, wenn der Magnet eine Längsdurchsicht hat, die am einen Ende mit einer Linse von einer Brennweite gleich der Länge des Magnets geschlossen ist. Am anderen Ende befindet sich eine Marke (Blende mit kleiner Öffnung, Fadenkreuz oder Glasteilung), welche also durch die Linse als ein fernes Objekt erscheint.

Ein mit dem Magnet verbundener Spiegel, dessen Normale nahe mit der magnetischen Axe zusammenfällt, leistet dieselben Dienste, wenn das Fadenkreuz des Theodoliten beleuchtbar ist.

Man stellt das Fernrohr auf das Spiegelbild seines Fadenkreuzes ein.

Die Bezifferung des Teilkreises werde im Sinne der täglichen Sonnenbewegung angenommen.

Nach Vertikalstellung der Drehungsaxe des Theodoliten richtet man sein Fernrohr auf die terrestrische Marke. Die Kreisablesung sei $=\alpha$. Ist Z das astronomische Azimut der Marke, von der Nordrichtung als Nullpunkt nach Westen gezählt, so müfste der Theodolit auf den Teilstrich $\alpha+Z$ gestellt werden, damit das Fernrohr nach Norden gerichtet wäre.

Man richtet das Fernrohr auf die Marke im Magnet; die Kreisablesung sei α_1. Man dreht den Magnet um 180° um seine Axe, so dafs die vorher untere Seite die obere wird, und stellt wiederum auf die Marke ein. Die Kreisablesung sei α_2; α_1 und α_2 weichen nur wenig von einander ab.

Nun würde offenbar

$$\delta' = \alpha + Z - \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

die westliche Deklination sein, wenn der Faden kein Torsionsmoment ausübte. Um letzteres zu eliminiren, mufs der Winkel bestimmt werden, um welchen der Faden bei der Beobachtung gedrillt war. Zu diesem Zwecke nimmt man den Magnet von seinem Träger am Faden ab, ersetzt ihn durch einen unmagnetischen Stab von gleichem Gewicht und beobachtet die dann erfolgende Drehung des Trägers etwa über einem untergelegten Teilkreis. Beträgt der Drehungswinkel, in dem Sinne der täglichen Sonnenbewegung positiv gerechnet, φ, so ist die Deklination

$$\delta = \delta' + \Theta\varphi,$$

unter Θ das Torsionsverhältnis (55) verstanden.

Variationen. Um Schwankungen der Deklination zu messen, dient ein Magnetometer, d. i. ein mit Spiegel versehener aufgehangener Magnet mit fest aufgestelltem Skalenfernrohr (48). Ist A der in Skalenteilen gemessene Abstand der Skale vom Spiegel, Θ das Torsionsverhältnis (55), so hat ein Skalenteil in absolutem Winkelmafs (Anh. 3) den Wert $(1+\Theta)/2A$; in Bogenminuten $1719(1+\Theta)/A$ (49).

Über die Beobachtung schwingender Nadeln s. 50.

58. Winkelmessung mit der Bussole.

Tab. 23 enthält für die geographischen Längen und Breiten des mittleren Europa die erdmagnetische Deklination. Die Zahlen aus der Tabelle werden mit den wirklichen im Freien bis auf $^1/_2$ Grad äufserstens übereinstimmen. Hiernach läfst sich eine astronomische Richtung durch die Magnetnadel mit mäfsiger Genauigkeit festlegen.

Für den Gebrauch der betreffenden Instrumente, auf welche wir nicht näher eingehen, gelten die allgemeinen Vorschriften für Winkelmefsinstrumente. Die Genauigkeit hängt hauptsächlich von der Länge der Bussolennadel ab.

Den Einflufs der Reibung auf der Spitze verringert man durch geringe Erschütterungen der Bussole vor der Ablesung der Nadel.

Es ist noch darauf hinzuweisen, dafs eine Bussole, auf irgend eine drehbare Vorrichtung aufgesetzt, daselbst einen Teilkreis vertreten kann. Die Nadelspitze dient als Index.

Bussolen, die in der Tasche getragen werden, hauche man vor dem Gebrauch an, um die häufig vorkommende elektrische Ladung von der Deckplatte zu entfernen.

59. Bestimmung der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus (Gaufs).

Intensität der magnetischen Kraft an einem Orte oder auch magnetische Feldstärke heifst die Kraft, welche daselbst auf einen Magnetpol Eins ausgeübt wird. Der Pol Eins ist dadurch definirt, dafs er auf einen gleichen Pol aus dem Abstande Eins die Kraft Eins ausübt (Anh. 14—16).

Auf die gewöhnliche Magnetnadel wirkt die Horizontalkomponente H der Intensität. Die Messung derselben besteht aus einer Schwingungsdauer- und einer Ablenkungsbeobachtung. Erstere gibt, wenn das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets bekannt ist, das Produkt $P = MH$ aus dessen magnetischem Moment M und der Intensität H. Der Quotient $Q = M/H$ wird gefunden, indem man die Ablenkung einer anderen Magnetnadel durch denselben Magnet beobachtet. Aus P und Q können M und H einzeln berechnet werden.

Gaufs rechnete nach mm, mg und sec; [Mm-Mg-Sec]-System. Dem jetzigen Gebrauch entsprechend nimmt man cm und gr; [C-G-S]-System. Im alten System waren die Zahlen für H 10 mal gröfser (Tab. 28).

I. Bestimmung von MH durch Schwingungen.

Man hängt den Magnet am Faden auf (55a). Es sei t die auf unendlich kleine Bogen reducirte Schwingungsdauer (52), K das Trägheitsmoment des Magnets (54), Θ das Torsionsverhältnis des Fadens (55), dann ist das gesuchte Produkt

$$MH = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)} = P.$$

Denn die Direktionskraft ist $MH(1+\Theta)$, und das Quadrat einer Schwingungsdauer geteilt durch π^2 gibt das Verhältnis des Trägheitsmoments zur Direktionskraft (Anh. 10).

Über die Bestimmung von MH mit der Wage vgl. III.

II. Bestimmung von M/H durch Ablenkungen.

Denselben Magnetstab läfst man aus zwei mal zwei gleichen gemessenen Entfernungen eine Magnetnadel ablenken. Aus den Ablenkungswinkeln erhält man M/H nach folgenden Regeln. Den Einflufs eines Aufhängefadens s. S. 262.

Erste Hauptlage. c ist der Mittelpunkt der Bussole, NS

N

a a′ c b′ b

S

der magnetische Meridian. Der Magnet wird folgeweise in den gezeichneten Lagen östlich oder westlich von der Nadel in der Höhe der letzteren hingelegt. Die Abstände der Magnetmitte vom Centrum der Bussole sind paarweise gleich, $ac = bc$, $a'c = b'c$.

Der Stab befinde sich z. B. in a. 1. Man liest die Einstellung der Nadel an beiden Spitzen ab. 2. Dann dreht man den Stab um 180°, wobei sein Mittelpunkt wieder in a zu liegen kommt, und liest beide Spitzen der nach der anderen Seite abgelenkten Nadel ab. 3. Man nimmt von den Unterschieden (bez. wenn die Teilung von zwei Nullpunkten nach beiden Seiten gezählt ist, von den Summen) der beiden Einstellungen jeder Spitze die Hälfte und aus beiden Hälften das Mittel. Dieses ist der zur Stellung a gehörige Ablesungswinkel. Siehe das Beispiel.

Gerade so wird für die Stellungen a', b' und b verfahren.

Nun nimmt man aus den nahe gleichen Winkeln für a und b und denen für a' und b' die Mittel. (Jedes entsteht also aus acht einzelnen Ablesungen.) Nennen wir

φ bez. φ' die mittlere Ablenkung für a und b, bez. a' und b,
r bez. r' die halbe Länge ab, bez. $a'b'$,

so ist nach Gaufs (eine andere Formel s. S. 263)

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{r^5 \operatorname{tg}\varphi - r'^5 \operatorname{tg}\varphi'}{r^2 - r'^2} = Q.$$

Die gesuchte Horizontal-Intensität oder Feldstärke ist also

$$H = \sqrt{\frac{P}{Q}}.$$

Beweis für eine kurze Nadel. Bewirkt ein westöstlich gerichteter Magnet an einer kurzen Nadel, die sich in seiner Fortsetzung in nicht zu kleinem Abstande r von seiner Mitte befindet, die Ablenkung φ, so ist nach Gaufs (Anh. 15 u. 16) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{r^3}\frac{M}{H}\left(1 + \frac{\eta}{r^2}\right)$, wo η für jeden Magnet eine Konstante ist. Dies, mit dem entsprechenden Ausdruck für den Abstand r' kombinirt, läfst η eliminiren und es kommt $r^5 \operatorname{tg}\varphi - r'^5 \operatorname{tg}\varphi' = 2(r^2 - r'^2)\cdot M/H$.

Zweite Hauptlage. Der Ablenkungsstab wird nördlich und südlich von der Bussole c in je zwei paarweise gleichen Entfernungen hingelegt. Im Einzelnen wird das vorhin beschriebene Verfahren befolgt, sowohl was die Beobachtungen als was die Berechnung der Mittelwerte betrifft. Setzen wir wieder $r = \frac{1}{2}ab$ bez. $r' = \frac{1}{2}a'b'$ und nennen φ bez. φ' die zugehörigen mittleren Ablenkungswinkel, so ist

a —
a' —
c
b' —
b —

$$\frac{M}{H} = \frac{r^5 \operatorname{tg}\varphi - r'^5 \operatorname{tg}\varphi'}{r^2 - r'^2}.$$

Die Ablesung beider Spitzen der Nadel eliminirt eine excentrische Lage der Drehungsaxe gegen die Teilung der Bussole; die Umkehrung des Stabes eliminirt eine unsymmetrische Magnetisirung des Ablenkungsstabes; für die Nadel geschieht dasselbe durch das Ablenken von beiden Seiten. Hierbei wird zugleich die Genauigkeit des Resultates ähnlich vergröfsert, wie durch die achtmalige Wiederholung einer einzelnen Ablesung.

Dafs eiserne Gegenstände zu entfernen sind (auch aus den Taschen des Beobachters, sowie Stahlbrille und mit Eisen geheftete Notizbücher), ist selbstverständlich. Um Variationen

des Erd- und des Stabmagnetismus, letztere besonders durch Temperaturänderung, möglichst auszuschliefsen, werden beide Messungen rasch hintereinander ausgeführt. Über die genauere Korrektion vgl. **61** und **62a**.

Günstigste Abstände. Für die Genauigkeit des Resultates ist am besten, das Verhältnis der beiden Entfernungen r/r' gegen 1,4 zu wählen. — Aufserdem seien natürlich die Ablenkungswinkel passend grofs. Der kleinere Abstand r' sollte nicht kleiner werden als etwa die vierfache Magnetlänge, weil sonst zu dem Gliede η/r^2 (v. S.) noch ein anderes mit $1/r^4$ von merklicher Gröfse hinzukommt (Anh. 15). Bei einer Bussole mit Teilkreis werden dann freilich die Ausschläge klein.

Spiegelablesung. Werden die Ablenkungen an einem Magnetometer mit Spiegel und Skale (48, 49) gemessen, so ist das Torsionsverhältnis ϑ (55) des Magnetometers durch Multiplikation der Tangenten mit $1+\vartheta$ in Rechnung zu setzen. Die Schwankungen der Deklination eliminirt man durch passende Abwechselung der Ablenkungen oder nach einem Hilfs-Variometer.

Vereinfachung bei wiederholter Benutzung derselben Magnete. Die Ablenkung aus zwei Abständen geschieht, um mittels der obigen Formeln die unbekannte Verteilung des Magnetismus in Stab und Nadel zu eliminiren. Wird derselbe Stab und dieselbe Nadel wiederholt benutzt, so genügt es, die Beobachtung aus zwei Entfernungen ein einziges Mal angestellt zu haben. Hieraus berechnet man ein für allemal den Ausdruck

$$\eta = r^2 r'^2 \frac{r^3 \operatorname{tg} \varphi - r'^3 \operatorname{tg} \varphi'}{r'^5 \operatorname{tg} \varphi' - r^5 \operatorname{tg} \varphi}.$$

Wenn dann später für eine Entfernung R der Ablenkungswinkel Φ gefunden ist, so hat man

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{R^3 \operatorname{tg} \Phi}{1 + \eta/R^2},$$

resp. ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ in der zweiten Hauptlage (v. S.).

Vereinfachung durch Einführung des Polabstandes. Den Magnetismus gestreckter Stäbe kann man bei Fernwirkungen in zwei Punkten, den Polen (Fernpolen) koncentrirt annehmen. In den gewöhnlichen Magneten liegen diese Pole um etwa je $\frac{1}{12}$ der Länge von den Enden entfernt. Der Polabstand des

Stabes beträgt also $^5/_6$ der ganzen Länge. Derselbe soll mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden. Ebenso sei $\mathfrak{l}$ der Polabstand der Nadel. Dann ist der Korrektionsfaktor η, kleine Ablenkungen vorausgesetzt, (**62b** und Anh. 15)

in erster Hauptlage $\eta = +\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$

in zweiter " $\eta = -\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$.

Abänderung der Gaufs'schen Formeln. Bei kurzen Magnetnadeln rechnen die folgenden Formeln, besonders für kleine Abstände, genauer als die vorigen.

1. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{r^2 - r'^2}{r^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{tg}\,\varphi^{-\frac{1}{2}} - r'^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{tg}\,\varphi'^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$$

2. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \left[\frac{r^2 - r'^2}{\mathrm{tg}\,\varphi^{-\frac{2}{3}} - \mathrm{tg}\,\varphi'^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

oder bei Beobachtung aus nur einem Abstande R:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}R^3\,\mathrm{tg}\,\Phi\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^2; \quad \frac{M}{H} = R^3\,\mathrm{tg}\,\Phi\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - 4\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

F. K. Wied. Ann. 31, 613. 1887.

Korrektion wegen des von der Erde inducirten Magnetismus. Während der Schwingungen liegt der Magnet nordsüdlich; sein Magnetismus M ist deswegen durch den Erdmagnetismus ein wenig verstärkt. Er betrage jetzt $M(1+\varDelta)$, wo man $\varDelta$ den Induktionskoefficient durch die erdmagnetische Horizontalkomponente nennt. Die früher bestimmte Gröfse P (S. 260) stellt also nicht MH, sondern $MH(1+\varDelta)$ vor und man hat nicht $H = \sqrt{P/Q}$, sondern

$$H = \sqrt{\frac{P}{Q}}\sqrt{\frac{1}{1+\varDelta}}.$$

Der Korrektionsfaktor für H wegen des inducirten Magnetismus ist also $\sqrt{1/(1+\varDelta)}$ oder merklich $1 - \frac{1}{2}\varDelta$.

Über die Messung von $\varDelta$ s. **81a**. Für die gewöhnlich gebrauchten Magnete kann man $\varDelta$ ungefähr schätzen nach der Regel, dafs das magnetische Feld 1 [C-G-S] in 1 g Stahl ungefähr den Magnetismus 0,25 [C-G-S] inducirt. Wiegt der Magnet also p gr und ist H der Erdmagnetismus, so ist zu schätzen $M \cdot \varDelta = 0{,}25 \cdot p \cdot H$ oder $\varDelta = 0{,}25 \cdot p \cdot H/M$.

Beispiel. I. Bestimmung von MH.

Trägheitsmoment. Der rechteckige Magnetstab war 10,00 cm lang und 1,25 cm breit. Er wog 119,86 g. Nach **54** folgt

$$K = 119{,}86(10{,}00^2 + 1{,}25^2)/12 = 1014{,}4\ \mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g}.$$

Torsionsverhältnis. Eine ganze Umdrehung des Aufhängefadens drehte den Magnet um 1,4°. Also ist (55) $\Theta = \frac{1,4}{360 - 1,4} = 0,0039$.

Schwingungsdauer. Beobachtet $= 7,414$ sec, bei einem Schwingungsbogen von 30°. Also auf unendlich kleine Schwingungen reducirt (52)

$$t = 7,414 - 7,414 \cdot 0,0043 = 7,382 \text{ sec.}$$

Man hat also $MH = \frac{\pi^2 \cdot K}{t^2(1+\Theta)} = \frac{3,1416^2 \cdot 1014,4}{7,382^2 \cdot 1,0039} = 183,01 \text{ cm}^2 \cdot \text{g/sec}^2$.

II. Bestimmung von M/H.

Eine Bussole stand auf dem Teilstrich 50 eines in cm geteilten, ostwestlich gerichteten Meterstabes. Der vorige Magnet wurde folgeweise mit seinem Mittelpunkte auf die Teilstriche 10 20 80 90 gelegt, und in jeder Stellung um 180° umgelegt. Als z. B. der Magnet auf 10 lag, wurde abgelesen

	1. Spitze	2. Spitze	
N.-Pol zugewandt	99,4°	279,8°	
S.-Pol zugewandt	79,9°	260,6°	
Halbe Differenz	= 9,75°	9,60°	Mittel = 9,67°.

Gerade so wurde gefunden, als der Mittelpunkt des Magnets lag

auf 20 cm	22,41°	Im Mittel also
„ 80 „	22,67°	$\varphi' = 22,54°$ für $r' = 30$ cm
„ 90 „	9,87°	$\varphi = 9,77°$ „ $r = 40$ „

Also $M/H = \frac{1}{2}(40^5 \cdot \text{tg}\, 9,77° - 30^5 \cdot \text{tg}\, 22,54°)/(40^2 - 30^2) = 5388 \text{ cm}^3$

und $H = \sqrt{(183,01/5388)} = 0,1843 \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$.

Der Ausdruck η (S. 262) würde nach diesen Versuchen sein

$$\eta = 40^2 \cdot 30^2 \frac{30^3 \cdot \text{tg}\, 22,54° - 40^3 \cdot \text{tg}\, 9,77°}{40^5 \cdot \text{tg}\, 9,77° - 30^5 \cdot \text{tg}\, 22,54°} = 36,3 \text{ cm}^2.$$

In der That führt auf den Wert 5388 auch die Formel

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{30^3 \cdot \text{tg}\, 22,54°}{1 + 36,3/900} \text{ oder } = \frac{1}{2} \frac{40^3 \cdot \text{tg}\, 9,77°}{1 + 36,3/1600}.$$

Rechnung mit Polabständen. Der Magnet war 10,00, die Nadel 2,0 cm lang, also die Polabstände

$$\mathfrak{L} = \tfrac{5}{6} \cdot 10 = 8,3 \text{ cm} \qquad \mathfrak{l} = \tfrac{5}{6} \cdot 2,0 = 1,7 \text{ cm.}$$

Angenommen nun, daſs nur die Ablenkung $\Phi = 9,77°$ aus dem Abstande $R = 40$ cm beobachtet wäre, so würde man rechnen (S. 263)

$$M/H = \tfrac{1}{2} R^3 \text{tg}\, \Phi (1 - \tfrac{1}{4}(\mathfrak{L}^2 - \tfrac{3}{2}\mathfrak{l}^2)/R^2)^2 = 5510(1 - 0,0101)^2 = 5399.$$

Um die Bruchteile von Graden nicht in Minuten umrechnen zu müssen, benutze man die fünfstelligen Tafeln von Bremiker.

III. Bestimmung von $M \cdot H$ mit der Wage (Töpler).

Eine eisenfreie feine Wage ist um eine Vertikalaxe drehbar. Der Balken stehe im magnetischen Meridian. Mit dem Wagebalken ist der Magnet M in vertikaler Stellung fest ver-

bunden; das von dem horizontalen Erdmagnetismus H mittels M auf die Wage ausgeübte Drehungsmoment ist $= MH$. Dreht man die ganze Wage um 180°, so wirkt dasselbe Drehungsmoment nach der entgegengesetzten Richtung. Man wird also zum Äquilibriren in den beiden Stellungen verschiedene Gewichte nötig haben.

Beträgt dieser Unterschied m gr, ist l cm die Länge des Wagearmes, endlich $g = 981$ cm/sec² die Schwerebeschleunigung, so ist offenbar

$$M \cdot H = \tfrac{1}{2} g m l \ \text{cm}^2 \cdot \text{g/sec}^2.$$

Vgl. Töpler, Wied. Ann. 21, 158. 1884; Freyberg ib. 25, 511. 1885.

59a. Magnetischer Theodolit.

Ein magnetischer Theodolit (Lamont, Meyerstein, Neumayer) enthält die Hilfsmittel zur Bestimmung der Deklination und der Horizontal-Intensität vereinigt. In der Drehungsaxe steht das Magnetometer; das Fernrohr sitzt, wie am Spektrometer, aufsen. Über Deklinationsbestimmung vgl. 57.

Die Intensitätsbestimmung umfafst, wie in 59, erstens die Beobachtung von Schwingungsdauer und Trägheitsmoment des Magnets, zweitens die Beobachtung der Ablenkungen einer Nadel. Der Ablenkungswinkel wird mit dem Theodolitenfernrohr selbst gemessen, indem man dasselbe der abgelenkten Nadel nachdreht. Eine Marke in der durchbohrten Nadel oder das Bild des beleuchteten Fadenkreuzes (39, 2) in einem Spiegel an der Nadel dient zum Einstellen.

Bei dem vielfach benutzten Lamont'schen Theodolit ist das Fernrohr mit dem Magnetometer und der Schiene, auf welche der Ablenkungsmagnet gelegt wird, zusammen drehbar. Daher steht die Nadel bei der Ablesung senkrecht auf der Verbindungslinie nach dem Magnet, und es kommt anstatt der Tangente der Sinus des Ablenkungswinkels. Man rechnet nach der Formel

$$\frac{M}{H}\left(1 + \frac{\eta}{R^2}\right) = \tfrac{1}{2} R^3 \sin\varphi.$$

Das zweite Korrektionsglied mit $1/R^4$, welches sonst noch wirksam werden kann, pflegt man dadurch zu beseitigen, dafs man die Nadel 2,1 mal kleiner nimmt wie den Magnet; dann heben sich Magnet- und Nadellänge nahe heraus.

Die Gröfse η wird, wie in 59 S. 262, durch Beobachtungen

aus zwei Entfernungen ein für allemal ermittelt. So wie dort lenkt man sowohl von Westen wie von Osten ab, jedesmal in zwei Lagen des Magnets. Über die Korrektion wegen des von der Erde inducirten Magnetismus s. S. 263.

Ein leichter transportabler und zu handhabender magnetischer Theodolit ist von Neumayer konstruirt worden. Die Nadel wird mittels Spiegels beobachtet, ist umlegbar, spielt aber auf einer Spitze. Die Fadenaufhängung wird nur bei den Schwingungen des Magnets angewandt.

S. Eschenhagen in Kirchhoff, Anleitung zur deutschen Landes- und Volksforschung S. 118.

60. Bestimmung der Horizontal-Intensität mit dem kompensirten Magnetometer (nach W. Weber).

Das kompensirte Magnetometer besteht aus einer Bussole und einem Rahmen mit 4 Magneten. Die beiden kleineren wirken aus erster, die gröſseren gleichsinnig aus zweiter Hauptlage. Erstere sind doppelt, letztere dreimal so lang, breit und dick wie die Nadel. Der Abstand der gröſseren Stäbe soll nahe das 1,20fache des kleineren sein.

Man orientirt die Bussole so, daſs bei dem Auflegen des Rahmens die Verbindungslinie der gröſseren Magnete nordsüdlich steht. Man legt den Rahmen in zwei um 180° verschiedenen Stellungen auf. Die halbe Differenz der Nadeleinstellungen ist der Ablenkungswinkel φ.

Um die Schwingungen zu beobachten, kann man einen Spiegel an den Rahmen anschrauben. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments dienen überzuhängende Gewichte.

I. Vergleichung der Horizontal-Intensitäten an zwei Orten. Dieselben verhalten sich umgekehrt wie die Tangenten der Winkel, $H_1 : H_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_1$.

Um Temperatur-Unterschiede in Rechnung zu setzen, muſs man den Temperaturkoefficient der Magnete kennen (62a). — Unabhängig von Änderungen der Stäbe macht die an beiden Orten beobachtete Schwingungsdauer t_1 und t_2 des Rahmens, nachdem man alle 4 Magnete gleichgerichtet hat. Dann ist

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{t_2}{t_1}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}}.$$

II. Absolute Bestimmung. Nennen wir $2r$ bez. $2R$ den Abstand der Mittelpunkte der kleineren bez. gröfseren Magnete von einander; die Schwingungsdauer mit gleichgerichteten Magneten t; wenn die kleineren Magnete um 180° gedreht sind, τ; ferner Θ das Torsionsverhältnis des Fadens im ersteren Falle, K das Trägheitsmoment, so ist

$$H = \frac{\pi}{t\tau}\sqrt{\frac{K}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\frac{\tau^2 - t^2}{r^3} + \frac{\tau^2(1-2\Theta)+t^2}{2R^3}\right)}.$$

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 142, 551. 1871.

60a. Bestimmung der Horizontal-Intensität auf bifilarmagnetischem Wege (F. K.).

I. Bestimmung von MH. Absolutes Bifilarmagnetometer.

Die Suspension einer bifilaren Aufhängung (Fig. S. 248) sei ostwestlich gerichtet. Man lege einen Magnetstab ein und beobachte die jetzige Einstellung der Ableseskale. Man lege dann den Magnet um und lese wieder ab. Die Hälfte des Winkels zwischen beiden Stellungen sei gleich α (48. 49).

Die Direktionskraft der Bifilarsuspension, nach 53 bestimmt, sei $= D$; H sei der Erdmagnetismus und M der Stabmagnetismus. Dann ist

$$MH = D\operatorname{tg}\alpha.$$

II. Bestimmung von M/H.

Der obige Magnet, ostwestlich gerichtet, lenke in der zweiten Hauptlage eine kurze Magnetometernadel, die sich also nördlich oder südlich vom Magnet befindet, aus der grofsen Entfernung r um den Winkel φ ab. Es sei Θ das Torsionsverhältnis dieser Nadel (55) und $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Magnetstabes (d. h. $^5/_6$ der Stablänge; S. 262 und 62b). Dann ist

$$\frac{M}{H} = r^3\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right)(1+\Theta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen kann man M erhalten; die Division liefert

$$H^2 = \frac{D}{r^3(1+\Theta)(1+\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2/r^2)}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Von Schwankungen des Stab- und des Erdmagnetismus wird man unabhängig, wenn der Stab, während er bifilar

aufgehängt ist, zugleich das Magnetometer ablenkt. Man beobachtet mit nördlich und südlich gestelltem Magnetometer. Abstand r ist die halbe Entfernung des Aufhängefadens in beiden Stellungen.

Für wiederholte Bestimmungen werden am bequemsten zwei stehen bleibende Magnetometer gleichzeitig verwendet. α ist dann das Mittel aus beiden Ablenkungen. Um Unsymmetrien zu eliminiren, wird einmal auch die Ablenkung α' mit vertauschten Magnetometern beobachtet. Dann hat man die Ablenkungen in der normalen Stellung ein für allemal mit $1+\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)/\alpha$ zu multipliciren.

Korrektionen. Aus der Wirkung der Nadel auf den Magnet und der schrägen Stellung des letzteren entsteht bei gleichzeitiger Beobachtung von α und φ eine kleine Korrektion. $\varkappa$ sei das Verhältnis des Nadelmagnetismus bez. der Summe beider Nadelmagnetismen zum Erdmagnetismus, so ist der Ausdruck für H^2 zu multipliciren mit

$$(1-2\varkappa/r^3)(\cos\alpha-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Skalenabstände. Sind die Skalenabstände des Bifilar und des Unifilar nahe gleich, so braucht man nur den Unterschied beider Abstände genau zu messen, was mit Hilfe ausgespannter Fäden leicht geschieht.

Erste Hauptlage. Man kann das Unifilarmagnetometer östlich und westlich vom Bifilarmagnet aufstellen, dann gilt

$$H^2=\frac{2D}{r^3(1+\Theta)(1-\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2/r^2)}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1+\frac{\varkappa}{r^3}\right)(\cos\alpha+\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 765. 1882.

Kreismagnet. Wird als Bifilarmagnet ein weiter horizontal magnetisirter Kreis aus Stahldraht genommen, der umgelegt werden kann und ein kleines Magnetometer in seinem Mittelpunkt ablenkt, so gilt mit den früheren Bezeichnungen, aber r jetzt in der Bedeutung des Kreishalbmessers, wenn α und φ nahe gleich grofs sind,

$$H^2=\frac{D}{r^3(1+\Theta)}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\varphi}.$$

Stroud, Proceed. Roy. Soc. 48, 260. 1890.

61. Zeitliche erdmagnetische Intensitätsvariationen.

Haltbarkeit der Magnete. Die erdmagnetischen Intensitätsvariometer beruhen auf der Unveränderlichkeit von Magnetstäben, welche niemals vollkommen zu erreichen ist. Über ein Verfahren, die Veränderlichkeit zu vermindern, s. 55a.

I. Bifilarvariometer (Gaufs).

Ein Magnet ist an 2 Fäden von kleinem Abstande bifilar aufgehängt (53). Die Verbindungslinie der oberen und diejenige der unteren Befestigungspunkte der Fäden werden so gegen einander gedreht, dafs das erdmagnetische und das statische (durch die Schwere und die Elasticität hervorgebrachte) Drehungsmoment der Fäden zusammen den Magnet ostwestlich stellen.

Die mit Spiegel und Skale abzulesende geringe Drehung, welche der Magnet durch eine Änderung der erdmagnetischen Horizontalintensität erfährt, kann der Änderung proportional gesetzt werden. Wachsende Intensität dreht den Nordpol nach Norden; es ist bequem, wenn dieser Drehung wachsende Skalenteile entsprechen.

Bestimmung des Skalenwertes E. Die Änderung der Intensität, welche einer Drehung der Nadel um 1 Sk.-T. entspricht, und zwar in Bruchteilen der Intensität selbst gemessen, soll E heifsen. Wenn also der Einstellung des Bifilarmagnetometers auf den Skalenteil p die Intensität H entspricht, so ist diejenige bei der Einstellung p'

$$H' = H[1 + E(p' - p)].$$

1. Man läfst auf das Bifilarvariometer in gleicher Höhe aus der nicht zu kleinen Entfernung r im Norden oder Süden einen nordsüdlich gerichteten Magnet vom Polabstand $\mathfrak{L}$ ($^5/_6$ der Länge) ablenkend wirken. Einer Umdrehung dieses Magnets um 180° möge eine Drehung der Nadel um n Sk.-T. entsprechen; $\mathfrak{l}$ sei der Polabstand der Bifilarnadel. Dann ist der Skalenwert

$$E = \frac{1}{n}\frac{4}{r^3}\frac{M}{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{r^2}\right).$$

M ist der Magnetismus des ablenkenden Stabes, der aber nur im Verhältnis zum Erdmagnetismus bekannt zu sein braucht,

was nach **59** II oder **62** II durch eine einfache Ablenkung zu erreichen ist.

Beweis. Der Stab M, aus einer grofsen Entfernung r wirkend, vermehrt bez. vermindert in seinen beiden Lagen die Intensität H um $2M/r^3$. Da die Einstellung sich bei dem Umlegen von M um n Sk.-T. ändert, so bedeutet 1 Sk.-T. also die Änderung $4M/(nr^3)$, oder in Teilen der Intensität selbst $4M/(nr^3H)$ q. e. d. Über das Korrektionsglied siehe S. 268 und Anh. 15.

2. Mit dem Torsionskreise. Hat das Instrument einen Torsionskreis, so ergibt sich E aus dem Winkel α, welchen die Vertikalebenen der oberen und der unteren Aufhängepunkte mit einander bilden, wenn A der Skalenabstand,

$$E = (1/2A) \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

α wird bestimmt, indem man den Magnet in der Bifilarsuspension um 180° umlegt und nun den Torsionskreis um 2α dreht, bis wieder die Ostwestlage eingetreten ist.

Das Verfahren setzt Aufhängefäden von geringer Torsionskraft voraus, z. B. aus feinem Messingdraht.

Die Bifilarnadel m steht immer so nahe senkrecht zum Meridian, dafs das erdmagnetische Drehungsmoment mit Hm zu bezeichnen ist. Das bifilare Drehungsmoment ist $D \sin \alpha$ (**58**). Also haben wir $Hm = D \sin \alpha$. Wenn sich nun H in $H(1+E)$ und α in $(\alpha + 1/2A)$ ändert, d. h. wenn sich das Instrument um 1 Skalenteil dreht, so ist wieder

$$Hm(1+E) = D \sin(\alpha + (1/2A)) = D(\sin \alpha + (1/2A) \cdot \cos \alpha).$$

Beiderseitige Division mit $Hm = D \sin \alpha$ ergibt obiges E.

Über die Bestimmung von E aus Torsions- und Schwingungsbeobachtungen vgl. Gaufs, Result. d. magn. Vereins 1841, S. 1, oder Abh. Bd. 5, S. 404, und Wild, Carl Repert. 16, 325. 1880. Vgl. ferner F. K., Wied. Ann. 15, 586. 1882.

Temperatur-Korrektion. Erwärmung schwächt den Stabmagnetismus, läfst also den Erdmagnetismus kleiner erscheinen. Ein wenig wirkt auch die Ausdehnung der Suspension und der Drähte. Ist μ der Temperaturkoefficient des Magnets (**62 a**), β der Ausdehnungskoefficient der Suspension, β' derjenige der Drähte, so verlangt 1° Temperaturänderung eine Korrektion um $(\mu + 2\beta - \beta')/E$ Skalenteile. Für eine Aufhängung ganz aus Messing wird der Ausdruck $= (\mu + 0{,}000018)/E$.

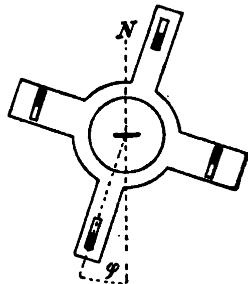
II. Ablenkungsvariometer (F. K.).

Eine Magnetnadel kann, anstatt durch bifilare Aufhängung, auch durch Ablenkungsstäbe senkrecht zum Meridian gerichtet

werden und stellt dann ein Intensitätsvariometer dar. Für vorübergehende Beobachtung läfst ein solches Instrument sich leicht improvisiren.

Skalenwert. Man kann verfahren, wie unter I, Nr. 1.

Vierstab-Variometer. Auf einem horizontal drehbaren Rahmen sind vier gleiche Magnete befestigt, so dafs auf den Mittelpunkt zwei aus erster und zwei aus zweiter Hauptlage wirken. Die ersteren haben einen 1,12mal gröfseren Abstand als die letzteren; alsdann bewirken nämlich die 4 Stäbe um den Mittelpunkt herum eine möglichst konstante Richtkraft. Diese Richtkraft soll etwas gröfser sein als die erdmagnetische, was durch passende Stellung der Magnete bewirkt wird. Den Mittelpunkt bildet ein Magnetometer.



Aufstellung. Die genaue Orientirung zum Meridian geschieht so: Man stellt den Rahmen auf den Nullpunkt seiner Teilung, und zwar so, dafs die Richtkraft der Magnete dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. Die Drehungsaxe wird mit der Libelle vertikal gemacht. Nun dreht man das ganze Instrument, bis die Nadel sich in die Richtung der vier Stäbe einstellt, und schraubt es fest. Jetzt liegt der Nullpunkt der Teilung im Meridian.

Nun wird der Rahmen um einen solchen Winkel φ gedreht, dafs die Nadel senkrecht zum Meridian steht, und in dieser Lage festgestellt. Der Skalenwert ist, wenn A den Skalenabstand in Sk.-T. bedeutet,

$$E = (1/2A) \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Empfindlichkeit $1/E$ kann also beliebig grofs gemacht werden dadurch, dafs φ sehr klein wird. Letzteres ist der Fall, wenn man die 4 Stäbe so stellt, dafs ihre Richtkraft den Erdmagnetismus nur wenig übertrifft.

Beweis wie in **61a** II.

Wenn die Drehungen bei den Variationen gröfsere Beträge erreichen, so treten Korrektionsglieder hinzu. Unter gewöhnlichen Verhältnissen sind dieselben ohne Bedeutung.

Temperatur-Korrektion. Höhere Temperatur läfst den Erdmagnetismus zu grofs erscheinen. Den Einflufs bestimmt man im Winter durch abwechselnde Beobachtung im warmen und kalten Zimmer. Sind p_1 und p_2 die Skaleneinstellungen bei den Temperaturen t_1 und t_2, so beträgt die Korrektion der Ablesung für jeden Grad $(p_1 - p_2)/(t_1 - t_2)$. — Geht man später zu einem anderen Skalenwert E' über, so ist dieser Ausdruck natürlich mit E/E' zu multipliciren.

F. K., Wied. Ann. 15, 540. 1882.

61a. Vergleichung der Horizontal-Intensität an zwei Orten.

I. Durch Schwingungen.

Man läfst eine und dieselbe Magnetnadel an beiden Orten schwingen; die Intensitäten verhalten sich

$$H_1 : H_2 = t_2^2 : t_1^2.$$

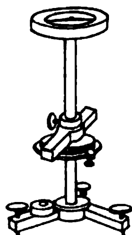
Bei Anspruch an Genauigkeit müssen die Temperatur- und erdmagnetischen Schwankungen (**62a** und **61**) in Rechnung gesetzt werden.

II. Durch Ablenkungen.

Lenkt eine und dieselbe ostwestliche Direktionskraft die Nadel an den beiden Orten um α_1 und α_2 ab, so ist (**60**, I)

$$H_1 : H_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 : \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Lokal-Variometer (F. K.). Eine viel gröfsere Empfindlichkeit wird erzielt, wenn man die ablenkenden Magnete so anordnet, dafs die Magnetnadel um nahe 90^0 abgelenkt wird, so wie in **61** II. Das Vierstab-Variometer ist das empfindlichste Lokalvariometer und kann lokale Variationen auf $^1/_{10000}$ genau messen. Wir wollen hier eine einfachere Form mit einem drehbaren Magnet unter einer Bussole zu Grunde legen. Das erstere Variometer mit dem Spiegel wird im Princip genau so behandelt.



1. Die Drehungsaxe des Instruments sei mit Hilfe der Libelle vertikal gemacht.

2. Richtiger Abstand des Magnets. Die Wirkung des letzteren mufs, wenn er im Meridian steht, etwas stärker sein, als der Erdmagnetismus. Man regulirt zu dem Zwecke den Abstand, während der Magnet Nordpol nach

Norden steht, bis die Nadel sich Nordpol nach Süden stellt. Je größer die Empfindlichkeit werden soll, desto geringer muß der Kraftüberschuß des Magnets gewählt werden.

3. Orientirung in den Meridian. Man stellt den Magnet auf den Nullpunkt seiner Kreisteilung und dreht das ganze Instrument, bis die Nadel dem Magnet parallel steht. Wir nehmen an, daß sie alsdann auch auf den Nullpunkt der Bussolenteilung zeigt.

4. Drehungswinkel φ des Magnets. Man dreht den Magnet nach der einen Seite, bis die Nadel auf 90° zeigt, und fixirt den einen Anschlag des Magnets auf diese Stellung. Man verfährt ebenso nach der anderen Seite. Jetzt ist das Instrument fertig. Die Hälfte des Drehungswinkels zwischen den beiden Anschlägen heiße φ.

5. Vergleichung von H an zwei Orten. Man stellt das Variometer an dem Vergleichspunkt I auf, orientirt es, wie unter 3, in den Meridian und legt den Magnet zuerst gegen den einen, alsdann gegen den anderen Anschlag. Wir wollen die Nadelspitze immer auf derjenigen Seite der Bussole ablesen, auf welcher die Bezifferung nach Norden wächst. Der Nordpol der Nadel zeige hier die Einstellung p_n; alsdann, nach dem Umlegen des Magnets, zeige der Südpol p_s, beides in Bogengraden. Wir bilden die Differenz und nennen dieselbe

$$p_n - p_s = \delta_1.$$

Jetzt bringen wir das Variometer an den Punkt II und verfahren genau so; die eben beschriebene Differenz habe hier den Wert δ_2.

Dann wird das Verhältnis der erdmagnetischen Felder an beiden Orten erhalten als

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta_2},$$

wofür bei kleinem δ_1 und δ_2 gesetzt werden darf

$$(H_1 - H_2)/H = [0{,}0087 \cdot \operatorname{tg}\varphi] \cdot (\delta_1 - \delta_2) = C \cdot (\delta_1 - \delta_2).$$

Der Reduktionsfaktor $C = 0{,}0087 \cdot \operatorname{tg}\varphi$ bekommt für $\varphi = 29{,}8^0$ den bequemen Wert 0,0050.

Beweis. Der Magnet übe an dem Orte der Bussole eine Richtkraft J auf eine Nadel Eins aus. Dann ist offenbar $J \cos\varphi = H$, wo H diejenige Feldstärke bedeutet, bei welcher die Nadel durch den um φ

gedrehten Magnet um 90° abgelenkt wird. An dem Punkte I' wirkt also auf die Nadel eine Nordkomponente $H_1 - H$; senkrecht dazu eine Komponente $J \sin\varphi = H \operatorname{tg}\varphi$. Stellt sich hierbei die Nadel unter einem Winkel ε_1 gegen die Ostwestrichtung ein, so ist also

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = (H_1 - H)/(H \operatorname{tg}\varphi), \quad \text{also} \quad (H_1 - H)/H = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_1 .$$

Ebenso für den Punkt II. Da ε_1 und ε_2 unsere $\frac{1}{2}\delta_1$ und $\frac{1}{2}\delta_2$ bedeuten, so findet man hieraus leicht die obige Gleichung. Die praktische Gleichung für kleine Winkel ergibt sich, wenn man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta/57{,}3^0 = 0{,}0087 \cdot \delta$ setzt.

Temperatur. Der Temperatureinflufs wird durch Beobachtungen im kalten und im warmen Petroleumbad ähnlich wie in **61** am Schlufs bestimmt und in Rechnung gesetzt. Kann man die Ablesungen an den verschiedenen Orten rasch hintereinander machen, so hält man die Temperatur des Magnets am besten konstant, indem man ihn nötigenfalls noch mit Watte oder Filz umhüllt.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 19, 138. 1883 und 29, 51. 1886.

62. Bestimmung eines Stabmagnetismus in absolutem Mafse.

I. Die genaue Ausführung dieser Aufgabe wird durch die in **59** oder **60a** beschriebenen Beobachtungen geleistet, denn aus den beiden beobachteten Zahlen $MH = P$ und $M/H = Q$ fällt durch Multiplikation H heraus und es wird erhalten $M = \sqrt{PQ}$. M ist der Magnetismus (das magnetische Moment) des zu den Schwingungen und Ablenkungen gebrauchten Stabes nach absolutem Mafse (Anh. 15 und Tab. 28).

Der auf S. 264 gebrauchte Magnet hat also den Magnetismus

$$M = \sqrt{183{,}01 \cdot 5388} = 993{,}0 \text{ cm}^{5/2}\,\text{g}^{1/2}\,\text{sec}^{-1}.$$

Über Verteilung des Magnetismus s. **81c**.

II. Bestimmung aus Ablenkungen.

Wegen der Veränderlichkeit des Stabmagnetismus durch Temperatur und Zeit ist grofse Genauigkeit selten gefordert. Insofern nun die horizontale Intensität H für den Beobachtungsort genähert bekannt ist (Tab. 22), so genügen oft Ablenkungsbeobachtungen nach **59**, II.

Meistens wird man nur aus einer Entfernung abzulenken brauchen. Wenn nämlich φ die Ablenkung einer kurzen Nadel im Abstand r von der Mitte des Magnets, $\mathfrak{L}$ der Pol-

abstand, d. h. $^5/_6$ der Länge des Magnets, so findet man den Stabmagnetismus M für eine Ablenkung

aus 1. Hauptlage	aus 2. Hauptlage
$M = \frac{1}{2} r^3 H (1 - \frac{1}{2} \mathfrak{L}^2/r^2) \operatorname{tg} \varphi$;	$M = r^3 H (1 + \frac{3}{8} \mathfrak{L}^2/r^2) \operatorname{tg} \varphi$.

Für ein Magnetometer ist der Ausdruck wegen der Torsion mit $1 + \Theta$ zu multipliciren (55).

Bei der Untersuchung eines nicht stabförmigen Magnets, beispielsweise auch eines magnetischen Minerales, dessen magnetische Axe sich nicht aus der Gestalt erkennen läſst, bringt man durch Drehen den Körper in die Stellung, in welcher die ablenkende Wirkung am gröſsten ist. Zugleich erhält man hierbei die Lage der magnetischen Axe.

III. Bestimmung durch Schwingungsbeobachtung.

Für einen Magnetstab von regelmäſsiger Gestalt läſst sich das Trägheitsmoment K (54) berechnen, und man erhält aus der Schwingungsdauer t

$$M = \frac{\pi^2 K}{t^2 H (1+\Theta)}.$$

IV. Bestimmung durch bifilare Aufhängung.

Nach 60a, I auszuführen.

V. Mit der Wage (Helmholtz).

Erforderlich sind drei Magnetstäbe. Die gesuchten magnetischen Momente seien $M_1 M_2 M_3$, die Polabstände ($^5/_6$ der Stablängen) bez. $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3$.

Der Stab M_1 wird vertikal an das eine Ende einer eisenfreien empfindlichen Wage gehängt, der Stab M_2 horizontal an das andere Ende und zwar dem Wagebalken parallel und in die Höhe des Mittelpunktes von M_1. Die Wage sei zunächst ins Gleichgewicht gesetzt. Nun kehre man den einen der Stäbe um, so daſs der Ort der Pole vertauscht ist. Das Gleichgewicht der Wage wird gestört sein und man müsse auf einer Seite p gr auflegen, um die Wage wieder einzustellen. Die Schwerbeschleunigung sei $g = 981$ cm/sec^2.

Der im Verhältnis zur Stablänge beträchtliche Abstand der beiden Schneiden von einander betrage r cm. Dann ergibt

diese Messung das Produkt der beiden magnetischen Momente in absoluten cm-gr-Einheiten

$$M_1 M_2 = \frac{1}{12} \frac{r^4 p \cdot g}{1 - \frac{5}{2}\mathfrak{L}_1^2/r^2 + \frac{10}{8}\mathfrak{L}_2^2/r^2} = P_{12}.$$

Um die Unsymmetrie der Magnetisirung zu eliminiren, kann man den Versuch wiederholen, indem man auch den anderen Magnet umhängt, und aus beiden Werten das Mittel nehmen.

Ebenso werde gefunden $M_1 M_3 = P_{13}$ und $M_2 M_3 = P_{23}$. Aus den drei Gleichungen findet man

$$M_1 = \sqrt{\frac{P_{12} \cdot P_{13}}{P_{23}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Vgl. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 16, 405. 1883.

Über die Verteilung des Magnetismus in einem Stabe und über Magnetisirungskoefficienten weichen Eisens s. 81 c.

62a. Temperaturkoefficient eines Magnets.

Temperaturkoefficient μ heifst die durch $+1^0$ hervorgebrachte relative Abnahme des Magnetismus. Je gröfser der specifische Magnetismus, desto kleiner ist im allgemeinen der Temp.-Koefficient. Er beträgt bei guten Magneten etwa 0,0003 bis 0,001.

Die Methoden in 62 lassen auch den Einflufs der Temperatur bestimmen, aber wenig genau. Man mufs die durch die Erwärmung bewirkten Ausschläge vergröfsern.

I. Kompensation (Weber).

Man nähert einem Magnetometer von kurzer Nadel den Magnet von der einen Seite bis zu dem mäfsigen Abstande r, hebt aber die grofse Ablenkung durch einen Hilfsstab nahezu wieder auf. Nun wird der erste Stab auf verschiedene Temperaturen t_1 und t_2 gebracht; n sei dabei der Unterschied der beiden Einstellungen, A der Skalenabstand.

Der Temperaturkoefficient μ ist dann $\mu = C \cdot n/(t_1 - t_2)$. Den Faktor C bekommt man folgendermafsen.

1. Wenn der Magnet aus der gleichen Entfernung eine kurze Bussolennadel um φ ablenkt, so ist $C = \frac{1}{2A \cdot \operatorname{tg} \varphi}$.

2. Ist der Magnetismus M des Stabes bekannt, so hat man, wenn $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Stabes (S. 263),

in erster Hauptlage $$C = \frac{H}{M}\frac{r^3}{4A}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right);$$ in zweiter Hauptlage $$C = \frac{H}{M}\frac{r^3}{2A}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right).$$

3. Oder man nähert den Magnet und den Hilfsstab folgeweise in einzelnen Absätzen, so daſs die Näherung des einen immer die Nadel nahe an das eine Ende der Skale bringt, die Näherung des andern an das entgegengesetzte Ende. Die letzte Näherung bringe die Nadel wieder nahe auf die alte Ruhelage. N sei die Summe sämtlicher Skalenverschiebungen, die nach und nach durch den Magnet (nicht durch den Hilfsstab) hervorgebracht wurden, nach **49**, S. 240 auf Gröſsen korrigirt, die der Tangente der Ausschlagswinkel proportional sind. Dann ist offenbar $C = 1/N$.

II. Durch bifilare Aufhängung (Wild).

Der Magnet wird in einer empfindlichen Bifilarsuspension ostwestlich aufgehängt und durch Heizung u. s. w. des Raumes auf verschiedene Temperaturen gebracht. E sei der Skalenwert (**61** I). Bewirkt eine Erwärmung t die Verschiebung n, so ist $\mu = nE/t - 2\beta + \beta'$. β und β' sind die Ausdehnungskoefficienten der Suspension und des Aufhängedrahts. Schwankungen des Erdmagnetismus (**61**) muſs man in Rechnung setzen.

Wild, Carl Rep. 9, 277. 1873.

III. Durch 90°-Ablenkung eines Magnetometers (F. K.).

Der Magnet wird in der Höhe der (kurzen) Magnetometernadel horizontal mit seinem Mittelpunkt im Meridian der Nadel so angebracht, daſs die Nadel sich ostwestlich stellt. Er bilde in dieser Stellung mit dem Meridian den Winkel φ. Man erwärme den Magnet um t; die Nadel drehe sich dadurch um den Winkel ε. Dann ist der Temperaturkoefficient

$$\mu = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \cdot \varepsilon/t.$$

Mit kleinem φ ist die Methode sehr empfindlich.



Beweis. Da die Nadel ostwestlich steht, so stammt ihre Direktionskraft nur von dem Magnet und beträgt $M/r^3 \cdot \sin\varphi$. Die Ablenkung ε bedeutet also ein neues Drehmoment $\varepsilon \cdot M/r^3 \cdot \sin\varphi$, welches andrerseits gleich $2\Delta M/r^3 \cdot \cos\varphi$ ist, wenn ΔM die von der

Erwärmung bewirkte Änderung des magnetischen Moments bedeutet. Also hat man $\Delta M = \frac{1}{2} M \cdot \varepsilon \operatorname{tg} \varphi$ und den Temp.-Koeff.

$$\mu = 1/t \cdot \Delta M/M = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \varepsilon/t.$$

Vgl. F. K., Wied. Ann. 22, 420. 1884, auch über Korrektionen.

62b. Polabstand eines Magnets.

Unter Polen werden hier die Punkte verstanden, in denen man die beiden Magnetismen eines gestreckten Stabes für Fernwirkungen koncentrirt annehmen darf, wenn die 4. Potenz des Verhältnisses der Magnetlänge zu der Entfernung gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Der Magnet lenke eine in gleicher Höhe befindliche kurze Magnetnadel aus den beiden Entfernungen a_1 bez. a_2 — die Entfernungen von Mitte zu Mitte gemessen — um φ_1 bez. φ_2 ab. Der Polabstand der Nadel, d. h. $^5/_6$ ihrer Länge, sei $= \mathfrak{l}$. Man berechne zunächst

$$\eta = a_1^2 a_2^2 \frac{a_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1 - a_2^3 \operatorname{tg} \varphi_2}{a_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2 - a_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Der Polabstand $\mathfrak{L}$ des Magnets ist dann, im Anschluſs an die Gauſs'schen Formeln (S. 261), durch die folgenden Ausdrücke gegeben. Es ist für Beobachtungen aus

erster Hauptlage	zweiter Hauptlage
$\mathfrak{L}^2 = + 2\eta + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2,$	$\mathfrak{L}^2 = - \frac{8}{3}\eta + 4\mathfrak{l}^2.$

Den abgeänderten Formeln S. 263 entsprechend hat man $\mathfrak{L}^2 =$

in erster H.-L.	in zweiter H.-L.
$4 \frac{a_1^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{1}{2}}}{a_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$	$4 \frac{a_1^2 \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{2}{3}} - a_2^2 \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{2}{3}} - \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{2}{3}}} + 4\mathfrak{l}^2.$

Um eine Unsymmetrie in der Verteilung der Magnetismen zu eliminiren, beobachtet man stets unter Umlegung des Magnets um 180° die doppelte Ablenkung. Ferner wird der Magnet folgeweise auf beide Seiten des Magnetometers gelegt; a_1 oder a_2 bedeuten jedesmal den halben Abstand zwischen zusammengehörigen Stellungen des Magnets.

Von Schwankungen der Temperatur und des Erdmagnetismus macht man sich unabhängig durch die gleichzeitige Anwendung zweier Magnetometer, zwischen denen der Magnet aus zwei symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Stellungen

wirkt. Ist E der Abstand beider Magnetometerfäden von einander und E' die Strecke, um welche der Magnet verschoben wird, so ist $a_1 = \frac{1}{2}(E - E')$ und $a_2 = \frac{1}{2}(E + E')$. Nach dem ersten Beobachtungssatz vertauscht man die Magnetometer mit einander, wiederholt die Beobachtungen und nimmt aus den zusammengehörigen Ablenkungen die Mittel. Die Skalenabstände brauchen nur genähert bekannt zu sein. Über Reduktionen s. 49.

F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 412. 1884; F. u. W. Kohlrausch, ib. 27, 45. 1886.

Galvanismus.

63. Allgemeines über galvanische Arbeiten.

I. Die Ohm'schen Gesetze.

Im einfachen, unverzweigten Stromkreise. Widerstand, Stromstärke, elektromotorische Kraft.

1. Der Widerstand w eines cylindrischen Leiters, welcher der Länge nach gleichförmig vom Strome durchflossen wird, ist seiner Länge l direkt und dem Querschnitt q umgekehrt proportional $w = \sigma \cdot l/q$. Der specifische Leitungswiderstand σ hat sehr verschiedene Gröfse. Man nennt $1/w$ das Leitvermögen, und $\varkappa = 1/\sigma$ das specifische Leitvermögen.

Ausbreitungswiderstand. Geht der Strom aus der ebenen Endfläche eines Kreiscylinders vom Halbmesser r in einen weiten Raum vom specifischen Widerstand σ' über, so beträgt der Ausbreitungswiderstand ebensoviel, als wenn man den Cylinder selbst um $0{,}80 \cdot r \cdot \sigma'/\sigma$ verlängerte, also um $0{,}80 \cdot r$, wenn die Ausbreitung in dieselbe Substanz geschieht (Rayleigh; vgl. Maxwell § 309).

Andere Gestalten. Jeder Leiter hat, wenn die Ein- und Austrittsstellen des Stromes gegeben sind, einen bestimmten Widerstand, welcher bei Raum-Erfüllung mit homogener Masse $= \sigma \cdot \gamma$ ist. γ, die Widerstandskapacität des Raumes, hängt von der Gestalt ab, ist also für den longitudinal durchströmten Cylinder $= l/q$; γ ist ferner für einen Conus von der Länge l und den Endhalbmessern r_1 und r_2, wenn der Strom durch die Endflächen gleichmäfsig hindurchfliefst, $= l/(r_1 r_2 \pi)$; für einen Hohlcylinder von der Länge h und den Halbmessern r_1 und r_2, welcher radial vom Strome durchflossen wird (ähnlich wie die Flüssigkeitsschicht in einem galvanischen Element gewöhnlicher Gestalt), $= (\log\text{nat}\, r_2 - \log\text{nat}\, r_1)/(2\pi h)$.

Widerstandseinheit. Das Ohm (Anh. 21) ist der Widerstand einer 106,3 cm langen Quecksilbersäule von 1 qmm bei 0°. Die ältere Definition mit 106,0 cm Länge heifst „legales Ohm"; 100 cm geben die Siemens'sche Quecksilbereinheit, 104,87 cm die British-Association-Einheit.

Also hat man Ohm : leg. Ohm : BAE : Siemens = 1,063 : 1,060 : 1,0487 : 1.

Tab. 25 enthält den auf Ohm bezogenen spec. Widerstand σ gebräuchlicher Körper, sowie $\varkappa = 1/\sigma$. Die Längen sind dabei nach m, die Querschnitte nach mm² gemessen vorausgesetzt. Der Widerstand eines Cylinders von l m Länge und q mm² Querschnitt ist $= \sigma \cdot l/q$ oder gleich $l/\varkappa q$ Ohm. Durch Multiplikation mit 1,063 kommt der Widerstand in Siem.-Einheiten. $\sigma/10000$ gibt den Widerstand eines Würfels von 1 cm³

in Ohm und wird wohl auch spec. Widerstand genannt. $\sigma \cdot 100000$ ist der Widerstand jenes Würfels in abs. cm/sec-Einheiten, also der spec. Widerstand im [C-G-S]-System.

Die letzte Spalte von Tab. 25, sowie die Tab. 26 für Elektrolyte enthalten auf Quecksilber von 0° bezogene Leitvermögen $k = \varkappa/1,063$.

Widerstand eines Kupferdrahtes von 1 m Länge und d mm Durchmesser. $q = d^2 \cdot \pi/4 = 0,785 d^2$ mm². Leitvermögen best leitenden Kupfers $\varkappa = 58$. Der Widerstand berechnet sich hiermit $= 1/(46 d^2)$ Ohm. Wiegt 1 m Kupferdraht p gr, so ist $d^2 = p/7$; der Widerstand beträgt $0,15/p$ Ohm.

Ein Centimeter-Würfel best leitender Schwefelsäure von 18°, also $= 0,01$ m, $q = 100$ mm², $\varkappa = 0,000073$, hat den Widerstand

$$l/\varkappa q = 1/0,73 = 1,37 \text{ Ohm}.$$

2. Der gesamte Widerstand mehrerer Widerstände hinter einander ist gleich ihrer Summe.

3. Die elektromotorische Kraft einer offenen Säule ist gleich dem Potential- oder Spannungsunterschied ihrer Pole. Die gesamte el. Kraft einer Kette ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen Kräfte. Ist eine konstante Kette von der el. Kraft E und dem inneren Widerstande w_0 durch einen äufseren Widerstand w_1 geschlossen, so beträgt die Pol- oder Klemmspannung $E \cdot w_1/(w_0 + w_1)$.

4. Die Stromstärke oder Intensität i in einem Schliefsungskreise ist der el. Kraft E direkt, dem Widerstande w umgekehrt proportional. Man wählt nach Weber die Einheiten so, dafs die el. Kraft 1 im Widerstande 1 den Strom 1 erzeugt; dann ist $i = E/w$.

Solche Systeme von Einheiten werden im „absoluten" Mafssystem, sowie in dem „praktischen" System durchgeführt, in welchem die Stromstärken nach Ampere, die Widerstände nach Ohm, die el. Kräfte nach Volt gemessen werden. Vgl. Anh. 19—21. Es ist

die Stromstärke	1 Ampere = Volt/Ohm	= 0,1	[C-G-S],
der Widerstand	1 Ohm = Volt/Am	= 10^9	" " "
die elektrom. Kraft	1 Volt = Am × Ohm	= 10^8	" " "

Der theoretischen Definition kommt das (internationale) Ohm

$$= 1,063 \text{ m/mm}^2 \text{Hg } 0^\circ$$

mindestens auf $^1/_{1000}$ nahe. Dem älteren „legalen" Ohm entsprechend hat man auch das „legale" Volt $= 0,9972$ richt. Volt.

Die Gleichung $i = E/w$ gilt für einen Stromleiter vom Widerstand w, welcher selbst keine el. Kraft enthält, auch in dem Sinne, dafs E die Potential- oder Spannungs-Differenz der beiden Endpunkte von w bedeutet.

Hieraus folgt z. B. der Satz, dafs in der Wheatstone'schen Schaltung (Fig. am Schlufs von I) $w_1/w_4 = w_2/w_3$ ist, wenn der Brückenstrom i verschwindet. Denn an den Endpunkten des Brückendrahtes mufs dann die Spannung gleich sein, etwa $= P$. Seien die Spannungen an den anderen beiden Verzweigungspunkten P_1 und P_2, so mufs, weil offenbar $i_4 = i_1$ und $i_2 = i_3$ ist, $(P_2 - P)/w_2 = (P - P_1)/w_3$ und $(P_2 - P)/w_4 = (P - P_1)/w_1$ sein, woraus obige Beziehung folgt.

Stromverzweigung.

Wird ein Strom J in mehrere Wege vom Widerstande $w_1, w_2 \cdots$ verzweigt und sind die Zweigströme entsprechend $i_1, i_2 \cdots$, so ist

5. die Summe der Zweigströme gleich dem unverzweigten Strom:

$$i_1 + i_2 + \cdots = J.$$

6. Die einzelnen Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände der resp. Wege (oder direkt wie die Leitvermögen derselben): $i_1 : i_2 : \cdots = 1/w_1 : 1/w_2 : \cdots$

7. Das gesamte Leitvermögen des verzweigten Weges ist gleich der Summe der Leitvermögen der einzelnen Wege;

$$1/w = 1/w_1 + 1/w_2 + \cdots$$

Kirchhoff'sche Regeln.

Die Sätze 2) bis 7) sind in folgenden zweien enthalten:

A. An jedem Verzweigungspunkte ist die Summe der Stromstärken gleich Null, wenn man den ankommenden Strömen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt wie den abfließsenden.

B. Betrachtet man einen beliebigen in sich geschlossenen Teil der Leitung, nennt die darin vorhandenen el. Kräfte und Ströme der einen Richtung positiv, die der anderen negativ, so ist die Summe der Produkte aus den einzelnen Widerständen und den zugehörigen Stromstärken gleich der Summe der el. Kräfte.

1. Beisp. Einfache Stromverzweigung

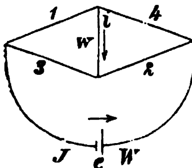
$$i_1 + i_2 = J \qquad i_1 w_1 - i_2 w_2 = 0 \qquad JW + i_1 w_1 = e,$$

woraus

$$J = e\,\frac{w_1 + w_2}{Ww_1 + Ww_2 + w_1 w_2}\,; \quad i_1 = e\,\frac{w_2}{Ww_1 + Ww_2 + w_1 w_2} \text{ etc.}$$

also z. B. $J : i_1 = (w_1 + w_2) : w_2$.

2. Beisp. Wheatstone'sche Schaltung; Zweigströme und Widerstände den Zahlen entsprechend benannt:



$$J - i_1 - i_3 = 0 \qquad JW + i_1 w_1 + i_4 w_4 = e$$
$$J - i_2 - i_4 = 0 \qquad iw - i_1 w_1 + i_3 w_3 = 0$$
$$i + i_1 - i_4 = 0 \qquad iw - i_2 w_2 + i_4 w_4 = 0,$$

woraus, wenn der Brückenstrom $i = 0$ ist, folgt:

$$w_1 w_2 = w_3 w_4.$$

II. Strom-Erreger.

Amalgamiren des Zinks. Man gibt demselben mechanisch und in verdünnter Schwefelsäure oder besser Salzsäure eine metallische Oberfläche und reibt Quecksilber ein oder taucht in eine Lösung von Quecksilber-Chlorid oder Nitrat. Nach dem Gebrauch sollen die Zinke gleich gebürstet und gespült werden.

Kohlen. Manche Kohlen verringern durch längeren Gebrauch ihre Wirksamkeit. Man mufs sie durch Abfeilen oder Erhitzen zu reinigen suchen.

Thonzellen. Auswittern der Salze am Rande schädigt die Zelle rasch. Gebrauchte Zellen legt man nach oberflächlichem Abspülen und Durchfiltriren in Wasser. Bei dem Ansetzen eines Elementes soll die Zelle zuerst nicht mit Kupferlösung oder Salpetersäure, sondern mit Schwefelsäure befeuchtet werden. Man fülle ferner die Schwefelsäure zu einer um $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ höheren Säule ein, um das Durchdringen der anderen, schwereren Flüssigkeiten zum Zink zu erschweren.

Platinmohr. Über das Überziehen von Platin oder Silber mit Platinschwarz s. 7, 18.

Gebräuchliche Flüssigkeiten.

Schwefelsäure. Für Elemente mit Zink spec. Gewicht höchstens = 1,06, d. h. etwa 50 cm^3 H_2SO_4 auf 1 l Wasser. Für schwache Ströme genügt meistens eine weit schwächere Säure. Wegen der Erhitzung gießt man die Säure langsam und unter Umrühren in das Wasser. Es ist darauf zu achten, daſs die Säure durchaus kein Kupfer, auch keine Salpetersäure enthält. Reine Schwefelsäure anzuwenden ist daher geraten. Für Akkumulatoren nur reine Säure! Es soll das spec. Gew. im geladenen Zustande etwa 1,16, im ungeladenen 1,13 betragen. Bei dem Nachfüllen wird im allgemeinen 5% Säure geeignet sein.

Kupfervitriol-Lösung. Dieselbe darf gesättigt sein (spec. Gewicht gegen 1,2; etwa 1 Teil krystallisirtes Salz auf 3 Teile Wasser). In der ersten Zeit pflegt die el. Kraft etwas zu wachsen. Der Strom verbraucht die Lösung, wodurch die Säule inkonstant wird.

Salpetersäure. Dieselbe wird für stärkere Ströme „koncentrirt“ angewandt (spec. Gewicht 1,3 bis 1,4).

Chromsäure. Recept nach Bunsen: 92 g pulverisirtes Kaliumbichromat ($K_2Cr_2O_7$) werden mit 94 ccm H_2SO_4 zu einem gleichförmigen Brei zusammengerieben. Ehe dieser erstarrt, setzt man 900 ccm Wasser zu und rührt, bis alles gelöst ist. Soll das Zink längere Zeit in der Flüssigkeit stehen, so ist diese Flüssigkeit mit Wasser zu verdünnen.

Elemente.

Daniell. Zn, H_2SO_4, $CuSO_4$, Cu. Elemente, die an einem kühlen Orte lange stehen können, verfertigt man aus Cylindergläsern mit Kupfervitriolkrystallen und Bleiplatte mit Guttaperchadraht am Boden; darüber ganz verdünnte Schwefelsäure und eine Zinkscheibe eingehängt.

Gewöhnliche Daniell-Elemente haben 1,08 bis 1,12 Volt. Stärkere Säure erhöht die Kraft; stärkere Kupferlösung kann bei schwachem Strome eine Verminderung bewirken. Nach Kittler gibt reines amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure von 1,075 spec. Gewicht oder 11% H_2SO_4, koncentrirte Kupfersulfatlösung von 1,20 spec. Gewicht, reines Kupfer, welches letztere vom Strome selbst gebildet wird, 1,18 Volt. Die Temperatur hat geringen Einfluſs. Nach der Zusammensetzung pflegt die el. Kraft in der ersten Zeit etwas kleiner zu sein. Widerstand der gebräuchlichen Gröſsen etwa 0,6 bis 0,3 Ohm.

Bunsen oder Grove. Zn, H_2SO_4, HNO_3, C oder Pt. El. Kraft im guten Zustande etwa = 1,9 Volt, bei starkem Strome oder schwächerer Salpetersäure geringer. Widerstand gebräuchlicher Gröfsen etwa = 0,2 bis 0,1 Ohm.

Chromsäure-Element. Zn, H_2CrO_3, C. El. Kraft bei nicht zu starkem Strome = 2,0 Volt. Starke Ströme von langer Dauer darf man von der Chromsäure-Batterie nicht verlangen. Ist die Flüssigkeit durch den Gebrauch ganz dunkel geworden oder hat sich gar Chromalaun ausgeschieden, so sind die Elemente geschwächt und inkonstant.

Etwas kostspieliger, aber angenehmer, weil das Ausscheiden fester Körper vermieden wird, ist eine wässerige Lösung von Chromsäure mit Zusatz von Schwefelsäure.

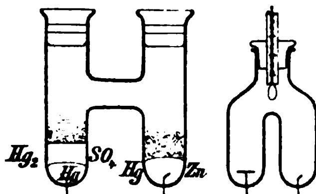
Für schwache Ströme von grofser el. Kraft sind die in der Medicin gebräuchlichen Spamer'schen Trogapparate mit Chromsäure zweckmäfsig.

Braunstein-Element. Zn, Lösung von NH_4Cl, zerkleinerter Braunstein, Kohle. Spannung stromlos etwa $1\frac{1}{2}$ Volt. Mit Strom „inkonstant", d. h. die el. Kraft nimmt mit wachsender Stromstärke ab.

Smee. Zn, H_2SO_4, Pt oder Silber mit Platinmohr überzogen. Spannung stromlos etwa $\frac{5}{4}$ Volt, mit Strom bis 0,6 Volt abwärts, je nach der Stromdichte.

Akkumulatoren. Die Säure soll stets die Platten gut 1 cm überdecken. Die Ladung ist thunlichst immer bis zur Gasbildung fortzusetzen. Stehen die Elemente ungebraucht, so soll man alle 8 bis 14 Tage wieder bis zur Gasbildung aufladen. Sehr rasche Entladung oder Verbrauch der Ladung bis zur Abnahme der Wirkung ist zu vermeiden. Stark beanspruchte Elemente sind jedenfalls alsbald wieder aufzuladen. El. Kraft beim Gebrauch = 2,0 bis 2,02 Volt; beim Laden bis 2,8 Volt. Widerstand meist sehr klein. Elemente mit innerem Kurzschlufs (welche durch die Ladung warm werden und dieselbe rasch verlieren) sind sofort zu entleeren. Abnorm grofse Spannung eines Elementes während des Ladens weist auf einen Fehler hin, der den innern Widerstand vergröfsert hat.

Clark. Reines Quecksilber, Hg_2SO_4 (Oxydul!), $ZnSO_4$, reines Zink oder Zink-Amalgam aus 90 Teilen reinen Quecksilbers und 10 Teilen reinen Zinks. Das bei gewöhnlicher Temperatur feste Amalgam wird heifs eingefüllt. Die Verbindung geschieht durch Platin-Drähte, welche durch Glasröhren von oben, oder durch das Glas geschmolzen von unten eingeführt sind. Das Quecksilber oder Amalgam mufs das Platin ganz überdecken.



Am gebräuchlichsten ist die H-Form (Lord Rayleigh; Fig. Daneben eine abgeänderte Form mit Glasstöpselverschlufs). Das Quecksilber wird mit einer Paste aus zusammengeriebenem Hg_2SO_4 mit Hg und reinen $ZnSO_4$-Krystallen bedeckt, die vorher mit koncentrirter

$ZnSO_4$-Lösung zu einem schwer flüssigen Brei angefeuchtet waren. Amalgam und Paste füllt man ohne Benetzung der Wandung ein. Eine koncentrirte Lösung von $ZnSO_4$ bedeckt das Ganze. Auf die Flüssigkeit wird heifses Paraffin gegossen, nach dem Erkalten eine Korkscheibe aufgesetzt, dann mit Marineleim oder heifs mit gutem Siegellack gedichtet. — Das käufliche reine Zinksulfat wird in Lösung mit metallischem Zink gekocht, bis sich Zinkhydrat abscheidet; dann filtrirt. Zum Zwecke der Versendungsfähigkeit wird amalgamirtes Platin anstatt Quecksilber genommen und die zweite Form, nach Aufbringen von $ZnSO_4$-Krystallen auf das Amalgam, mit der Paste ganz gefüllt.

Kahle, Z. S. f. Instr. 1892, 118; Wied. Ann. 51, 174 u. 203. 1894. — Kleine Elemente für elektrometrische Ladungen s. Quincke.

El. Kraft zwischen 10° und 30° bei der Temp. t gleich

$$1{,}433\,[1-0{,}00082\,(t-15)-0{,}000007\,(t-15)^2]$$

richtige Volt. Gröfste zulässige Stromstärke ohne Polarisation bei gebräuchlichen Gröfsen vielleicht $^1/_{20000}$ Am. Nach Überanstrengung erholt das Element sich sehr langsam.

Die Phys. Techn. Reichsanstalt beglaubigt Clark-Elemente.

Cadmium-Element (Weston). Wie das vorige, nur Cd und $CdSO_4$ anstatt Zn und $ZnSO_4$. Sein Vorteil besteht in einem viel kleineren Temperatureinflufs. El. Kraft zwischen 0° und 26°

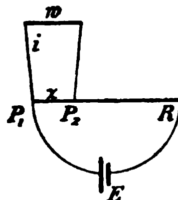
$$1{,}022\,[1-0{,}0_4122\,(t-20)-0{,}0_664\,(t-20)^2].$$

Jaeger u. Wachsmuth, El. techn. Z. S. 1894, 507.

Kalomel-Element von Helmholtz. Zink, 5 bis 10% Chlorzinklösung, fein gepulverter Kalomel, Quecksilber. Dasselbe gibt schwache Ströme lange Zeit hindurch sehr konstant.

Dynamomaschine. Maschinenströme sind wegen der Schwankungen des Gasmotors in der Regel inkonstant. Die Vergröfserung des Trägheitsmomentes durch eine Schwungscheibe ist nützlich. Sehr konstant kann der Strom werden, wenn man Akkumulatoren in passender Anzahl gleichgerichtet neben die Maschine schaltet. Für physikalische Zwecke eignen sich Gleichspannungs-Maschinen am meisten. Man soll die Maschine so wählen, dafs Akkumulatoren ohne direkte Windungen, also mit reiner Nebenschlufsmaschine geladen werden können. Vgl. noch 77a.

Schwache el. Kräfte durch Abzweigung. Man schliefst ein Element (Daniell; Akkumulator) konstant durch einen Widerstand (Rheostat oder blanker Draht) und benutzt zwei Punkte P_1 und P_2 dieses Kreises als Pole. Ist E die el. Kraft des Elementes, R der Gesamtwiderstand obigen Kreises (Rheostat und Element) und z der Widerstand zwischen den Abzweigepunkten, so gilt als el. Kraft der Kombination der Ausdruck $E \cdot z/R$ und als ihr Widerstand $z(1-z/R)$.



Denn wenn i der Strom in einer angelegten Leitung vom Widerstande w, so ist (vgl. I am Schlufs)

$$i = Ez:[w(R-z)+wz+(R-z)z] = (Ez/R):[w+z(1-z/R)].$$

Thermo-Elemente. Über deren el. Kraft vgl. S. 115. — Siehe auch z. B. Noll, Wied. Ann. 53, 874. 1894; Dewar u. Fleming, Phil. Mag. 40, 95. 1895.

III. Strom-Verbindungen.

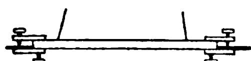
Die blofse Berührung starrer Leitungsteile gibt im allgemeinen keinen genügenden Schlufs. Die sich berührenden Teile sollen dann aus Platin bestehen. — Axen an Stromschlüsseln oder Kommutatoren sind ohne Schleiffedern nicht zuverlässig. Die Berührung eines Metalles mit Kohle soll in einer gröfseren Fläche stattfinden.

Selbst bei der Anwendung von Klemmschrauben hat man die Oberflächenteile blank zu erhalten und mufs die Schrauben fest anziehen.

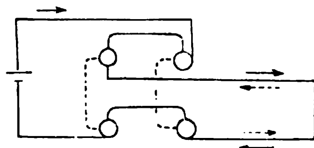
Auch Quecksilber sichert nur dann eine widerstandsfreie Verbindung, wenn die das Quecksilber berührenden Metalle (Messing, Kupfer, Platin, auch wohl Eisen) amalgamirt sind; 7, 11.

Über Stöpselverbindung s. IV.

Einschaltung und Benutzung sehr kleiner Widerstände. Verbindungen, welche keine relativ beträchtlichen Übergangswiderstände enthalten, lassen sich bei Leitern wie kurze dickere Drähte oder Metallstäbe nicht mehr improvisiren. In einen solchen Leiter führt man den Strom in möglichst sicherer Weise mit Klemmen oder Quecksilber an den Enden ein, grenzt aber den zu bestimmenden oder zu benutzenden Widerstand zwischen zwei inneren Punkten des Leiters ab. Wenn z. B. von einem solchen Leiter ein Zweigstrom abgenommen werden soll, so legt man die Ableitungen nicht an die Klemmen etc., sondern an zwei Punkte oder Querschnitte des Leiters selbst.



Störende elektromagnetische oder inducirende Wirkungen der Leitungsdrähte vermeidet man dadurch, dafs man entgegengesetzt laufende Ströme dicht neben einander hat. Einzelne Drähte nahe an Nadeln, gröfsere Schleifen, insbesondere vertikal stehende, können grofse Fehler geben.



Den einfachsten Stromwender gibt ein Brett mit vier Quecksilbernäpfen $\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}$, von denen man durch ein Paar von Metallbügeln entweder 1 mit 2 und 3 mit 4 verbinden kann oder 1 mit 3 und 2 mit 4. Zu 2 und 3 führt man die Drähte von der Säule, zu 1 und 4 die Enden des Schliefsungskreises.

IV. Rheostaten-Widerstände.

Für die Wahl des Materials ist mafsgebend die Haltbarkeit, ein geringer Einflufs der Temperatur, endlich im allgemeinen noch ein grofser spec. Widerstand; siehe hierüber Tab. 25. Die früher gebrauchten Legirungen aus Cu, Ni und Zn, wie Neusilber, Nickelin, „Platinoid" werden

verdrängt durch die von der Temperatur unabhängigeren Legirungen „Constantan“ (60 Cu, 40 Ni), auch wohl „Patentnickel“ (75 Cu, 25 Ni); in neuerer Zeit besonders durch „Manganin“ (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni). Letzteres mufs gegen Oxydation durch einen Überzug von Schellack geschützt werden, bietet den erstgenannten gegenüber aber den Vorteil, dafs seine thermoel. Kraft gegen Kupfer viel kleiner ist. Feufsner u. Lindeck, wissensch. Abh. d. Reichsanstalt 2, 501. 1895. Z. S. f. Instr. 1895, 394 u. 425.

Neue Drähte erleiden anfangs eine merkliche Widerstandsänderung. Auch das Aufwinden beeinflufst den Betrag des Widerstandes. Längeres Erwärmen auf etwa 130° befördert das Konstantwerden.

Bifilare Wickelung der Widerstandsrollen. Man knickt den Draht in der Mitte und wickelt von hier aus beide Hälften mit einander. Oder man windet zwei Drähte nach Verlötung ihrer Enden mit einander auf. Solche Rollen üben keine magnetische Wirkung aus und sind nicht bei Änderungen der Stromstärke der Selbstinduktion ausgesetzt, welche leicht irre führen kann. Dagegen haben bifilar gewundene längere Drähte, besonders bei sorgfältiger Wickelung, eine beträchtliche Ladungs-Kapacität, die bei gröfseren Widerständen ebenfalls Störungen bewirken kann.

Unifilar abwechselnde Wickelung (Chaperon). Man wickelt kurze Lagen und kehrt nach jeder Lage die Windungsrichtung um, so dafs auch hier in der fertigen Rolle der Strom ebensoviele Windungen in der einen wie in der anderen Richtung durchfliefst. Dann ist sowohl die Selbstinduktion wie die Kapacität klein.

Kleine Widerstände stellt man oft zweckmäfsig durch Nebeneinanderschaltung gröfserer her.

Kleine Abänderungen eines Widerstandes w werden am einfachsten durch Nebenschaltung eines grofsen Widerstandes R bewirkt. Dadurch nämlich entsteht der Gesamtwiderstand $w \cdot R/(R+w)$ oder nahe $w(1-w/R)$.

Widerstandssätze (Rheostaten). Zur raschen Herstellung beliebiger Widerstände eignet sich die Anordnung nach je 10 Einheiten in jeder Dekade oder auch 1 1 2 4 8 16 .... — Für messende Zwecke sind die Sätze 1 2 3 4 oder 1 2 2 5 in jeder Dekade gebräuchlich. Zum Zwecke der Fehlerbestimmung (71d) sollte der kleinste Widerstand doppelt vorhanden sein. — 10 gleiche Widerstände w, die man beliebig neben und hinter einander schalten kann, geben eine Auswahl von 94 verschiedenen Widerständen zwischen $10w$ und $w/10$.

Die an älteren Rheostaten vorkommende Verbindung von Nachbarrollen durch gemeinsame Zuführungen zu den Klötzen bedingt Fehler (Dorn).

Stöpsel sind nur am Griffe anzufassen und vor Verletzung ihres Konus zu hüten. Sie werden mit etwas Drehung mäfsig fest eingesetzt, häufig mit einem reinen Tuch oder Leder ohne Fasern abgewischt und äufserstenfalls, aber ganz selten, mit feinstem Schmirgelpapier abgerieben. Der Widerstand eines Stöpsels gewöhnlicher Form bleibt

bei guter Behandlung unter $^1/_{5000}$ Ohm. Temperatursteigerung lockert die Stöpsel. — Bei längerem Nichtgebrauch lockere man dieselben absichtlich. — Bei Kurbeln sind Axenkontakte oft unzuverlässig.

Rheostaten sollen ventilirbar und für Thermometer zugänglich sein.

Stromwärme. In w Ohm entwickeln i Am $0{,}24 \cdot w \cdot i^2$ gr-Kalor./sec (Anh. 22). Drähte von d mm Durchmesser würden ohne Wärmeabgabe sich durch i Am etwa erwärmen um $0{,}40 \cdot \sigma/(cs) \cdot i^2/d^4$ Grad/sec (σ, c, s gleich spec. Widerstand, Wärme, Gewicht); also Kupfer um $0{,}008\ i^2/d^4$, Eisen um $0{,}06\ i^2/d^4$, Konstantan, Manganin, gutes Neusilber beiläufig um $0{,}15\ i^2/d^4$ Grad.

Starkstrom-Widerstände werden frei durch die Luft oder durch ein Öl- oder Petroleum-Bad geführt. Netz- oder siebförmige Leiter sind wegen der raschen Wärmeabgabe zweckmäfsig. Die gröfste Erwärmung τ frei gespannter blanker Drähte oder Bleche vom Querschnitt q mm² und dem Umfang u mm durch den Dauerstrom i Am. läfst sich schätzen nach der Formel $\tau = C \cdot i^2/(q\,u)$, wenn man für C einsetzt: bei Cu 0,35, Fe 2, Neusilber 6, Manganin 10. Ausführlichere Angaben bei Ayrton u. Kilgour, Phil. Trans. 183 A, 376, 1892.

Abzweigungen. Die häufig vorkommende Aufgabe, Ströme zu verzweigen, läfst sich meistens mit einem Rheostaten erfüllen, indem man die Ströme in denselben teilweise an den geeigneten Metallklötzen einführt. Es sollen deswegen Vorkehrungen zu diesem Zweck vorhanden sein. Nützlich sind zum mindesten einige Stöpsel mit Klemmschrauben. Nebenstehende Figur zeigt, wie man mit einem gewöhnlichen Rheostaten an eine Galvanometerleitung, unter Einschaltung eines Widerstandes (z. B. 900 Ohm) in dieselbe, eine Nebenschliefsung (z. B. 10 Ohm) anlegt. Die Pfeile bezeichnen den Hauptstrom. Die Verwendbarkeit eines Rheostaten wird bedeutend erweitert, wenn die einzelnen Dekaden (Zehntel, Einer u. s. w.) durch überzählige Stöpsellöcher getrennt sind, so dafs man die Abteilungen für sich gebrauchen kann. Es ist dann z. B. möglich, in einen Stromkreis einen Widerstand einzuschalten, von einem Teile des Hauptweges eine Leitung abzuzweigen und in die letztere auch noch einen Widerstand einzuschalten.



V. Wirksamkeit der Säulen und Multiplikatoren.

Für starke Ströme in kleinen Widerständen sind vorzugsweise Gröfse und geringer Abstand der Metallplatten in den Elementen, sowie Leitvermögen und Koncentration der Kupferlösung oder der Salpetersäure mafsgebend. Für Ströme in Leitungen von grofsem Widerstande kommen diese Umstände weniger in Betracht, als die Anzahl der hinter einander verbundenen Becher.

Mehrere konstante Elemente hat man, um die gröfste Stromstärke in einer gegebenen äufseren Leitung zu erzielen, so neben oder

hinter einander zu verbinden, dafs der innere Widerstand dem äufseren nahe kommt. Wegen der Polarisation ist es praktisch meist besser, den inneren Widerstand etwas kleiner zu wählen. Der Widerstand von n Elementen oder Gruppen neben einander ist n^2mal kleiner als von allen hinter einander.

Wasserzersetzung verlangt mindestens 2 Akkumulatoren, Bunsen- oder Grove'sche oder 3 Daniell'sche Becher.

Als Drahtstärke bei der Herstellung von Multiplikatoren (oder Elektromagneten) von gegebener Gestalt ist im allgemeinen diejenige zu wählen, welche den Widerstand des Multiplikators dem übrigen Widerstande ungefähr gleich macht. Nach demselben Gesichtspunkte hat man auch die auf den Multiplikatoren oft zur Verfügung stehenden verschiedenen Windungslagen hinter oder neben einander zu verbinden, wenn die gröfstmögliche Empfindlichkeit verlangt wird.

Empfindlichkeit eines Galvanometers. Der Ausschlag durch eine bestimmte Stromstärke hängt, aufser von der Konstruktion des Instruments, von der Wahl der Drahtsorte, der Astasirung und dem Skalenabstand ab. Um eine vergleichbare Charakteristik aller Konstruktionen zu haben, pflegt man jetzt als Norm anzunehmen: eine Drahtsorte, welche 1 Ohm Multiplikatorwiderstand ergeben würde, ein magnetisches Feld, welches der gegebenen Nadel eine Schwingungsdauer von 10 sec erteilt, endlich einen Skalenabstand von 2000 mm, und den Ausschlag e_0 mm anzugeben, welchen unter diesen Umständen der Strom 1 Am geben würde, wenn der Ausschlag der Stromstärke proportional wäre. Gilt nun für ein vorhandenes Instrument vom Widerstande w Ohm, der Schwingungsdauer t sec und dem Skalenabstande A mm die Empfindlichkeit e mm/Am, so ist die Normalempfindlichkeit dieser Konstruktion $e_0 = e \cdot 1/\sqrt{w} \cdot 10^2/t^2 \cdot 2000/A$.

Über Messungsmethoden in den Formen, welche sich für technische Zwecke eingebürgert haben, siehe u. a. Kittler, Hdb. d. Elektrotechnik, 2. Aufl., Stuttgart 1892; Grawinkel u. Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik, 4. Aufl. Berlin 1895; Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker.

64. Tangentenbussole (Pouillet; W. Weber).

Ein weiter Multiplikator umgibt eine kurze Magnetnadel. Die Windungsebene soll im magnetischen Meridian stehen, d. h. mit der nicht abgelenkten Nadel zusammenfallen.

I. Relative Strommessung.

Für manche Zwecke genügt es, das Verhältnis von Stromstärken zu kennen. Ist eine Nadel klein gegen ihren Abstand vom Multiplikator (oder hat der letztere eine geschlossene ellipsoidische Gestalt; Riecke), so ist die Strom-

stärke (Intensität; Elektricitätsflufs in der Zeiteinheit) der trigonometrischen Tangente des Ablenkungswinkels proportional (Tab. 39; fünfstellige Tafeln von Bremiker). Also verhalten sich Stromstärken i und i', welche die Ablenkungen α und α' hervorbringen (Korrektionen s. später)

$$i : i' = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\alpha'.$$

II. Absolute Strommessung (W. Weber).

Weber'sche oder elektromagnetische [C-G-S]-Einheit des Stromes ist derjenige Strom, welcher die Einheit der magnetischen Wirkung (Anh. 19) im [C-G-S]-System ausübt. Eine Tangentenbussole mit n kreisförmigen Windungen vom mittleren Halbmesser R cm an einem Orte von der magnetischen Horizontal-Intensität H (59; Tab. 22) gibt die Stromstärke i nach diesem Mafse als

$$i = \frac{RH}{2n\pi} \cdot \operatorname{tg}\alpha = C \cdot \operatorname{tg}\alpha \; [\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{sec}^{-1}].$$

$C = RH/(2n\pi)$ ist der Reduktionsfaktor auf elektromagnetische [C-G-S]-Einheiten.

Beweis. Der Strom i durchfliefst die Länge $n \cdot 2\pi R$ im Abstande R von der kurzen Nadel M. Er sucht letztere senkrecht zur Windungsebene zu stellen und übt, wenn sie um den Winkel α abgelenkt ist, das Drehungsmoment $iM \cdot 2nR\pi/R^2 \cdot \cos\alpha = iM \cdot 2n\pi/R \cdot \cos\alpha$ aus. Das erdmagnetische rücktreibende Drehungsmoment ist $MH \sin\alpha$. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke entsteht die Formel. Vgl. Anhang Nr. 16 u. 19.

Fadentorsion. Ist die Nadel am Faden vom Torsionsverhältnis Θ aufgehangen (55), so ist $H(1+\Theta)$ statt H zu setzen.

Verschiedene Stromeinheiten. Mifst man R und H in [mm, mg, sec], so entsteht die Stromstärke in der nach dem Vorgange von Gaufs und Weber früher gebrauchten Einheit, welche 100mal kleiner ist, da R sowohl wie H (59) 10mal kleinere Einheiten bekommen.

Der Strom 1 Ampere ist der 10te Teil von 1 [C-G-S]; also wird der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf Am, wenn man R und H in [cm, gr, sec] gemessen hat,

$$C_A = 5\,\frac{RH}{n\pi}.$$

Bestimmung des Halbmessers. Man mifst den Durchmesser direkt mit Mafsstab, Zirkel, Bandmafs oder Komparator,

oder man bestimmt den Radius aus der Länge l des Drahtes, welcher die n Windungen bildet, als $R = l/(2n\pi)$. Dünnere Drähte mifst und wickelt man unter derselben Spannung.

Genau ausmefsbare Kreisleiter sind entweder selbst abgedreht oder auf abgedrehte Rahmen aufgewunden, ein einzelner Draht z. B. auf eine Glasplatte mit eingedrehter flacher Nut und ausgedrehter Mitte zur Aufnahme der Magnetnadel.

Intensität des Erdmagnetismus. Der Reduktionsfaktor ist durch den Erdmagnetismus nach Ort und Zeit veränderlich. Wo H nicht bestimmt worden ist, kann man es angenähert aus Tab. 22 entnehmen; selbstverständlich unter dem Vorbehalt der Vermeidung von magnetischen Lokaleinflüssen, insbesondere auch durch längere Eisenmassen. Nach **61a** kann man das Zimmer auf Konstanz von H prüfen, sowie auch Beobachtungsorte mit einem Platz im Freien etc. vergleichen.

Beispiel. Ein 1948,0 cm langer Draht ist in 24 kreisförmigen Windungen aufgewunden. Dann ist $R = 1948/(48 \cdot 3{,}1416) = 12{,}92$ cm. Ferner sei H gleich 0,1920, so ist die Stärke eines Stromes, welcher den Ablenkungswinkel α hervorbringt, nach magnetischem Mafse

$$= \frac{12{,}92 \cdot 0{,}1920}{2 \cdot 24 \cdot 3{,}1416} \operatorname{tg}\alpha = 0{,}01645 \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ [C-G-S]}, \quad \text{oder} \quad = 0{,}1645 \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ Am.}$$

Günstigster Ausschlag. Ein Fehler von 0,1° bewirkt (vgl. S. 8)

bei einem Ausschlag von	5	10	15	20	30	40°
	85	80	75	70	60	50°
einen Fehler im Resultat von	2	1	0,7	0,55	0,4	0,35%.

Also sind sowohl sehr kleine wie sehr grofse Ausschläge der Genauigkeit nachteilig. Für 30 cm Weite sind für Ströme $= i$ Am etwa $n = 5/i$ Windungen zweckmäfsig. Für sehr verschiedene Stromstärken mufs man verschieden empfindliche Tangentenbussolen mit Windungen von ungleicher Weite oder Anzahl anwenden. Oder die Windungen sind so angeordnet, dafs man eine gröfsere oder eine geringere Anzahl einschalten kann. Sind mehrere Drähte mit einander aufgewunden und so angeordnet, dafs alle Windungen hinter einander oder in n Gruppen neben einander geschaltet werden können, so ist der Reduktionsfaktor im letzteren Falle n mal gröfser als im ersteren. Empirisch werden zwei Instrumente auf einander reducirt, indem man an beiden den Ausschlag mifst, welchen ein und derselbe

Strom hervorbringt. Ist der Ausschlag $=\alpha_1$ am Instrument I und $=\alpha_2$ an II, so sind die Tangenten der Winkel an I mit $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1$ zu multipliciren, um sie mit den an II gemessenen vergleichbar zu machen. Windungslagen desselben Instrumentes vergleicht man nach **69** Ie.

Man hat Tangentenbussolen mit Multiplikatoren versehen, welche man neigen kann; dann vergrößert man C im Verhältnis des reciproken Cosinus des Neigungswinkels (Obach).

Korrektion wegen des Querschnittes der Windungen und der Nadellänge. 1. Wenn die Dimensionen des Querschnittes der Windungslage nicht klein gegen den mittleren Halbmesser R der Windungen sind, so ist die vorige Formel nicht genau. Bildet der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Dicke h, so kann man die davon herrührende Korrektion erster Ordnung durch Multiplikation von C mit $1+\frac{1}{8}b^2/R^2-\frac{1}{12}h^2/R^2$ anbringen.

2. Für nicht sehr kurze Nadeln kommt erstens zu obigem Ausdruck noch der Faktor $\left(1-\frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2\right)$ hinzu. Zweitens ist anstatt $\operatorname{tg}\alpha$ zu setzen $\left(1+\frac{15}{16}(\mathfrak{l}^2/R^2)\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$. $\mathfrak{l}$ bedeutet den Polabstand der Magnetnadel, d. h. bei gestreckten Nadeln etwa $^5/_6$ der geometrischen Länge (**55a**, und Anh. 15).

Die vollständige Formel wird also unter Berücksichtigung der Kleinheit der Korrektionsglieder

$$i=\frac{RH}{2n\pi}\left(1+\frac{1}{8}\frac{b^2}{R^2}-\frac{1}{12}\frac{h^2}{R^2}-\frac{3}{16}\frac{\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{15}{16}\frac{\mathfrak{l}^2}{R^2}\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Die von der Nadellänge herrührenden Korrektionen heben sich für $\alpha=27^0$ auf. Eine Nadellänge $l=\frac{1}{6}R$ gibt noch Abweichungen vom Tangentengesetz bis zu 1%. Excentrische Aufhängung der Nadel um $\frac{1}{4}$ des Windungsdurchmessers macht den Fehler viel kleiner (Gaugain, Helmholtz). Absolute Messungen lassen sich dann aber nicht wohl ausführen.

Tangentenbussole mit rechteckigem Reif. R bedeutet das Mittel aus dem inneren und äußeren Halbmesser, h die Dicke.

1. Statt $-\frac{1}{12}h^2/R^2$ ist wegen der Stromverteilung zu setzen $-\frac{1}{8}h^2/R^2$.

2. Der Reif sei aufgeschnitten und habe dem mittleren Radius parallele Zuleitungsstücke von der Länge l mit einem gegenseitigen Abstand a ihrer Mittellinien: In die Korrektionsklammer ist noch zuzufügen

$$+al/2\pi R\cdot(R+\tfrac{1}{2}l)/(R+l)^2.$$

F. u. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 27, 21. 1886. Siehe dort auch das Verfahren genauer Messung von *R*.

Den Kreisleiter kann man aus einem Draht bilden, welcher auf eine gedrehte Glas- oder Marmorplatte aufgezogen ist. Dann fallen diese Korrektionen weg. F. u. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 27, 23. 1886; Quincke ib. 48, 25. 1893.

Zuleitungen. Es ist darauf zu achten, besonders bei wenigen Windungen, daſs nicht der Strom in den äuſseren Leitungen auf die Nadel wirke. Zu- und Ableitungsdrähte werden deswegen überall dicht neben einander geführt oder um einander gewickelt.

Kommutator. Ist die Windungsebene ungenau orientirt, so werden insbesondere groſse Ausschläge nach der einen Seite zu groſs, nach der anderen zu klein. (Man erkennt hieran die richtige Aufstellung oft besser, als an der Einstellung auf den Nullpunkt, welche bei einer kurzen Nadel unzuverlässig ist.) Das Mittel aus beiden liefert den richtigen Ausschlag. Man schalte also einen Kommutator (63 III) ein, welcher die Stromrichtung im Multiplikator umkehrt, ohne in der übrigen Leitung etwas zu verändern. Hiermit ist zugleich eine erhöhte Genauigkeit verbunden. Ein gut eingerichteter Kommutator dient ferner zum bequemen Schlieſsen und Öffnen des Stromes.

Ablesung. Bequem sind zwei zu der Nadelaxe senkrechte Zeiger. Behufs genauer Messung werden jedesmal beide einander gegenüberliegende Spitzen abgelesen. Vgl. S. 174. Zur Vermeidung der Parallaxe legt man auf die Bussole ein Stückchen Spiegelglas.

Zum Beruhigen der Nadel kann ein kleiner Magnet dienen, welcher nach dem Gebrauch hinreichend entfernt wird, oder auch der Kommutator selbst. Bei dem Umkehren des Stromes unterbricht man zunächst nur und schlieſst erst wieder, wann die Nadel auf der anderen Seite umkehrt.

Über Spiegelablesung s. 48 u. 49.

64a. Messung starker Ströme mit Abzweigung.

Diese Bemerkungen haben für alle Galvanometer Bedeutung. Ist das Instrument für die zu messenden Ströme zu empfindlich, so führt man einen Teil des Stromes durch eine konstante Nebenschlieſsung unwirksam an dem Galvanometer vorüber.

Das Galvanometer läfst sich dann wie ein anderes verwenden, solange das Widerstandsverhältnis, also im allgemeinen auch die Temperatur, konstant bleibt.

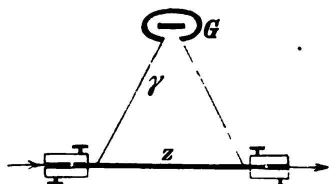
Ist C der Reduktionsfaktor des Instrumentes an sich, γ der Widerstand der Galvanometerleitung, z derjenige der Nebenleitung (der Abzweigung), so hat das abgezweigte Instrument den Reduktionsfaktor $v \cdot C$, wo das „Zweigverhältnis" oder der „Abzweigungsfaktor" (Beweis in Beisp. 1, S. 282)

$$v = (z + \gamma)/z \quad \text{oder} \quad 1 + \gamma/z.$$

Ist $\gamma : z = 9:1$ oder $99:1$ etc., so wird $v = 10$, 100 etc.

Bequem ist also, wenn man zu einem Galvanometer vom Widerstande w über Zweigwiderstände gleich $w/9$, $w/99$ etc. verfügt oder auch über w, $8w$, $98w$, von denen w als Zweig dient, während die anderen dem Galvanometer zugeschaltet werden etc.

Kleine Zweigwiderstände müssen so in die Leitung eingeschaltet werden, dafs die Verbindungswiderstände unschädlich bleiben (vgl. S. 286), z. B. in der durch die Figur angedeuteten Verbindungsweise. Damit der erforderliche Zweigwiderstand nicht zu klein wird, kann man zum Galvanometer einen Widerstand zufügen, der dann in γ mit inbegriffen ist (Fig. zu **63** IV).



Das Metall des Zweigdrahtes mufs gegen Temperatur unempfindlich (Tab. 25) oder so dick sein, dafs es nicht durch den Strom in störender Weise erwärmt wird.

65. Sinusbussole (Pouillet).

Der Strom im Multiplikator werde durch Nachdrehen um den Winkel α wieder in die ursprüngliche Stellung zu der, alsdann ebenfalls um α abgelenkten, Nadel gebracht. Dann ist offenbar

$$i = C \cdot \sin \alpha.$$

Weil der Sinus höchstens $= 1$ ist, so sind die Grenzen der Anwendbarkeit eng. Hat die Nadel noch eine besondere Teilung, so kann man stärkere Ströme mit geneigter Stellung der Nadel (etwa 45^0 und 70^0) beobachten. Um den gegenseitigen Reduktionsfaktor der Angaben bei verschiedener Neigung zu bestimmen, werden die Ablenkungswinkel α_1 und α_2 des-

selben Stromes bei beiden zu vergleichenden Neigungen gemessen. Dann ist $p = \sin\alpha_1/\sin\alpha_2$ dieser Faktor.

Über die absolute Bestimmung von C vergl. 69.

Ein Vorteil der Sinusbussole besteht darin, dafs die Giltigkeit des Sinusgesetzes streng ist; ein Nachteil in zeitraubender Einstellung und doppelter Fehlerquelle.

Über das verwandte Torsionsgalvanometer siehe 77.

66. Spiegelgalvanometer.

Für kleine, mit Spiegel und Skale (48, 49) beobachtete Ablenkungen ist auch bei einem engen Multiplikator der Strom der Tangente der Ablenkung α proportional, oder auch bis zu Winkeln von einigen Graden merklich dem in Skalenteilen gemessenen Ausschlage e selbst, also

$$i = C \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{oder auch} \quad i = C/(2A) \cdot e = \mathfrak{C} \cdot e,$$

wenn A den Skalenabstand vorstellt. Über die Bestimmung des Reduktionsfaktors in absolutem Mafse vgl. 69. Über Formen der Instrumente s. 67a.

Die Grenze, bis zu welcher die Proportionalität angenommen werden darf, reicht im allgemeinen um so weiter, je kürzer die Nadel und je weiter der Multiplikator ist. Doch sind auch enge Multiplikatoren günstig, wenn sie zugleich breit sind. Die Abweichung von der Proportionalität ist nahe dem Quadrate des Ausschlags proportional, also $i = \mathfrak{C}n(1 + \mathfrak{C}'n^2)$. Man prüft die Konstanz, bez. man bestimmt den Korrektionsfaktor $\mathfrak{C}'$ mittels einer und derselben konstanten Säule (Daniell; Akkumulator), die man durch das Galvanometer und verschieden grofse Rheostatenwiderstände schliefst. Die Stromstärke ist dann dem Gesamtwiderstande (Säule + Galvanometer + Rheostat) umgekehrt proportional. Bei der Prüfung empfindlicher Instrumente werden die geeigneten Rheostatenwiderstände so grofs, dafs die ersten beiden Teile nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Über ein genaues Verfahren mittels Nachdrehens des Multiplikators vgl. F. K., Wied. Ann. 26, 431. 1885.

Spiegelbussolen mit verschiebbaren Multiplikatoren (Wiedemann) werden empirisch justirt. Man vergleicht die Ausschläge durch einen und denselben Strom bei mehreren Stellungen der Multiplikatoren auf dem Mafsstabe und stellt

die Ausschläge etwa graphisch dar. Wenn r der Halbmesser des Multiplikators, a sein Abstand von der kurzen Nadel, so sind die Ausschläge ungefähr mit $(a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}$ im Verhältnis.

Geringer Eisengehalt eines Kupferdämpfers kann bereits sehr stören, indem die Ruhelage inkonstant, oder der Ausschlag nach beiden Seiten ungleich wird. Äufserliche Spuren von Eisen werden durch Behandeln mit heifser Schwefelsäure beseitigt, die man nachher mit heifsem Wasser beseitigt. Auch Lacke sowie Hartkautschuk können durch Eisengehalt stören.

Über Kommutator vgl. **64** II, über die Messung stärkerer Ströme durch Abzweigung **64** III. — Über Aufhängung der Nadeln s. **55a.**

66a. Elektrodynamometer (W. Weber).

Dasselbe besteht aus einer festen und einer, zu dieser senkrechten, drehbaren Drahtrolle, welche beide von dem Strome durchlaufen werden. Die Direktionskraft wird von einer bifilaren Aufhängung oder von der Elasticität eines Aufhängedrahtes geliefert.

I. Dynanometer mit Ausschlägen.

Kleine Ausschläge α der beweglichen Rolle sind dem Quadrate der Stromstärke i proportional, also ist

$$i = C\sqrt{\alpha},$$

wo C ein Faktor für das betreffende Instrument ist. Die Empfindlichkeit des Instrumentes ändert man durch Verstellung des Abstandes der Bifilaraufhängung oder bei eindrähtiger Aufhängung durch Auswechseln des Aufhängedrahtes. C ist der Schwingungsdauer umgekehrt proportional. Über die absolute Bestimmung von C vgl. **69**.

Stromwechsel im ganzen Instrument ändert die Richtung des Ausschlages nicht. Mit einem Kommutator verbindet man daher nur die eine der Rollen. Für schwache Ströme wird das Dynamometer unempfindlich, da der Ausschlag dem Quadrate der Stromstärke proportional ist.

Für genaue Messungen sind Vorsichtsmafsregeln wegen des Erdmagnetismus und der elastischen Nachwirkung notwendig.

Wechselströme. Die häufigste Anwendung des Instru-

mentes bezieht sich auf Ströme, welche, einzeln von gleichem Stromintegral, rasch hinter einander in abwechselnder Richtung folgen. Von solchen Strömen mifst das Dynanometer nicht die Stärke im gewöhnlichen Sinne, aber die mittlere Energie des Stromes. Diese ist nämlich proportional der Summe der Produkte aus dem Quadrate der Stromstärke in die zugehörigen Zeitelemente, ausgedehnt über die Zeiteinheit, d. h. gleich dem mathematischen Ausdruck $\frac{1}{t}\int_0^t i^2 dt$, wenn i die Stromstärke und t deren Periode bedeutet. Mittlere Stromstärke eines Wechselstromes nennt man wohl die Quadratwurzel aus diesem Ausdruck.

Bei Wechselströmen ist auf die Selbstinduktion der Rollen Rücksicht zu nehmen. Insbesondere kann die Verteilung des Stromes zwischen dem Instrument und einer Abzweigung (**64** III) für rasch wechselnde Ströme von der aus den Widerständen berechneten Verteilung stark abweichen.

Ferner ist zu beachten, dafs, wenn die beiden Rollen nicht genau senkrecht aufeinander stehen, Wechselströme in der einen eine Induktion auf die andere ausüben. Um die senkrechte Stellung zu prüfen, leitet man Wechselströme nur durch die äufsere Rolle, während die innere in sich geschlossen ist. Die letztere darf dann nicht abgelenkt werden.

Bei eindrähtiger Aufhängung der beweglichen Rolle kann man für schwache Wechselströme die untere Zuleitung durch ein platinirtes (7, 18) Platinblech bewirken, welches in verdünnte Schwefelsäure untertaucht und zugleich zur Dämpfung dient. Den dünnen Stiel platinirt und glüht man.

II. Dynamometer mit Null-Ablesung (Siemens).

Die Stromstärke wird durch den Torsionswinkel φ einer elastischen Aufhängefeder bestimmt, indem man die abgelenkte bewegliche Rolle mittels eines Torsionskopfes auf Null zurückführt. Die Stromstärke i ist

$$i = C\sqrt{\varphi}.$$

Die Axe der beweglichen Rolle soll nordsüdlich stehen, damit der Erdmagnetismus nicht einwirkt. — Das Quecksilber der Zuleitungsnäpfe soll rein sein.

Über die Bestimmung bez. die Kontrole von C vgl. **69**.

III. Elektrodynamische Wage.

Gemessen wird die Kraft von einer festen auf eine lose, mit einer Wage verbundene Spule.

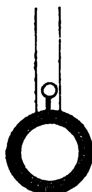
Wage von Lord Rayleigh. Eine flache, an einer Wage aufgehangene Spule befindet sich zwischen zwei gröfseren, einander gleichen und ebenfalls flachen Spulen in der Mitte. Die Axen der Spulen liegen in derselben Vertikalen. Der Abstand wird so regulirt, dafs die Kraft ein Maximum ist. In diesem Falle ist die Kraft auf die bewegliche Spule gleich dem Quadrate der Stromstärke multiplicirt mit den Windungszahlen der beiden Spulen und einem Faktor, welcher wesentlich aus dem Verhältnis der beiden Spulenhalbmesser berechnet wird. Man mifst durch Kommutiren des Stromes die doppelte Kraft an der Wage.

Wage von Helmholtz. Eine gröfsere Spule wirkt drehend auf eine, mit einem Wagebalken verbundene kleine Spule, deren Windungsfläche nach 83 bestimmt wird. Der Balken rollt auf Bändern, die zugleich den Strom zuleiten. Die Konstante des Instruments wird durch Vergleichung mit einer grofsen quadratischen Windung aus dünnem Blech, deren Wirkung auf die drehbare Spule man berechnen kann, empirisch bestimmt.

Eine andere Form bei Mascart, Exn. Rep. 19, 220. 1883; die obige Anordnung (in der Technik auch „Thomson'sche Wage" genannt) Rayleigh, Phil. Trans. 1884, II, S. 411; Heydweiller, Wied. Ann. 44, 533. 1891, wo auch eine Anordnung ohne Wage beschrieben wird; über die Helmholtz'sche Wage s. Kahle, Wied. Ann. Bd. 58. 1896.

67. Bifilargalvanometer (Weber).

Der Strom i geht durch einen an zwei Zuleitungsdrähten aufgehangenen Multiplikator mit nordsüdlicher Windungsebene; die Fadenebene ist ostwestlich zu denken. Ist f die Gesamtfläche der Windungen (83), so ist fi das magnetische Moment der Stromspule und der Erdmagnetismus H (59) bewirkt das Drehungsmoment fiH.



D sei die Direktionskraft der bifilaren Aufhängung (53). f, H und D seien in [C-G-S] gemessen. Einer Ablenkung α entspricht der Strom

$$i = D/(fH) \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ [C-G-S]}.$$

Absolute Strommessung mit Tangentenbussole und Bifilargalvanometer. Da H im Reduktionsfaktor der Tan-

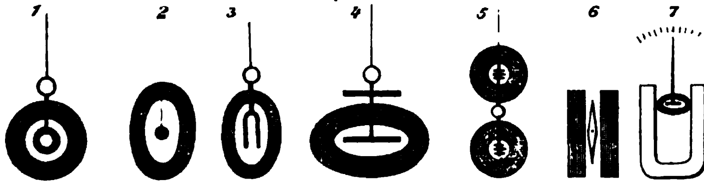
gentenbussole (64 II) im Zähler vorkommt, so läfst die gleichzeitige Anwendung beider Instrumente einen Strom ohne Kenntnis des Erdmagnetismus absolut messen. Vgl. **77b**.

Auch f fällt heraus, wenn man so verfährt: Die Tangentenbussole mit n Windungen vom Halbmesser R sei im Abstande a nördlich oder südlich vom Bifilargalvanometer aufgestellt. Die Nadel werde um Φ abgelenkt, wenn die Wirkungen des Stromes im Bifilar und der Tangentenbussole sich summiren, um φ dagegen, wenn der Strom in der Tangentenbussole allein gewendet wird. Dann erhält man i aus

$$i^2 = \frac{R^2 D}{8\pi^2 n^2 a^3} \frac{(\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi)^2}{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi} \operatorname{tg}\alpha.$$

Beweis einfach; vgl. **88**. Über einige Korrektionen s. **77b**.

67a. Formen der Strommesser.



1. **Galvanoskope mit Magnetnadeln.** Über den Gebrauch mit Spiegel und Skale (Fig. 1 bis 5) s. **66**. Die empfindlichsten Instrumente entstehen aus der Verbindung der Spiegelablesung mit einer in sich astatischen oder von aufsen astasirten Doppelnadel im Doppelmultiplikator (Fig. 5; Formen von Lord Kelvin, du Bois und Rubens, Paschen). Die gröfste erreichte „Normal"empfindlichkeit (S. 289) beträgt $7 \cdot 10^9$ mm/Am. Astatischen Systemen darf man, ohne eine Änderung der Empfindlichkeit befürchten zu müssen, keine starken Ströme zumuten.

Vollkommene innere Astasirung eines gewöhnlichen Nadelpaares ist schwer zu erreichen. Man hat vorgeschlagen, zwei vertikale Nadeln entgegengesetzt zu verbinden, dann entsteht die paarweise Gleichheit der Pole von selbst. Solche Nadeln kann man aber nur zwischen Multiplikatorhälften bringen; schwierig ist, dieselben genau parallel zu richten.

Will man den engen Multiplikator mit gröfserem Ausschlage benutzen, so mufs man das Instrument empirisch (**68**. **69**) graduiren. Eine einfache Funktion von dem Ausschlage ist die Stromstärke im allgemeinen nicht.

Über empfindliche Gestalten der Multiplikatoren siehe u. a. W. Weber, W. Thomson, Mather.

2. **Vertikal drehbare Nadeln** (Fig. 6). Solche stehen unter dem Einflusse des Erdmagnetismus und der Schwere. Die Konstanz der An-

gaben setzt also voraus, dafs der Nadelmagnetismus und die Lage des Schwerpunkts gegen die Drehungsaxe, im allgemeinen auch die Stellung gegen den Meridian ungeändert geblieben ist. Die Skale mufs also oft kontrolirt werden.

3. **Strommesser mit Richtkraft durch einen Magnet** (Fig. 7). Besonders zum Zwecke der Messung starker Ströme gibt man der Nadel eine stärkere Direktionskraft, als die erdmagnetische, durch geeignet genäherte Stahlmagnete. Die Angaben solcher Instrumente werden durch magnetische Störungen von aufsen weniger beeinflufst; sie ändern sich aber mit dem Magnetismus jener Magnete, s. auch **55a**.

4. **Strommesser mit weichem Eisen.** S. auch 5. und 6. Unveränderlich und für manche Messungen genügend genau sind die Instrumente, bei denen der Strom auf weiches Eisen in mannichfach ersonnener Weise zunächst magnetisirend und dann drehend oder ziehend wirkt. Für mäfsige Ströme sind die Kräfte beiläufig dem Quadrate der Stromstärke proportional und in Folge dessen die Ausschläge unbrauchbar klein. Wechselströme (S. 297) wirken auf solche Instrumente. Eine Graduirung für dieselben mufs die Wechselfrequenz berücksichtigen.

5. **Multiplikator mit weichem Eisendraht** (Bellati). Ein aufgehängter Eisendraht bilde mit der Windungsebene einen Winkel von etwa 45°. Ein Strom magnetisirt das Eisen und lenkt es infolge dessen zugleich ab. Die Ausschlagsrichtung ist von der Stromrichtung unabhängig, also kann man das Instrument für Wechselströme gebrauchen. Auch ein gewöhnliches Galvanometer mit schräg gestellter Nadel reagirt auf Wechselströme (Cheesman).

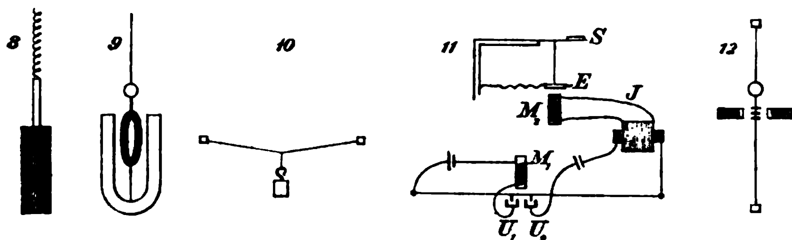
Vgl. Giltay, Wied. Ann. 25, 325. 1885.

6. **Feder-Stromwagen** (Fig. 8). Eine vertikale Spule zieht einen an einer elastischen Feder aufgehangenen Eisenkörper je nach der Stromstärke mehr oder weniger tief in sich hinein, Fig. 8. Die Elasticität von Stahlfedern ist sehr konstant. Die für schwächere Kräfte dienenden Neusilberfedern haben eine geringe elastische Nachwirkung. Die Graduirung des Instrumentes geschieht empirisch (**69**). Die Angaben sind sehr konstant, wenn man vor der Ablesung das Eisen tiefer in die Spule eintaucht, sonst bleiben dieselben bei ansteigender Stromstärke ein wenig hinter derselben zurück. Für schwache Ströme und Wechselströme gilt das unter 5 Gesagte. — Permanent magnetische Stahlnadeln sind auch für schwache Ströme geeignet. Nach längerem Nichtgebrauch magnetisirt man dieselben zuvörderst durch einen kräftigen Strom in der Spule.

7. **Drehbare Spule im Magnetfeld.** Die Windungen der nicht abgelenkten Spule sollen mit den Kraftlinien zusammenfallen. Ein Strom i erfährt dann ein ablenkendes Drehungsmoment $= i \cdot fH$, wenn f die Spulenfläche, H die Feldstärke bedeutet. Über die Anwendung des erdmagnetischen Feldes s. **67**.

Ein starkes Feld zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagnets liefert empfindliche Instrumente. Als Direktionskraft D der Spule dient

die Elasticität von Federn (Weston) oder von Aufhängedrähten, welche zugleich den Strom zuführen (Fig. 9). Dem kleinen mit Spiegel und Skale gemessenen Ausschlage α entspricht der Strom $i = \alpha \cdot D/(fH)$. Die Proportionalität mit dem Ausschlage besteht im allgemeinen nur innerhalb enger Grenzen. Konstante Empfindlichkeit setzt ferner Konstanz des Stahlmagnetismus voraus; sie hängt auch von der Vertikalstellung ab. Fehlerquellen bilden die elastische Nachwirkung und leicht auch eine nicht zuverlässige Klemmung des Aufhängedrahtes.



Als Vorzug kommt den Instrumenten eine geringe Abhängigkeit von äufseren magnetischen Störungen zu, um so geringer, je stärker das Magnetfeld ist.

Geschlossen erfährt die Spule durch die in ihr inducirten Ströme eine Dämpfung, deren Gröfse aber nicht konstant, sondern dem Gesamtwiderstande umgekehrt proportional ist (vgl. unten).

Ein starkes Feld und feindrähtige Aufhängung, die freilich einen kleinen inneren Widerstand des Instruments ausschliefst, geben grofse Empfindlichkeit (Deprez-d'Arsonval). Eine Grenze aber ist dadurch gesetzt, dafs die gleichzeitig gesteigerte Dämpfung bis zur Unbrauchbarkeit des Instrumentes wächst, indem das Erreichen der Gleichgewichtslage Stunden beanspruchen kann. Empfindlichkeit durch feindrähtige Aufhängung dämpft weniger, als solche durch grofse Feldstärke oder Windungsfläche, wie man leicht übersieht.

Nämlich bei sehr grofser Dämpfung, wo die Trägheit der Masse nicht mehr von Bedeutung ist, gilt (78) für den Abstand x von der Gleichgewichtslage zur Zeit t die Bewegungsgleichung $-\frac{dx}{dt} = D\frac{w}{q^2} \cdot x$, wo $q = f \cdot H$ und w der Leitungswiderstand ist. $D \cdot w/q^2$ stellt also die relative Annäherungs-Geschwindigkeit an den Gleichgewichtsstand dar, welche hiernach mit abnehmendem q quadratisch, mit steigendem D nur in erster Potenz wächst.

Z. B. bewirke der Strom $i = 10^{-8}$ Am $= 10^{-9}$ [C-G-S] bei dem Skalenabstande 2000 mm den auf den normalen Galvanometerwiderstand $w = 1$ Ohm $= 10^9$[C-G-S] berechneten (S. 289) Ausschlag 1 mm, d. h. $\alpha = 1/4000$, eine im Vergleich mit andern Galvanometern mäfsige Empfindlichkeit. Dann ist also $10^{-9} = \frac{1}{4000} \cdot D/(fH)$ oder $D/(fH) = 4 \cdot 10^{-6}$. Zur Aufhängung

diene ein 10 cm langer Silberdraht vom Durchmesser $2r=0{,}01$ cm. Der Torsionsmodul des Silbers ist (86) $[F]=29\cdot10^{10}$, also

$$D=\tfrac{1}{2}\pi[F]r^4/l=28\,[\text{C-G-S}].$$

Danach mufs fH oder $q=28/(4\cdot10^{-6})=7\cdot10^6$ sein, also $q^2=49\cdot10^{12}$. Die relative Annäherungsgeschwindigkeit wird also

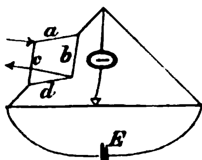
$$=D\cdot w/q^2=28\cdot10^9/(49\cdot10^{12})=1/(1800\ \text{sec})=1/(30\ \text{min}).$$

In 1 min nähert sich die Spule der Gleichgewichtslage um 1/30, sie gebraucht, um auf den halben Abstand zu kommen, etwa 20 min. Ein solches Instrument ist also, kurz geschlossen, unbrauchbar und verlangt einen äufsern, mehr als hundertmal gröfseren Widerstand, um brauchbar zu werden.

8. **Ballistische Galvanometer** (z. B. Fig. 4). Die Schwingungen sind hinreichend langsam, dafs Ausschläge der bewegten Nadel und Schwingungsdauern gemessen werden können. Über Aichung des Instruments s. **78a**; über Theorie **78**, über Anwendungen **78a**, **79**, **80**, **81**, **81a**, **81b**, **81c** II, **82** I u. II, **83a**, **85** 3, **86** III.

9. **Hitzdraht-Strommesser** (Cardew). Die durch einen Strom in einem Widerstande entwickelte Wärme ist dem Quadrat der Stromstärke proportional. In den Grenzen, innerhalb deren die abgegebene Wärmemenge dem Temperaturüberschusse über die Umgebung proportional und der Widerstand hinreichend konstant ist, mifst also die Temperaturerhöhung eines Drahtes das Quadrat der Stromstärke (wie bei dem Dynamometer). Die Erwärmung wird aus der Ausdehnung (Fig. 10), ev. durch eine Übertragung auf einen drehbaren Zeiger oder Spiegel, auch wohl thermoelektrisch, beurteilt. Für weitere Stromgrenzen wird empirisch geaicht. Als Leiter eignen sich Eisen, Nickel, reines Platin.

10. **Hitzdraht in der Doppelbrücke nach dem „Bolometerprincip"** (Paalzow und Rubens, Wied. Ann. 37, 529. 1889). In der grofsen Verzweigung, welche durch ein, einige Zeit zuvor geschlossenes, konstantes Element E gespeist wird, sind die Widerstände so abgeglichen (**71b**), dafs das Galvanoskop keinen Strom zeigt. Der zu messende, konstante oder Wechsel-Strom wird alsdann durch das Viereck $a\ b\ c\ d$ geschickt, in welchem $a:b=c:d$ (z. B. $a=b=c=d$) gemacht ist, damit die beiden Stromquellen sich gegenseitig nicht beeinflussen. Durch die Stromwärme ändert sich der Widerstand des Vierecks und das Galvanometer zeigt einen der Energie des zu messenden Stromes proportionalen Ausschlag.



Um von äufseren Änderungen ungestört zu bleiben, gestaltet man dem Viereck einen Nachbarzweig der grofsen Verzweigung kongruent und schliefst beide Zweige in dasselbe Kästchen ein.

Das Verfahren kann äufserst empfindlich gemacht werden und dient z. B. zur Beobachtung der Strahlungsenergie Hertz'scher elektrischer Wellen.

11. **Telephon.** Dasselbe reagirt auf hinreichend plötzliche Stromschwankungen, insbesondere auf Wechselströme. Hier wächst die Empfindlichkeit mit der Schwingungszahl N. Bei 40 Ohm Widerstand liefs sich noch wahrnehmen (Rayleigh)

für $N =$	150	250	350	450	550	$650 \cdot 1/\text{sec}$
der Strom	1400	90	22	9	6	$4 \cdot 10^{-8}$ Amp.

12. **Optisches Telephon,** Fig. 11 (M. Wien). Die vor dem Elektromagnet M_2 vibrirende Feder mit Eisenstückchen E bewegt den Spiegel S, in welchem das Bild eines Spaltes oder einer Glühlampe beobachtet wird, welches sich durch die Schwingung verbreitert. Die Anregung geschieht durch die inducirten Wechselströme des Inductoriums J, dessen primärer Strom durch den einen Quecksilber-Unterbrecher U_2 an einem gespannten Eisendraht fliefst, welcher Draht durch den Elektromagnet M_1 und den Selbstunterbrecher U_1 eines anderen Stromkreises in Schwingung versetzt wird. Dieses optische Telephon reagirt nur auf Anregungen, die mit der eigenen Schwingungsdauer übereinstimmen. Die Amplitude ist der erregenden Stromstärke ungefähr proportional. Die Abstimmung des Unterbrechers geschieht durch Längen- oder Spannungs-Änderung der Saite.

Das Rubens'sche „Vibrationsgalvanometer" (Fig. 12) benutzt ähnlich Torsionsschwingungen eines Drahtes mit Spiegelchen, die durch eiserne Querstäbchen zwischen 4 Polen von Elektromagneten angeregt werden. Bei 300 Ohm Widerstand sind Ströme von der mittleren Stärke $3 \cdot 10^{-9}$ Am noch wahrnehmbar. Die Abstimmung geschieht durch Änderung der Länge oder Belastung des Drahtes.

M. Wien, Wied. Ann. 42, 593; 44, 681. 1891. Rubens, ib. 56, 27. 1895.

68. Strommessung mit dem Voltameter (Faraday).

Die mit einem Voltameter gemessenen chemischen Zersetzungsprodukte eines Stromes lassen die Stromstärke nach einem genau definirten und mit dem vorigen vergleichbaren Mafse mit Hilfe der folgenden Sätze bestimmen.

1. Die durch verschiedene Ströme in derselben Zeit zersetzten Mengen sind der Stromstärke proportional.

2. Die Zersetzungsprodukte eines und desselben Stromes in verschiedenen Elektrolyten sind einander chemisch äquivalent. (Faraday-sches Gesetz.)

3. Der Strom 1 Am oder $0{,}1\,\text{cm}^{\frac{1}{2}}\,\text{g}^{\frac{1}{2}}\,\text{sec}^{-1}$ zersetzt oder scheidet aus

	Silber	Kupfer	Wasser	
in 1 Sekunde	1,118 mg	0,3284 mg	0,0933 mg	0,1740 ccm Knallgas 0° und 760 mm
in 1 Minute	67,1 mg	19,70 mg	5,59 mg	10,44 ccm Knallgas 0° und 760 mm

Diese Menge, das elektrochemische Äquivalent (Weber) eines Stoffes für 1 Am, soll A heifsen.

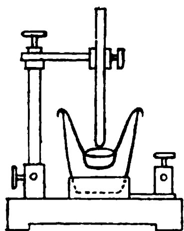
Der zu messende Strom i gehe während einer Zeit τ durch

die Flüssigkeit; die dadurch zersetzte oder ausgeschiedene Menge sei m. Dann ist die Stromstärke

$$i = \frac{1}{A}\frac{m}{\tau}\,\text{Am oder} = \frac{1}{10A}\frac{m}{\tau}\,\text{cm}^{\frac{1}{2}}\text{g}^{\frac{1}{2}}/\text{sec}.$$

I. Silber-Voltameter.

15- bis 30procentige Lösung von Silbernitrat (Höllenstein) vom spec. Gew. 1,15 bis 1,35 mit einer Anode aus Silber. Gewogen wird der Niederschlag an der Kathode. Bequeme Form ist ein Silber- oder Platintiegel als Kathode (Poggendorff); ein Stift aus reinem Silber bildet die Anode. Gegen Herabfallen von Teilen der Anode schützt am besten ein eingehängtes Glasschälchen. Der Niederschlag wird mit heißem destillirten Wasser gewaschen, bis keine Reaktion des erkalteten Waschwassers auf Salzsäure erfolgt, warm getrocknet und etwa 10 min nach dem Erkalten gewogen. Starker Strom gibt leicht Silberfäden, welche nach der Anode durchwachsen und die Messung verderben.



Im Vacuum pflegt man etwa 1/1000 Silber mehr zu erhalten als in der Luft (A. Schuster u. Crossley, Proc. Roy. Soc. 50, 344. 1892; Myers, Wied. Ann. 55, 288. 1895).

II. Kupfer-Voltameter.

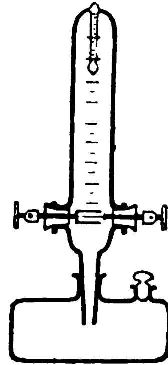
Fast gesättigte Lösung von reinem Kupfersulfat in destillirtem Wasser: etwa 1 g krystallisirtes Salz in 3 ccm Wasser gelöst; spec. Gewicht ungefähr = 1,16. Anode aus reinem Kupfer; Kathode Kupfer oder Platin. Gemessen wird ebenfalls die Gewichtszunahme der Kathode, welche abgespült und rasch zwischen Fließpapier und dann wenn möglich unter der Luftpumpe oder im Exsikkator getrocknet wird.

Der Stromstärke muſs die Gröſse der Elektroden angemessen sein. Damit der Niederschlag fest haftet, darf die Stromstärke nicht mehr als etwa 1 Am auf 25 cm² der Kathode betragen. Bei schwachem Strome können im Gegenteil groſse Elektroden Fehler veranlassen. Die meistens etwas sauere Kupferlösung bewirkt nämlich durch Auflösung einen der Zeit proportionalen, oft recht merklichen Verlust der Elektroden.

Vgl. hierüber Gray, Phil. Mag. 25, 179. 1888; Vanni, Wied. Ann. 44, 214. 1891, wo auch ein Recept für einwandsfreie Kupferlösungen gegeben wird.

III. Wasser-Voltameter.

10- bis 20procentige reine Schwefelsäurelösung (1,07 bis 1,14 spec. Gew.) wird zwischen blanken Platinelektroden zersetzt.



Bei starkem Strome mifst man das entwickelte Knallgas als Ganzes. Mit dicht aneinander stehenden Elektroden von etwa je 15 cm² wirksamer Fläche können so Ströme bis 40 Am noch ohne lästige Erwärmungen gemessen werden. Das neben gezeichnete Instrument wird nach dem Gebrauch (während dessen der kleine Stöpsel zu entfernen ist!) durch Umkehren wieder gefüllt. Die Elektroden sind in Wirklichkeit gegen die Stellung der Figur um 90° zu drehen. Das Knallgas soll nicht so weit entwickelt werden, dafs Stromunterbrechung eintritt, weil sonst durch einen Funken Explosion entstehen kann.

Das bei der Temperatur t unter dem Drucke p_0 mm Hg von 0° gemessene Volumen v wird auf 0° und 760 mm reducirt nach der Formel (Tab. 7)

$$m = \frac{v}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{p_0}{760}.$$

Um den Druck p_0 des trockenen Knallgases zu finden, mufs von dem Barometerstand b (20) erstens der Druck der Schwefelsäure-Höhe über der äufseren Oberfläche abgerechnet werden. Jene Höhe sei $=h$ und die Dichtigkeit der Säure $=s$. Dann ist also von b abzurechnen $hs/13{,}6$.

Zweitens ist abzurechnen die Spannkraft des Wasserdampfs im Knallgase. Wäre dieses aus Wasser entwickelt, so würde die Spannkraft e zur Temperatur t aus Tab. 13 entnommen werden. Über der Schwefelsäure ist die Spannkraft kleiner $=k \cdot e$, wo k ein echter Bruch ist. Es ist für

0%	18	27	33% H_2SO_4
$k=$ 1,0	0,9	0,8	0,7.

Der Druck des trockenen Gases ist also
$p_0 = b - hs/13{,}6 - k \cdot e$ oder praktisch nahe $p_0 = b - h/12 - 0{,}9 \cdot e$.

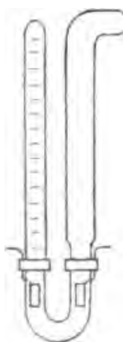
Bequeme Tabelle für 15- bis 20proc. Schwefelsäure. Die von dem Strom 1 Am entwickelte Menge feucht gemessenen Knallgases ist unter den gewöhnlichen Versuchsverhältnissen nicht weit von $\frac{1}{5}$ ccm/sec. Die folgende Tabelle gibt für verschiedene Drucke p und Temperaturen t die Korrektion, welche man an dem gemessenen Volumen anbringen mufs, um mit dem korrigirten Volumen v_0 nachher genau rechnen zu können:

$$i = 5{,}0 \cdot \frac{v_0}{\tau} \text{ Am.}$$

Man hat zu dem Zweck zu jedem beobachteten cm³ so viele Tausendtel zu addiren, bez. wenn negativ zu subtrahiren, wie die Tabelle zu t und p angibt. p ist dabei der beobachtete Gesamtdruck des Gasvolumens, d. h. $p = b - h/12$ (s. oben).

t	$p = 700$	710	720	730	740	750	760 mm
10°	+ 9	+ 24	+ 38	+ 53	+ 68	+ 82	+ 97
15°	− 13	+ 2	+ 16	+ 30	+ 44	+ 59	+ 73
20°	− 35	− 21	− 7	+ 7	+ 21	+ 35	+ 49
25°	− 58	− 45	− 31	− 17	− 4	+ 10	+ 24

F. K., Elektrotechn. Z. S. 1885, S. 190.



Bei schwachen Strömen ist, weil der Sauerstoff infolge von Ozonbildung teilweise vom Wasser absorbirt wird, nur das entwickelte Wasserstoffgas aufzufangen und durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$ das Volumen des Knallgases zu berechnen. Das neben gezeichnete Voltameter läfst den geteilten Schenkel durch blofses Umkehren wieder mit der Flüssigkeit anfüllen.

Da die Polarisation Wasserstoff-Sauerstoff auf Platin fast 3 Volt beträgt, so verlangt die Zersetzung mindestens 3 Daniell- oder 2 Bunsen-Elemente oder 2 Akkumulatoren.

Beispiel. $v = 198$ cm³ Knallgas in $\tau = 117$ sec bei $t = 17{,}8°$ und $b = 754$ mm. Flüssigkeitssäule (20% H_2SO_4) unter dem Gase $h = 112$ mm. Also Druck des feuchten Gases $p = 754 - 112/12 = 745$ mm. Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei 17,8° (Tab. 13) $e = 15{,}1$, also Druck des trockenen Gases $p_0 = 745 - 0{,}88 \cdot 15{,}1 = 732$ mm. Das auf 0° u. 760 mm reducirte Volumen trockenen Knallgases also

$$m = \frac{198}{1+0{,}00367\cdot 17{,}8}\,\frac{732}{760} = 179{,}0 \text{ ccm}$$

und

$$i = \frac{1}{0{,}1740}\,\frac{179{,}0}{117} = 8{,}79 \text{ Am} = 0{,}879\,[\text{C-G-S}].$$

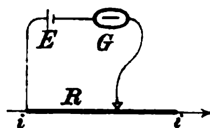
Oder: Die Tabelle gibt für $p = 745$ mm bei $15^0 = +51$, bei $20^0 = +28$, also bei $17^0{,}8 = +38$. Also

$$v_0 = 198\cdot 1{,}038 = 205{,}5,\quad \text{und}\quad i = 5\cdot 205{,}5/117 = 8{,}78 \text{ Am}.$$

68a. Strommessung mit Rheostat und Normal-Element (Kompensationsmethode).

Vgl. auch die verwandte Methode am Schlufs von 76a.

I. Der zu messende Strom i durchfliefse einen blanken Draht, dessen Widerstand/Längeneinheit bekannt ist, mit Schleifkontakt oder einen Rheostaten, von welchem man abzweigen kann. In dem Zweige befinden sich das Galvanoskop G und ein (oder mehrere) Element von bekannter Spannung E, die Richtung von E der Stromrichtung entgegengeschaltet. Man wählt den Widerstand R der Strecke, von welcher abgezweigt wird, so, dafs der Strom in G verschwindet. Dann ist



$$i = E/R.$$

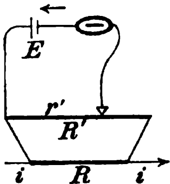
Folgt aus der zweiten Kirchhoff'schen Regel S. 282.

Für E kann ein Akkumulator, ein Daniell-, Clark- oder Cadmium-Element dienen; s. S. 283 bis 285 deren Spannungen. E in Volt, R in Ohm gibt i in Ampere.

Ein Stöpselrheostat läfst sich im allgemeinen nicht verwenden, ohne dafs durch die Herstellung des richtigen R der Gesamtwiderstand, und damit i selbst geändert wird. Nur wenn in der unverzweigten Leitung bereits ein sehr grofser Widerstand liegt, werden die Änderungen aufser Betracht bleiben können. Ein zweiter Rheostat in der unverzweigten Leitung läfst dies vermeiden. Man schaltet in diesem ebenso viel Widerstand aus bez. ein, wie man zur Herstellung des richtigen R gleichzeitig ein- bez. ausschalten mufs.

Über einen Kompensationsapparat s. Feufsner, Z. S. f. Instr. 1890. 1; Raps, ib. 1895, 215.

II. Nebenschaltung. Besonders für starke Ströme kann die folgende Anordnung zweckmäfsig sein. An einen bekannten Widerstand R der Hauptleitung, welcher nur so grofs zu sein braucht, dafs $Ri > E$ (also wenn E ein Clark-Element für $i = 100$ Am z. B. $R = 0{,}02$ Ohm), wird eine Abzweigung zu einem Rheostaten gelegt. Der Übergangswiderstand mufs nur klein sein gegen den Gesamtwiderstand der Abzweigung. Der letztere heifse R', während r' derjenige Widerstand ist, von welchem man in dem Zweige wieder zu Element und Galvanoskop abzweigen mufs, um hier den Strom Null zu erhalten. Dann ist $i = E(R+R')/(Rr')$.

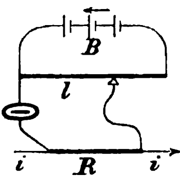


Folgt aus $(i-i')R = i'R'$ und $i'r' = E$, wenn i' der Strom in der Abzweigung.

Wenn R' grofs gegen R, so wird durch Stöpseln in R' der Strom i wenig geändert.

III. Übertragung. Irgend eine konstante Säule B (Akkumulatoren) wird durch einen konstanten Widerstand mit Schleifkontakt geschlossen. An diesen Strom legt man zunächst ein Normalelement (E) und ein Galvanoskop so an, dafs der Zweig stromlos ist; die Drahtlänge zwischen den Abzweigungspunkten sei für diesen Fall $= l_0$, also E/l_0 das Potentialgefälle auf dem Draht. Das Normalelement wird nun entfernt.

Nunmehr kann derselbe Draht mit dem Strome seiner Hilfsbatterie B, dessen Konstanz nötigenfalls mit irgend einem Strommesser geprüft werden kann, zur Messung eines anderen Stromes i gebraucht werden. Von einem bekannten Widerstande R in der Leitung des letzteren zweigt man nämlich durch das Galvanoskop und ein solches Stück l des Rheostatendrahtes ab, dafs der Strom im Galvanoskop verschwindet (Fig.). Dann hat man offenbar



$$i = \frac{E}{l_0} \cdot \frac{l}{R}.$$

Fehlerquellen zu I, II u. III. Fehler können erstens aus der Stromwärme entstehen. Zweitens wird das Element E während des Ausprobirens der Widerstände von Strömen durchflossen, die, wenn sie nicht sehr schwach sind, die el. Kraft E

eines Clark-Elementes beeinträchtigen können. Es ist also zu empfehlen, während des groben Ausprobirens einen grofsen Widerstand zu E zu schalten (s. Figur und Bemerkung S. 288), den man vor der letzten Abgleichung entfernt.

69. Vergleichung und absolute Bestimmung von Galvanometerkonstanten und Graduirung eines Strommessers.

Über die sog. Normal-Empfindlichkeit von Spiegelbussolen vgl. 68 am Schlufs.

Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors.

Das Gesetz für den Ausschlag α eines Galvanometers oder Dynamometers etc. sei bekannt, also z. B. die Stromstärke

$$i = C \cdot \alpha \quad \text{oder} \quad C \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad C \cdot \sin \alpha \quad \text{oder} \quad C \cdot \sqrt{\alpha} \quad \text{etc.}$$

Der Reduktionsfaktor C aber lasse sich nicht berechnen; dann bestimmt man denselben empirisch auf einem der folgenden Wege.

I. Mit einem Normalgalvanometer.

Diese Methoden umfassen auch die Aufgabe, zwei Galvanometerkonstanten mit einander zu vergleichen.

a) In gewöhnlicher Schaltung. Das Instrument von unbekanntem Reduktionsfaktor C wird mit einem solchen von bekanntem Reduktionsfaktor C_1 in denselben Stromkreis hintergeschaltet. Ergibt das letztere die Stromstärke i, das andere den Ausschlag α, so ist, je nach dem Instrument,

$$C = \frac{i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Galvanometer-Anzeigen können Winkel, Skalenausschläge, auch Gewichte bedeuten, aber auch Funktionen wie tangens, sinus, Wurzel eines Ausschlags etc. Zur Abkürzung denken wir uns im Folgenden diese Funktion in α etc. schon enthalten. In diesem Sinne kann man also sagen: sind α und α_1 die Ausschläge etc. beider Galvanometer, so ist

$$C : C_1 = \alpha_1 : \alpha.$$

b) Durch successive Einschaltung; nur für empfindliche Galvanometer genau und bequem. Es werde dieselbe konstante Säule folgeweise durch das eine und das andere Instrument geschlossen. Die beiden Gesamtwiderstände seien W und W_1 etc. Dann ist $C : C_1 = \alpha_1 W_1 : \alpha W$.

c) Mit Abzweigung; für Instrumente von sehr ungleicher Empfindlichkeit. Die Instrumente werden hintergeschaltet, das empfindlichere aber mit einer Abzweigung z (64a) versehen, während seine eigene Leitung den Widerstand γ habe. Es ist

$$C : C_1 = \alpha_1 : (\alpha(\gamma + z)/z).$$

d) Im Nebenschlufs. Ein Strom werde durch beide Galvanometer nebeneinander verzweigt, nötigenfalls unter Einschaltung von Rheostatenwiderständen. Die Gesamtwiderstände der Zweige seien w und w_1 u. s. w. Es ist

$$C : C_1 = \alpha_1 w_1 : \alpha w.$$

Meistens empfiehlt sich die Anwendung von Kommutatoren, besonders auch, um Wechselwirkungen der Galvanometer zu eliminiren.

e) Zwei Windungslagen I und II desselben Instruments reducirt man auf einander, indem man denselben Strom durch beide hintereinander schickt: erstens gleichsinnig, Ausschlag $= \alpha$; alsdann II kommutirt, Ausschlag $= \alpha'$. Es ist dann $\alpha : \alpha' = (C_1 + C_2) : (C_1 - C_2)$, also

$$C_1 : C_2 = (\alpha + \alpha') : (\alpha - \alpha').$$

II. Mit dem Voltameter.

Man läfst einen Strom durch das Galvanometer und ein Voltameter eine gemessene Zeit lang hindurchgehen. Der Ausschlag sei α; die Stromstärke i im Voltameter findet sich nach 68. Dann ist der Reduktionsfaktor je nach der Natur des Galvanometers $C = i/\mathrm{tg}\,\alpha$ oder $C = i/\alpha$ u. s. w.

Da ein Strom, besonders bei eingeschaltetem Voltameter, selten ganz konstant bleibt, so beobachtet man die Nadel z. B. von Minute zu Minute, und nimmt schliefslich das Mittel aus den α oder $\mathrm{tg}\,\alpha$ u. s. w. Über Abzweigung am Galvanometer (nicht am Voltameter!) s. I c. Kommt der Erdmagnetismus ins Spiel, so schützt ein Kommutator (63 III) vor den Fehlern aus der Nullpunktsverschiebung.

III. Mit einer bekannten elektromotorischen Kraft.

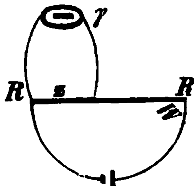
1. Direkt. Für einen empfindlichen Strommesser hat man ein oft genügendes sehr einfaches Verfahren, indem man denselben mit einer Säule von bekannter elektromotorischer Kraft

(63 II) (Daniell, Akkumulator, für die allerempfindlichsten Instrumente auch Clark) und mit einem bekannten grofsen Widerstande zum Strome schliefst. Beträgt die Kraft E Volt, der Gesamtwiderstand w Ohm, so ist die Stromstärke

$$i = E/w \text{ Am und dann wieder } C = i/\alpha \quad \text{u. s. w.}$$

w ist also der eingeschaltete Widerstand + Galvanometer + Säule. Der letztere kann bei sehr empfindlichen Galvanometern oft vernachlässigt werden.

Stehen keine ausreichend grofsen Widerstände zur Verfügung, so legt man das Galvanometer an einen Nebenschlufs. z sei der Widerstand des letzteren, W der Gesamtwiderstand der Leitung ohne den Galvanometerzweig, welcher selbst den Widerstand γ habe, dann ist (63 II)



$$i = E \cdot z/(W\gamma + Wz - z^2).$$

2. **Mit Kompensation.** Wie man eine Stromstärke mit einer bekannten el. Kraft mifst, ist in **68a** gezeigt. Der zu untersuchende Strommesser wird mit einer geeigneten Batterie, und eventuell einem Rheostaten zur Regulirung, in die Stromleitung i gesetzt; Fig. S. 307. Mit zuverlässigen Elementen und mit Umsicht angewendet ist die Methode sehr brauchbar.

Über die ballistische Konstante eines Strommessers s. **78a.**

Graduirung eines Strommessers.[1])

Für die meisten der in **67a** genannten Strommesser mufs die ganze Skale empirisch hergestellt werden. Man schaltet zu diesem Zwecke das Instrument nach I mit einem Normalgalvanometer oder nach III mit einem Normalelement in denselben Stromkreis und beobachtet eine Anzahl von Einstellungen bei verschiedenen Stromstärken, etwa mit Anwendung einer vorläufigen Grad- oder mm-Teilung, und interpolirt daraus die Teilstriche für runde Stromstärken. Eine graphische Darstellung der gemachten Beobachtungen auf Koordinatenpapier, die Stromstärke als Abscisse, die Einstellung als Ordinate genommen,

1) Strommesser von geeigneter Beschaffenheit werden von der Physik.-Techn. Reichsanstalt geprüft.

wird hier am dienlichsten sein. Durch die eingetragenen Punkte zieht man eine Kurve, aus welcher die anzubringende Skale entnommen wird.

Über Graduirung von Spiegel-Galvanometern s. **66.**

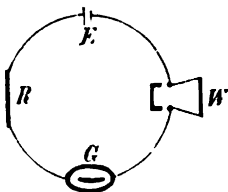
70. Widerstandsbestimmung durch Vertauschung.

Über Widerstands-Einheiten und Rheostaten s. **63** I und IV, über sichere Verbindungen **68** III. — Über Messung sehr großer Widerstände vgl. **86 b.**

Widerstände auf ihre Gleichheit zu prüfen, wird verlangt sowohl bei der Kopierung eines Widerstandes, als auch bei der Bestimmung eines unbekannten Widerstandes mittels eines Satzes von bekannten Widerständen. Wir nehmen diese letztere Aufgabe an.

Widerstände sind gleich, wenn sie, einzeln in denselben Stromkreis eingeschaltet, dieselbe Stromstärke geben.

Man stellt also einen Stromkreis her, bestehend aus der galvanischen Säule E, dem Galvanoskop G, dem Rheostaten R. Der zu bestimmende Widerstand W ist in der Zeichnung eingeschaltet, kann aber, etwa durch Herstellung einer widerstandsfreien Nebenschließung (die gewöhnlichen Stromschlüssel sind oft unzuverlässig), ausgeschaltet werden. Zuerst wird die Einstellung der Galvanoskopnadel beobachtet, während W eingeschaltet, der Rheostat aber gestöpselt, d. h. ausgeschaltet ist. Dann wird W ausgeschaltet; die Menge Rheostatenwiderstand, welche statt dessen eingeschaltet werden muß, um die Nadel auf dieselbe Einstellung zurückzuführen, ist gleich dem gesuchten Widerstand W.



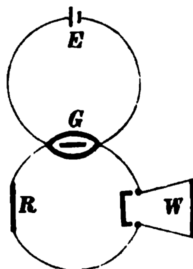
Wenn der Rheostat nicht Widerstände in beliebig kleinen Intervallen herzustellen erlaubt, sondern nur sprungweise verschiedene, so interpolirt man (5). Man beobachtet die Nadeleinstellungen bei dem nächst kleineren und dem nächst größeren Widerstand des Rheostaten. Sind die Unterschiede klein, so kann man Proportionalität zwischen Vergrößerung des Widerstandes und Verringerung des Ausschlages annehmen. Ist also die Einstellung der Nadel beobachtet

α bei dem gesuchten Widerstand W,
α_1 und α_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2,
so ist $$W = R_1 + (R_2 - R_1)(\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Beispiel. Eingeschaltet W $R_1 = 14$ $R_2 = 15$ Ohm
Nadeleinstellung $\alpha = 45{,}3$ $\alpha_1 = 47{,}9$ $\alpha_2 = 44{,}5$
Dann ist $W = 14 + 2{,}6/3{,}4 = 14{,}76$ Ohm.

Die Methode gibt bei nicht zu kleinen Widerständen eine mäfsige Genauigkeit. Verlangt wird eine konstante Säule (Daniell, Akkumulator). Kleine Veränderungen derselben lassen sich durch passende Wiederholung der Beobachtung und Mittelnehmen eliminiren, werden auch durch rasche Beobachtung verringert.

Wenn der zu messende Widerstand klein ist, so schlägt die Nadel vielleicht über die Teilung hinaus. Man kann dies verhindern, indem man einen anderen Widerstand konstant als Ballast einschaltet. Die Messung wird aber hierdurch unempfindlicher. Besser ist es deswegen, die Ausschläge durch einen konstant hingelegten Magnet zu verringern. Oder, was das beste ist, man verschafft sich eine angemessen kleinere el. Kraft nach Fig. S. 285.



Zweigschaltung. Endlich kann es, besonders bei kleinen zu messenden Widerständen, auch vorteilhaft sein, das Galvanometer G und den zu bestimmenden Widerstand W bez. Rheostaten R in verschiedene Zweige des Stromes einzuschalten. Die Gleichheit des Ausschlages zeigt wie oben die Gleichheit der ausgewechselten Widerstände an.

Über die Berechnung des specifischen Widerstandes oder Leitvermögens s. 63, 1.

71. Widerstandsbestimmung durch Strommessung.

I. Direkte Methode (Ohm).

Man schliefst eine Säule durch ein Galvanometer, nötigenfalls unter Zufügung eines Widerstands-Ballastes; die Stromstärke sei $= J$. Der zu bestimmende Widerstand W wird zugeschaltet; die Stromstärke sei i_0. Statt seiner wird ein bekannter Widerstand R eingeschaltet; die Stromstärke sei i. Dann ist

$$W = R\frac{J-i_0}{J-i}\,\frac{i}{i_0}.$$

Für J, i, i_0 werden die Ausschlagswinkel bez. deren Tangenten, Sinus u. s. w. gesetzt.

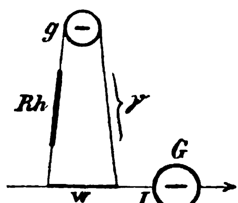
Die Methode liefert wegen der Inkonstanz der Elemente nur bei nicht zu kleinen Widerständen gute Resultate. Sind die zu vergleichenden Widerstände sehr grofs, so kann unter Umständen der übrige Widerstand vernachlässigt werden; dann fällt J weg und es ist einfach $W = R\cdot i/i_0$.

II. Abzweigungsmethoden.

Solche Methoden sind u. A. von Bedeutung, um Widerstände von Leitern zu bestimmen, die durch den Strom beeinflufst werden, z. B. von elektrischen Lampen, während sie leuchten.

Ferner sind dieselben wertvoll bei der Vergleichung kleiner Widerstände. Die Abzweigungen von den letzteren sind nach S. 286 einzurichten.

1. Man leitet einen konstanten Strom durch ein Galvanometer G (Tangentenbussole) und den zu messenden Widerstand hinter einander. An die Enden des letzteren wird eine Ableitung durch ein empfindliches Galvanometer g (Spiegelgalvanometer), dessen Reduktionsfaktor mit dem des Hauptgalvanometers verglichen ist, und durch einen zugefügten grofsen Rheostatenwiderstand gelegt. γ sei der bekannte Gesamtwiderstand dieser Ableitung, J sei die Stärke des Stammstromes, i diejenige in der Ableitung. Dann ist der gesuchte Widerstand



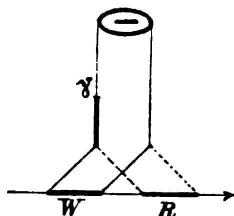
$$W = \gamma i/(J-i).$$

Unbequem ist hier die Vergleichung der beiden Galvanometer mit einander; vorteilhaft für manche Zwecke, z. B. für die Widerstandsbestimmung von Glühlampen, welche man doch mit starkem Strom ausführen mufs, ist, dafs der Vergleichswiderstand γ keinen starken Strom bekommt.

2. Die obige Ableitung enthalte einen Spannungsmesser (76a, 77) vom Widerstande γ Ohm und zeige die Spannung P Volt. Die Stärke des Stammstromes betrage J Am. Dann ist

der gesuchte Widerstand gleich $\frac{P}{J - P/\gamma}$ Ohm. Diese Methode unterscheidet sich von Nr. 1 eigentlich nur durch den Namen Spannungsmesser.

3. Sehr oft und gut brauchbar ist das folgende Verfahren. Die zu vergleichenden Widerstände W und R werden in denselben konstanten Stromkreis hinter einander geschaltet. Man legt erst an die Endpunkte des einen, dann an die des anderen Widerstandes eine Ableitung mit sehr grofsem Widerstande durch ein empfindliches Galvanometer oder einen Spannungsmesser an. Vorausgesetzt, dafs die beiden zu vergleichenden Widerstände sehr klein sind gegen den Widerstand γ der Zweigleitung, so verhalten sie sich zu einander direkt wie die zugehörigen Stromstärken i_w und i_r oder Spannungen in den angelegten Ableitungen. Im anderen Falle hat man hinreichend genau



$$\frac{W}{R} = \frac{i_w}{i_r}\left(1 + \frac{R}{\gamma}\,\frac{i_w - i_r}{i_r}\right).$$

Zweckmäfsig ist die Anwendung eines Kommutators am Galvanometer, oder auch an der ganzen Leitung; aber das letztere nur, wenn man sicher ist, dafs die Galvanometernadel keine Fernwirkung von dem Hauptstrom erfährt.

Elektrometrische Methoden siehe 84 sowie 86a.

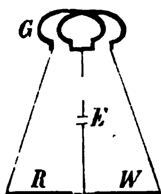
Obige Gleichungen werden durch die Ohm-Kirchhoff'schen Gesetze (68 I) bewiesen.

71a. Differentialgalvanometer.

I. Abgleichung von Widerständen.

Zwei Widerstände sind gleich, wenn sie, als Zweig-Leitungen neben einander in einen Stromkreis eingeschaltet, den Strom in zwei gleiche Teile spalten.

Die Gleichheit zweier Ströme wird mittels des Differentialmultiplikators (Becquerel) untersucht, welcher aus zwei gleich langen, mit einander aufgewundenen Drähten besteht. Leitet man durch den einen Draht einen Strom, durch den zweiten



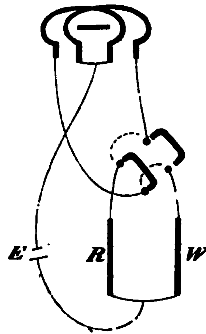
Draht den anderen Strom in entgegengesetzter Richtung, so bleibt die Nadel in Ruhe, wenn die Ströme gleich sind.

Die Verbindungen zum Zwecke der Widerstandsbestimmung zeigt die Figur. Bei *G* sind schematisch die beiden Windungen des Galvanometers mit ihren Endpunkten angegeben (welche letztere auch anders angeordnet sein können, was man ausprobiren mufs). In die beiden mittleren Enden verzweigt sich der Strom der Säule *E*, so dafs die Zweigströme die Windungen in entgegengesetzter Richtung durchfliefsen. Von den anderen Enden aus ist der eine Zweigstrom durch den zu bestimmenden Widerstand *W*, der andere durch den Rheostaten *R* geführt, worauf beide sich am anderen Pol der Säule wieder vereinigen. Die Verbindungsdrähte nach *W* und diejenigen nach *R* wählt man von gleichem Widerstande.

Der Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten mufs, um die Galvanometernadel auf ihre Ruhelage zu bringen, ist gleich dem Widerstande *W*, wobei auch das Interpolationsverfahren von S. 312 in Anwendung kommen kann.

Prüfung des Differentialgalvanometers (Bosscha). 1) Die Bedingung, dafs die Ströme gleich sind, wenn die Nadel keinen Ausschlag gibt, prüft man, indem man denselben Strom durch beide Windungen in entgegengesetzter Richtung leitet, d. h. (von links nach rechts gezählt) die Drahtenden Nr. 1 und 2 mit einander, 3 und 4 je mit einem Pole der Säule verbindet. Die Nadel mufs dann ruhig bleiben. 2) Dafs der Widerstand der beiden Windungen gleich ist, konstatirt man nach der vorigen Prüfung dadurch, dafs man den Strom einer Säule sich nach dem in der Figur (oben) gegebenen Schema, aber ohne die Einschaltung von Widerständen, nur durch die beiden Windungen verzweigen läfst. Die Nadel mufs wieder in Ruhe bleiben. Eine Berichtigung des Instrumentes mittels Hinzufügens ad 1) von Windungen, ad 2) von Widerständen ist in der angegebenen Reihenfolge zu machen.

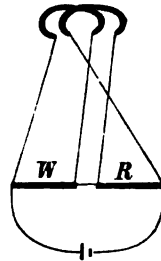
Kommutator. Von der genauen Erfüllung dieser Anforderungen macht ein Kommutator unabhängig, welcher



W und R mit einander vertauschen läfst. W und R sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung die Einstellung der Nadel sich nicht ändert. Oder auch: Ist R ein Rheostat, und findet man, dafs die Nadel ruhig bleibt, wenn R_1 eingeschaltet ist, bei umgelegtem Kommutator aber R_2, so ist

$$W = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

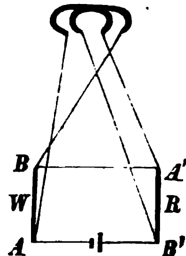
Vorteile der Methode sind ihre Empfindlichkeit und die Unabhängigkeit von der Konstanz eines Elementes.



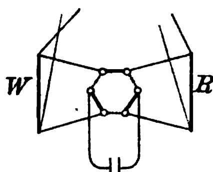
Differentialmultiplikator im Nebenschlufs. Wenn der zu messende Widerstand kleiner ist als der Widerstand in einem Zweige des Multiplikators, so erreicht man eine gröfsere Empfindlichkeit durch folgende Anordnung. Man schaltet W und R nicht neben, sondern hinter einander in den Strom einer Säule. Die beiden Multiplikatorzweige werden als Nebenschliefsungen eingeschaltet, aber so, dafs der Strom sie entgegengesetzt durchläuft (Heaviside).

Kleine Widerstände werden am einfachsten abgeglichen, indem man neben den gröfseren von ihnen (W) einen Widerstand (γ) schaltet. Beide zusammen bedeuten dann $W \cdot \gamma / (\gamma + W)$. Gerade für kleine Widerstände ist die Messung mit dem Diff.-Multiplikator im Nebenschlufs nützlich, da Übergangswiderstände durch die Anwendung von Multiplikatoren von erheblichem Widerstande unwirksam werden (Kirchhoff).

Übergreifender Nebenschlufs (F. K.). Man eliminirt Übergangswiderstände völlig, wenn man in der vorigen Figur die beiden mittleren Ableitungen mit einander vertauscht, so dafs jeder Multiplikator mit beiden Widerständen verbunden ist. Man finde, dafs kein Ausschlag entsteht, wenn W und R_1 eingeschaltet ist. Nun werde, etwa mittels eines geeigneten Kommutators, die Stromquelle aus der Verbindung AB' in BA' gesetzt, ohne sonst etwas an den Verbindungen zu ändern. Der



Ausschlag werde jetzt Null, wenn W und R_2 eingeschaltet werden, so ist $W = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.



Zum Auswechseln dient ein sechsnäpfiger Kommutator, dessen Quecksilbernäpfe durch drei Kupferbügel paarweise verbunden werden, entweder so, wie die ausgezogenen oder so, wie die punktirten Linien angeben.

Auch kleine Fehler des Differentialgalvanometers fallen mit heraus. Man kann Stücke von 0,01 Ohm leicht bis auf $^1/_{10000}$ ihres Betrages vergleichen.

Über die Bewirkung der kleinen Abänderungen an R durch Nebenschaltung vgl. v. S. und **63** IV.

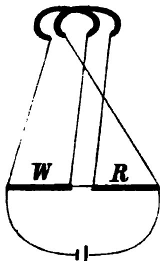
F. K., Wied. Ann. 20, 76. 1883; Exner's Rep. 19, 594. 1883.

Differential-Induktor. Eine Induktionsspule (**81**) bestehe aus zwei gleichen mit einander aufgewundenen Drähten. Mit zwei einander entgegengerichteten Enden beider Drähte wird der eine Pol eines Spiegelgalvanometers verbunden, der andere mit den zwei zu vergleichenden Widerständen. Von den anderen Enden der letzteren werden Verbindungen zu den noch nicht benutzten Induktor-Drahtenden geführt. Sind die beiden Widerstände gleich, so erfährt die Nadel keine Einwirkung durch einen Induktionsstofs.

Aufgespulte Widerstände von vielen Windungen lassen sich der Extraströme wegen nicht ohne weiteres so bestimmen.

II. Vergleichung ungleicher Widerstände (Kirchhoff).

Man schaltet die beiden zu vergleichenden Widerstände W und R hinter einander in einen Stromkreis und legt an jeden derselben eine Ableitung nach je einer Hälfte des Differentialmultiplikators, so, dafs beide Hälften entgegengesetzt durchströmt werden. Man schaltet zuerst in die an den gröfseren Widerstand angelegte Ableitung so viel Widerstand ein, dafs die Nadel keinen Ausschlag zeigt.



Wenn man alsdann einer der Ableitungen einen Widerstand γ zufügt, so wird man der anderen einen Zuwachs ϱ geben müssen, damit wieder die Nadel in Ruhe bleibt. Dann verhält sich $W : R = \gamma : \varrho$.

Denn die Ströme in den Ableitungen sind gleich, wenn ihre Widerstände sich wie $W:R$ verhalten. Sind diese Zweigwiderstände bei dem ersten Versuch w und r, bei dem zweiten $w+\gamma$ und $r+\varrho$, so ist

$$W:R = w:r = (w+\gamma):(r+\varrho) = \gamma:\varrho.$$

Das Verfahren eliminirt zugleich die Übergangswiderstände. — Die Multiplikatoren müssen genau auf gleiche Stromstärke justirt sein. Gleicher Widerstand wird nicht verlangt. — Bei momentanem Stromschlufs können Extraströme stören.

Vgl. Strecker, Wied. Ann. 25, 464. 1885.

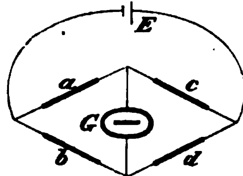
71b. Wheatstone'sche Brücke.

I. Abgleichung von Widerständen.

Bei der Stromverzweigung der Figur ist in dem Zweige G, in der „Brücke“, die Stromstärke gleich Null, wenn die Widerstände sich verhalten $a:b = c:d$.

Beweis auf S. 281 oder 282.

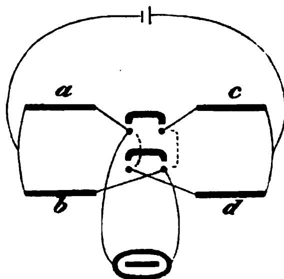
a und b seien zwei Leiter von gleichem Widerstande, c der zu bestimmende Widerstand, d der Rheostat; bei E ist eine Säule, bei G ein Galvanoskop eingeschaltet. Dann ist c gleich dem Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten mufs, damit der Strom in G verschwindet.



Man kann auch in die Zweige a und c die als gleich bekannten, in b und d die zu vergleichenden Widerstände bringen. Wenn der Widerstand in der unverzweigten Leitung gröfser ist als in der Brücke, so bietet die Anordnung $a = b$ die gröfsere Empfindlichkeit, und umgekehrt.

Aufserdem hängt die Empfindlichkeit von der Gröfse der Zweigwiderstände ab, sowie von deren Verhältnis zu den abzugleichenden Widerständen und zum Widerstande des Galvanometers. Zweckmäfsig ist deswegen, über verschiedene Paare von gleichen Widerständen (z. B. 1 10 100 1000) zu verfügen, aus denen man die passenden wählt. Cet. par. ist ein Paar grofser Widerstände vorzuziehen, weil die Zuleitungen in diesem Falle weniger sorgfältig gemacht werden können.

Über empfindliche Anordnung vgl. z. B. Pogg. Ann. 142, 428. 1872.



Kommutator. Von der genauen Gleichheit der Widerstände *a* und *b* macht wieder die Vertauschung unabhängig: *c* und *d* sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung das Galvanoskop seine Einstellung nicht ändert. Oder auch: wenn *d* ein Rheostat ist und wenn vor und nach der Vertauschung von *c* und *d* die Rheostatenwiderstände d_1 und d_2 eingeschaltet werden mufsten, um die Nadel auf Null zu bringen, so ist $c = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$. Die Anwendung eines Kommutators zeigt die Figur.

Interpolation. Verfügt man nicht über den genau gleichen Widerstand im Rheostaten, so interpolirt man denselben aus zwei benachbarten Beobachtungen (5). Bei der Anwendung des Kommutators ergibt sich dabei das folgende Verfahren. Man beobachte bei dem nahe richtigen Rheostatenwiderstande R die Einstellungen e_1 und e_2. Man vermehre R um die relativ kleine Gröfse δ und beobachte die Einstellungen e_1' und e_2'. Die Anhängsel 1 und 2 sollen dabei die Kommutatorstellungen bezeichnen. Dann ist der gesuchte Widerstand (Vorzeichen beachten!) gleich $R + \delta \cdot \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}$.

Vergleichung nach Foster. In der Figur bedeuten *a* und *d* die zu vergleichenden Widerstände, *b* und *c* zwei andere nahe gleiche Widerstände. *AB* ist ein längs einer Teilung ausgespannter Draht, an welchem ein Kontakt mit der Leitung zum Galvanoskop verschoben werden kann. Der Strom in der Brücke möge verschwinden, wenn der Kontakt bei x steht. Vertauscht man nun *a* und *d*, so verschwindet der Strom bei einer neuen Einstellung x'. Bedeutet r den Widerstand von 1 Sk.-Teil des Mefsdrahtes und ist die Bezifferung so eingerichtet, dafs die Zahlen von *A* nach *B* wachsen, so ist offenbar $a - d = r(x' - x)$.

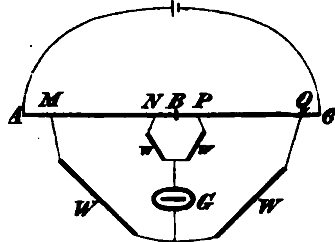
Denn der Gesamtwiderstand des Zweiges *aABd* ist ungeändert geblieben.

r bestimmt man entweder nach Matthiessen und Hockin,

S. 323, oder man mifst als *a* einen bekannten Widerstand, während man für *d* einen dicken Kupferbügel setzt.

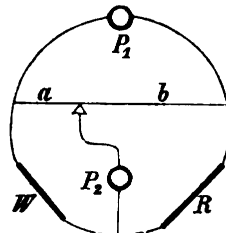
Bestimmung sehr grofser oder sehr kleiner Widerstände. Hierbei kann es notwendig oder vorteilhaft sein, die Zweige *a* und *b* in bekanntem Verhältnis (1:10, 1:100) ungleich zu wählen. Die Möglichkeit einer Kontrole durch Vertauschung fällt dann fort.

Thomson'sche Brückenschaltung. Sind die abzugleichenden Widerstände kurze dickere Drähte, so lassen sich die Anschlüsse derselben an die übrigen Leitungen oft nicht genügend widerstandsfrei herstellen. Dies wird erreicht durch die folgende Abänderung der Brückenverbindung. *AB* und *BC* seien die zu vergleichenden Drähte, bei *B* mit einander, bei *A* und *C* mit einer Säule verbunden. Ferner seien die beiden mit *w* und *W* bezeichneten Paare je von gleichem, nicht zu kleinem Widerstande. In *G* ist ein empfindliches Galvanoskop. Man sucht vier Punkte *MNPQ*, an welchen die letztgenannten Zweige, mit den Drähten gut verbunden, den Strom in *G* verschwinden lassen. Alsdann sind die Widerstände *MN* und *PQ* einander gleich.



II. Vergleichung von Widerständen mit dem Wheatstone-Kirchhoff'schen Brückendraht.

In der Zeichnung sollen *a* und *b* zwei Widerstände bedeuten, deren bekanntes Verhältnis man beliebig ändern kann. Z. B. können *a* und *b* zusammen einen ausgespannten gut cylindrischen Draht von einer durch die Temperatur wenig beeinflufsten Legirung (Tab. 25) bilden, bei welchem man die Widerstände der Länge proportional setzen kann. An dem Drahte ist ein Kontakt verschiebbar, der nicht widerstandsfrei zu sein braucht, von welchem die Leitung nach dem Galvanoskop geführt ist. P_1 und P_2 bedeuten die Stromquelle und das Galvanoskop. Es ist im Princip gleichgiltig, welcher von beiden



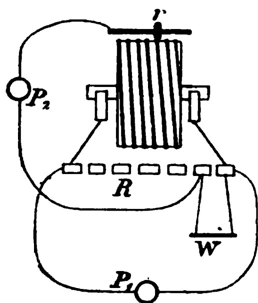
Punkten die Säule, welcher das Galvanoskop enthält. Unter Umständen kann die Empfindlichkeit in dem einen oder anderen Falle gröfser sein. Bringt man die Säule nach P_2, so funktionirt der Schleifkontakt sicherer, was eine grofse Annehmlichkeit beim Arbeiten ist. Fehler von einer Erwärmung des Drahtes durch den Strom werden bei der anderen Anordnung leichter vermieden.

Die beiden zu vergleichenden Widerstände werden bei W und R eingeschaltet. Durch Probiren wird dasjenige Verhältnis zwischen a und b gesucht, bei welchem das Galvanoskop keinen Strom anzeigt. Dann ist $W:R = a:b$.

Für die Rechnung vgl. Tab. 37 und Obach, Hilfstafeln; München 1879. Auch kann die Teilung gleich das Verhältnis a/b geben.

Die Verbindungsdrähte von R und W haben keinen Einflufs, wenn sich ihre Widerstände wie $R:W$ verhalten. Nach einem Vorversuch gleicht man daher die beiderseitigen Gesamtlängen der Drähte (von derselben Sorte) ungefähr diesem Verhältnis entsprechend ab. Bequem ist es hierfür, die Ableitung nach P_2 mittels einer verschiebbaren Klemme vorzunehmen.

Die Genauigkeit der Einstellung des Kontaktes wächst mit der Drahtlänge. Gestreckte Drähte werden ohne Unbequemlichkeit höchstens 1 m lang sein dürfen. Das Aufwinden des Drahtes in einer decimalen Zahl von Windungen auf eine drehbare isolirende Walze (Marmor, Hartkautschuk, Holz) erlaubt die Anwendung viel gröfserer Längen und gibt gröfsere Bequemlichkeit. Eine Kontaktrolle mit Nut läuft auf dem Draht. Letzterer ist mit den Axen verbunden; die Ableitung von da kann mittels einer gröfseren Anzahl federnd anliegender Drähte widerstandsfrei hergestellt werden. Bei R lassen sich Stöpselwiderstände einschalten. W ist der gesuchte Widerstand. Zum Zwecke direkter Vergleichung kann ein anderer Widerstand links geschaltet werden. P_1 und P_2 sind Stromquelle und Galvanoskop; vgl. hierüber die obige Bemerkung.



Zusatzwiderstände. Die Genauigkeit läfst sich durch Anschaltung von Widerständen erhöhen, die zur Bequemlichkeit der Rechnung passende Vielfache des Drahtwiderstandes sind. Um die Genauigkeit bei Vergleichungen in der Gegend von 1:1 sowie 1:10 zu verzehnfachen, genügen z. B. 2 Widerstände von je 4,5 mal dem Drahtwiderstand, welche man entweder beiderseitig oder beide einseitig zuschaltet. Vgl. F. K. Wied. Ann. 56, 177. 1895.

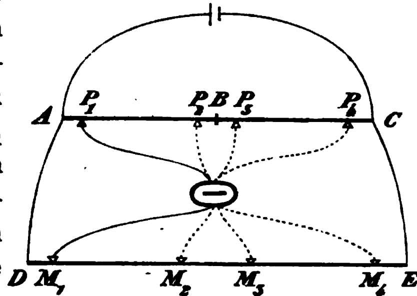
S. auch z. B. die Anordnung des Brückendrahtes von Siemens & Halske.

Vergleichung nahe gleicher Widerstände. Man eliminirt die im allgemeinen vorhandene Ungleichheit beider Drahthälften, indem man auswechselt und aus den beiden abgelesenen a/b und b/a das Mittel nimmt.

Kalibrirung des Drahtes. Hierüber vgl. **71d** II.

Anwendung eines Rheostaten. Es kann an die Stelle von b ein Rheostat, an die Stelle von a ein bekannter Widerstand (1 10 100) gesetzt werden.

Vergleichung kurzer dicker Drähte (A. Matthiessen und Hockin). AB und BC seien die zu vergleichenden Leiter, DE sei ein gespannter Draht. Man sucht zu einem Kontaktpunkte P_1 einen Punkt M_1, welcher den Strom im Galvanometer verschwinden läfst. Denselben Erfolg sollen die Paare P_2M_2, P_3M_3 und P_4M_4 geben. Dann verhalten sich die Widerstände

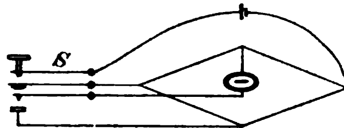


$$P_1P_2 : P_3P_4 = M_1M_2 : M_3M_4.$$

Denn der Strom Null zeigt an, dafs in den zusammengehörigen Kontaktpunkten gleiches Potential herrscht (**68** I 4).

S. auch das Verfahren von Foster, Wied. Ann. 26, 240. 1885.

Momentaner Schlufs. Wegen der Stromwärme kann es bei Differentialgalvanometer oder Brücke geboten sein, nur kurzen Stromschlufs anzuwenden (wofür auch Induktionsstöfse (**81**) Verwendung finden können). Dieses Verfahren kann wegen Selbstinduktion oder Kapacität in aufgespulten längeren Widerständen oder gar bei der Anwesenheit von Eisenkernen Fehler bewirken. Man vermeidet dieselben, wenn man durch einen geeigneten Strom-Doppelschlüssel S die Verbindung in der Brücke einen Augenblick später schliefst als an der Säule. Der zweite Federkontakt des Schlüssels drückt auf den dritten durch einen isolirenden Knopf.



Telephon. Dasselbe läfst sich anstatt des Galvanometers anwenden, falls die Widerstände genügend induktions- und kapacitätsfrei sind. Vgl. 72 II 2.

71c. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung (F. K.).

Eine innerhalb eines geschlossenen Multiplikators schwingende Magnetnadel inducirt Ströme, welche auf die Bewegung der Nadel verzögernd wirken. Das logarithmische Dekrement (51) kleiner Schwingungen in einem breiten Multiplikator ist konstant und dem Gesamtwiderstande $\gamma + w$ des Multiplikators und des Schliefsungsdrahtes umgekehrt proportional (78 Gl. 7).

w_1 und w_2 mögen die zu vergleichenden Widerstände bedeuten. Beobachtet man die logarithmischen Dekremente:

λ_0, wenn der Multiplikator kurz geschlossen ist,

λ_1 bez. λ_2, wenn er durch w_1 bez. w_2 geschlossen ist,

λ', bei geöffnetem Multiplikator, also z. B. durch den mechanischen Luftwiderstand,

so ist
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_2}\,\frac{\lambda_2 - \lambda'}{\lambda_1 - \lambda'}.$$

Folgt aus $(\lambda_0 - \lambda'):(\lambda_1 - \lambda'):(\lambda_2 - \lambda') = 1/\gamma : 1/(\gamma + w_1) : 1/(\gamma + w_2)$.

Auch hat man $\gamma : w_1 = (\lambda_1 - \lambda'):(\lambda_0 - \lambda_1)$, wonach man einen Multiplikatorwiderstand bestimmen oder umgekehrt einen anderen Widerstand auf denselben zurückführen kann.

Schwingungsdauer und Dämpfung lassen sich durch Astasirung vergröfsern (55a).

Wenn λ beträchtlich ist, so hat man eine Korrektion anzubringen, nämlich von jedem beobachteten λ abzuziehen $\frac{1}{4}\lambda^3$.

71d. Kalibrirung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes.

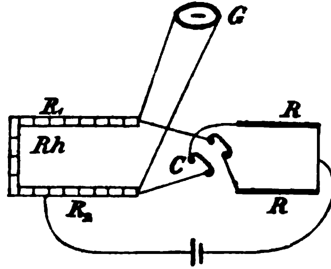
I. Stöpselrheostat.

Zur Prüfung bez. Fehlerbestimmung eines Rheostaten wird man die Stücke bez. Summen von gleichem Nennwert mit einander vergleichen.

Um Differentialgalvanometer oder Brücke anzuwenden, läfst man die Stromverzweigung von einem Klotz der Stöpselvorrichtung ausgehen. Hat der Rheostat keine Vorkehrung zu diesem Zwecke (die er haben sollte), so findet man an der Befestigungsstelle der Drähte eine Gelegenheit oder man schabt

eine Stelle zu diesem Zwecke blank. Es ist nicht notwendig, dafs dieser Kontakt ganz widerstandsfrei sei.

Vergleichung in der Brücke (**71b** I). Die Poldrähte gehen zwischen die beiden gleichen Widerstände R und R und an einen Punkt des Rheostaten, neben welchem beiderseitig die dem Nennwert nach gleichen Widerstände R_1 und R_2 gezogen sind. Um Ungleichheiten der beiden R zu eliminiren, dient der widerstandsfreie Kommutator C, welcher dieselben auswechseln läfst. Die kurzen Drähte von C nach R_1 und R_2 sollen gleichen Widerstand haben. Man beobachtet die Nadeleinstellungen e_1 und e_2 bei den Kommutatorstellungen I u. II. Man schaltet zu dem Widerstande R_1 (womöglich dem kleineren) einen relativ kleinen bekannten Widerstand δ (1 oder 0,1 oder 0,01) zu und beobachtet die Nadeleinstellungen e_1' und e_2'. Dann ist (S. 320)



$$R_2 = R_1 + \delta \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}.$$

Auch ein Schleif-Brückendraht von bekanntem Widerstande zwischen R und R kann grofse Schärfe geben und erspart das Interpoliren; s. S. 323 oben.

Das Differentialgalvanometer kann die Brücke mit etwa gleicher Genauigkeit vertreten. Die Anordnung siehe **71a** bei „Kommutator“. RW ist der Rheostat.

Kleine Widerstände. Für die Stücke 0,1 bis 1 oder 2 ist am besten das Differentialgalvanometer im Nebenschlufs oder im übergreifenden Nebenschlufs (S. 317; s. daselbst auch die Herstellung kleiner Widerstandsänderungen). Einfacher und hier meist genau genug ist die Abzweigungsmethode **71** II 3, welche den Vorteil bietet, alle notwendigen Bestimmungen ausführen zu können, auch wenn der kleinste Widerstand nicht doppelt vorhanden ist. Man kann z. B. 1 + 4 mit 2 + 3 oder auch 1 mit 2 vergleichen.

Verschraubungen an den Widerständen sind sorgfältig zu überwachen. Über die Behandlung der Stöpsel s. **63** IV. Von

Zeit zu Zeit ist die Kalibrirung, besonders wenn starke Ströme durchgegangen sind, zu wiederholen.

Berechnung der Korrektionstabelle. Es werde die übliche Anordnung 5, 2, 2, 1 vorausgesetzt; die einzelnen Stücke werden durch Indices bezeichnet und unterschieden. Wir nehmen noch einen zweiten Einer an, wofür etwa die Summe der Zehntel genommen werden kann. Die Beobachtung habe nun ergeben:

$$\begin{aligned} 5' &= 2' + 2'' + 1' + \alpha \\ 2'' &= 2' \qquad\qquad + \beta \\ 2' &= 1' + 1'' \quad\; + \gamma \\ 1' &= 1'' \qquad\qquad + \delta. \end{aligned}$$

Aufserdem sei anderweitig, nämlich durch eine Vergleichung mit einem Normalwiderstand oder mit der höheren Reihe des Rheostaten gefunden, dafs die Summe einen Fehler ϱ besitzt,

$$5' + 2' + 2'' + 1' = 10 + \varrho.$$

Man berechne $\sigma = \frac{1}{10}(\alpha + 2\beta + 4\gamma + 6\delta - \varrho)$, so wird (vgl. 12) die Korrektionstabelle

$$\begin{aligned} 5' &= 5 - 5\sigma + \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta \\ 2'' &= 2 - 2\sigma + \beta + \gamma + \delta \\ 2' &= 2 - 2\sigma + \gamma + \delta \\ 1' &= 1 - \sigma \;\; + \delta \\ \text{und } 1'' &= 1 - \sigma. \end{aligned}$$

Ebenso verfährt man mit den Zehnern, Hundertern u. s. w. Bei Rheostaten, welche von der Temperatur beeinflufst werden, wird es sich im Interesse kleiner Korrektionszahlen empfehlen, die Summe der sämtlichen Widerstände (oder auch der vier gröfsten) als richtig anzunehmen; ein gemeinsamer Korrektionsfaktor reducirt, wenn nötig, die aus der Tabelle korrigirten Resultate auf absolute Werte. Über den Einflufs der Temperatur siehe **71e** und Tab. 25.

Bei der Anordnung 4, 3, 2, 1 vergleicht man 4 mit 3 + 1, 3 mit 2 + 1, 2 mit 1 + 1′ und 1 mit 1′, wo unter 1′ die Summe der Zehntel verstanden ist, oder auch 4 + 1 mit 3 + 2 (vgl. oben).

Für Dekaden mit 10 gleichen Widerständen ergibt das Verfahren sich von selbst.

Über eine Fehlerquelle wegen ungeeigneter Ableitungen von den Klötzen zu den Widerständen s. Dorn, Wied. Ann. 22, 558. 1884.

Drahtwiderstände werden von der Physik.-Techn. Reichsanstalt geaicht.

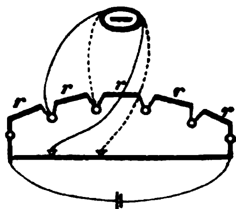
II. Kalibrirung eines Drahtes.

1. Mit zwei Schneiden. Man sendet durch den Draht einen konstanten Strom. Ein empfindliches Galvanometer mit grofsem Widerstande sei mit zwei Schneiden verbunden, welche einen konstanten Abstand von einander haben. Man setzt das Schneidenpaar auf verschiedene Strecken des Drahtes; den beobachteten Galvanometerausschlägen sind die Widerstände der Strecken proportional (71 II). Die Konstanz des Stromes mufs geprüft werden, am einfachsten, indem man von Zeit zu Zeit auf dieselbe Strecke zurückkommt. An Walzendrähten ist die Methode besonders leicht auf die einzelnen ganzen Windungen anzuwenden.

Um nur zu prüfen, ob ein Draht gutes Kaliber hat, bewegt man die beiden Schneiden längs des Drahtes und sieht, ob das Galvanometer konstant bleibt (Braun).

2. Mit dem Differentialgalvanometer. Man versieht die Zuleitungen zu jedem Multiplikator mit Schneiden und setzt die letzteren auf den Draht so auf, dafs die Nadel in Ruhe bleibt. Die beiden Strecken haben dann gleichen Widerstand (S. 317). Vorausgesetzt ist sehr grofser Widerstand der Multiplikatorzweige, damit die Übergangswiderstände keine Fehler geben. — Die folgenden Methoden sind von Übergangsfehlern frei.

3. In der Brücken-Schaltung von Matthiessen und Hockin, S. 323 (Strouhal und Barus). Es werden einzelne, nahe gleiche Widerstände r in der Anzahl der zu vergleichenden Drahtstrecken durch Quecksilbernäpfe hinter einander geschaltet. Man vergleicht eines jener Widerstandsstücke mit den verschiedenen Strecken des Drahtes, wozu man das erste Stück nach jeder Bestimmung um einen Platz vorschiebt. Wied. Ann. 10, 326. 1880.



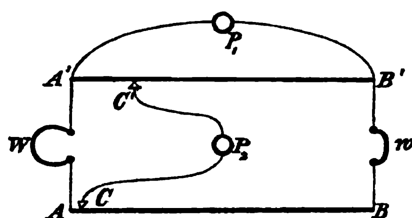
Dabei erhält man also auf dem Drahte lauter Stücke von gleichem Widerstande.

4. Mit einer Anzahl nahe gleicher Widerstände (Heerwagen). Eine Anzahl N (etwa 10) nahe gleicher Widerstände (Drahtstücke mit amalgamirten Kupferbügeln), mit Queck-

silbernäpfen beliebig hinter einander zu verbinden, liefert jedes Verhältnis $m:n$ des Drahtes, wo $m+n=N$ ist, in folgender Weise. Zwei Gruppen von m und n Stücken werden mit den Drahtabschnitten verglichen. Man vertauscht dann zwischen den beiden Gruppen einzelne Stücke, vergleicht wieder, u. s. f., bis jedes Stück $n$mal in der einen, $m$mal in der anderen Gruppe sich befunden hat. Man erhält so $m+n$ unabhängige Einstellungen des Kontakts, deren Mittel den Draht genau im Verhältnisse $m:n$ teilt.

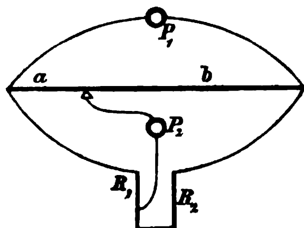
Heerwagen, Z. S. f. Instr. 10, 170. 1889. Daselbst auch Erörterungen über die Genauigkeit verschiedener Methoden.

5. Nach Foster. AB ist der zu kalibrirende Draht, $A'B'$ ein Hilfsdraht. P_1 und P_2 bedeuten Stromquelle und Galvanoskop.



Der Widerstand W ist gleich einem Bruchteil, etwa $1/_{10}$ oder $1/_{20}$ von AB; w bedeutet einen Bügel von dickem Kupferdraht. W und w lassen sich widerstandsfrei auswechseln. Man setzt den Kontakt C nahe an A und schiebt den Kontakt C' so, dafs der Strom im Galvanoskop verschwindet. Man wechselt W und w aus, läfst C' stehen und verschiebt C, bis der Strom verschwindet: der Widerstand der Verschiebungsstrecke des Drahtes ist offenbar $=W-w$. Nun läfst man C stehen, bringt W und w an ihren früheren Ort, verschiebt C' bis zum Strome Null, wechselt dann W und w wieder aus und bestimmt durch Verschieben von C die zweite Drahtstrecke, welche $=W-w$ ist, u. s. f.

Foster, Wied. Ann. 26, 239. 1885; früher J. Soc. Telegr. Eng.



6. Mit dem Rheostaten. Am einfachsten erzielt man mit einem kalibrirten Rheostaten die Korrektionstabelle für den Draht so: Man zieht im Rheostaten Widerstandsverhältnisse $R_1:R_2$ (etwa nach und nach 1:9; 2:8; 3:7 etc.; nicht zu kleine Stücke) und bestimmt so je das entsprechende Verhältnis $a:b=R_1:R_2$. Die Zuleitungen zu R_1 und R_2 wählt man hinreichend dick oder setzt sie durch Addition in Rechnung.

Einige Punkte nahe den Enden bestimmt man aufserdem mit $R_1 : R_2 = 1 : 99$ u. dgl.

Korrektionstabelle. Der Brückendraht sei in 1000 Teile geteilt. Hat man durch eins der vorigen Verfahren ermittelt, dafs dem Punkte a des Drahtes, welchem also ohne Korrektion das Widerstandsverhältnis $a : (1000 - a)$ entsprechen würde, in Wirklichkeit das Verhältnis $(a + \delta) : (1000 - (a + \delta))$ entspricht, was die Tafeln von Obach bequem angeben, so ist also δ die zur Ablesung a zuzufügende Korrektion. Man trägt die δ zu den a in Koordinatenpapier ein und verbindet die Punkte durch eine Kurve, aus welcher die Korrektionen oder eine Korrektionstabelle genommen werden. Je dichter die Punkte, desto geringer ist die bleibende Unsicherheit.

Die dauernde Giltigkeit der Tabelle kontrolire man hauptsächlich an den Enden des Drahtes. Vgl. über einfache Kontrolen F. K. Wied. Ann. 56, 178. 1895.

71e. Temperaturkoefficient eines Leiters.

Der Widerstand fast aller metallischen Leiter wächst mit der Temperatur. Hat ein Leiter bei t und t' die Widerstände w und w', so nennt man Temperaturkoefficient des Widerstandes zwischen t und t' den Faktor $\mathfrak{a}$ in der Gleichung $w' = w\,[1 + \mathfrak{a}(t' - t)]$. Sind also t, t', w und w' beobachtet (**71a** und **71b**), so ist

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{w}\,\frac{w' - w}{t' - t}.$$

Für t wählt man praktisch eine Zimmertemperatur oder auch wohl 0°.

Zur Temperaturänderung dient etwa ein mit Filz umhülltes Petroleumbad. Soll der Koefficient sehr genau bestimmt werden, so ist natürlich eine entsprechend empfindliche Methode erforderlich. Besonders hat man bei kleinen Widerständen auf Konstanz der Verbindungen zu sehen, auch Thermoströme auszuschliefsen.

Um eine Drahtsorte zu untersuchen, wird man zwei gleiche Stücke abschneiden, das eine in ein konstant kaltes Bad bringen, das andere erwärmen. Oder man wählt das Drahtstück einem Rheostatenwiderstand nahe gleich und vergleicht die Wider-

stände bei verschiedenen Temperaturen des ersteren. Die kleinen Unterschiede werden am besten durch Nebenschliefsen eines Rheostaten zu dem gröfseren von beiden Widerständen bestimmt (vgl. **71a** I oder S. 287).

Besitzt man einen Normaldraht vom Widerstande W und bekanntem Temperaturkoefficienten $\mathfrak{A}$, so bringe man das zu bestimmende Drahtstück auf nahe denselben Widerstand und erwärme beide mit einander. Ist bei den Temperaturen t bez. t' der Widerstands-Unterschied, untersuchter minus Normaldraht $= \gamma$ bez. γ', so ist

$$\mathfrak{a} = \left(1 - \frac{\gamma}{W}\right)\left(\mathfrak{A} + \frac{1}{W}\frac{\gamma' - \gamma}{t' - t}\right).$$

Bei manchen Legirungen sowie für grofse Temperaturänderungen ist der Koefficient nicht konstant. Für genauere Darstellung nennt man w_0 den Widerstand bei 0^0 und setzt

$$w_t = w_0(1 + \mathfrak{a}t + \mathfrak{b}t^2 \cdots).$$

Über Temperaturbestimmung durch Widerstandsänderung s. **25** u. **47b.**

Elektrolyte. Deren Widerstand pflegt mit wachsender Temperatur stark abzunehmen. Man bezieht den Temperaturkoefficient hier besser auf die Änderung des Leitvermögens, weil dieselbe meist gleichförmiger erscheint als die Änderung des Widerstandes. Ist also k und k' das Leitvermögen bei t und t', so setzt man $k' = k[1 + \alpha(t' - t)]$, genauer auch hier $k = k_0[1 + \alpha t + \beta t^2]$. Über die Messung s. **72.**

Temperaturkoefficienten einiger Körper in Tab. 3a, 25 u. 26.

71f. Quecksilberwiderstände (Siemens).

Über Herstellung reinen Quecksilbers vgl. 7,19. Als Messungsmethode ist der übergreifende Nebenschlufs (**71a** I) am besten.

Glasröhren. Der Querschnitt wird meist zwischen etwa $\frac{1}{2}$ und 3 qmm gewählt werden; man sucht durch eine vorläufige Kalibrirung mit einem Quecksilberfaden möglichst gleichmäfsige Röhren aus. Die Herstellung einer ebenen oder besser eine Spur konvexen Endfläche geschieht durch Schleifen auf einer mit der Drehbank rotirenden Kupferscheibe mit feinem wässrigem Schmirgel.

Ausmessung. Die Länge l des Kanales wird z. B. an zwei Glasplättchen gemessen, die man mit ganz dünner Kittschicht an die Endquerschnitte anklebt. Man miſst (18) den Abstand von zwei Punktpaaren am inneren Rande, die sich gegenüber liegen. Der mittlere Querschnitt q findet sich aus der Wägung einer eben abgegrenzten Quecksilberfüllung des ganzen Rohres (19).

Die Widerstandskapacität des Rohres würde bei streng cylindrischer Gestalt betragen l/q.

Kaliberkorrektion. Wegen des ungleichmäſsigen Querschnitts kommt ein Kaliberfaktor C hinzu, welcher gröſser als 1 ist. Ein Quecksilberfaden, welcher im Mittel $n$mal kürzer ist als das Rohr, nehme in an einander stoſsenden Strecken die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \cdot\cdot \lambda_n$ ein. In erster Annäherung ist dann

$$C = 1/n^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \cdots + 1/\lambda_n).$$

Einen für die Rechnung bequemeren Ausdruck erhält man, wenn man $\lambda_1 = l/n + \delta_1$, $\lambda_2 = l/n + \delta_2 \cdots$ setzt, nämlich

$$C = 1 + n(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2)/l^2 - (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)^2/l^2.$$

Der spec. Widerstand des Quecksilbers bei der Temperatur t ist (Guillaume; Kreichgauer u. Jaeger)

$$s_t = s_0(1 + 0{,}000885 \cdot t + 0{,}00000114 \cdot t^2).$$

Mit Rücksicht auf die Ausdehnung gewöhnlichen Glases hat eine Quecksilberfüllung des Rohres (l in m, q in mm^2 bei 0^0 gemessen) bei der Temperatur t den Widerstand

$$w = C \cdot l/q \cdot (1 + 0{,}000877 \cdot t + 0{,}00000114 \cdot t^2) \text{ Siem. E.}$$

Division durch 1,063 gibt w in Ohm.[1])

Anordnung. Die Enden der Röhre werden mit Korken in kleine tubulirte Becher mit amalgamirten Elektroden gesteckt. Der Verschluſs wird mit Kollodium oder Guttapercha etc. gedichtet, das Ganze in ein Bad gestellt. Platinelektroden (7, 11) verunreinigen das Quecksilber nicht. Übergangswiderstände werden eliminirt, indem man den Quecksilberwiderstand zwischen zwei anderen Elektroden, welche vor den stromzuführenden Elektroden stehen, mit übergreifendem Nebenschluſs (**71a** I) bestimmt. Wegen des langsamen Abflusses der Wärme durch die Glaswand sind schwache Ströme anzuwenden.

---

1) Anstatt einer Quecksilbersäule von 1,063 m und 1 qmm bei 0° kann man auch eine Säule von 1,063 m setzen, welche bei 0° 14,4521 g wiegt.

Ausbreitungswiderstand. Diesen setzt man nach **63** I 1 in Rechnung, indem man zu der Länge des Kanales hinzufügt $0{,}80(r_1 + r_2)$, wenn r_1 und r_2 die End-Halbmesser des Kanales bedeuten.

Über genauere Formeln für Kalibrirung und praktische Regeln s. u. a. Siemens, Pogg. Ann. 110, 1. 1860; Rayleigh u. Sidgwick, Phil. Trans. 1883 I, 173; Strecker, Wied. Ann. 25, 252. 456. 1885; Benoît, Construct. des Étalons prototypes etc. Paris 1885; Weinstein, El.-techn. Ztschr. 1888 S. 25; Leman, Abh. d. Phys. Techn. Reichsanstalt II, 359. 1895; Jaeger, ib. S. 379. Besonders auch Dorn, Wahrsch. Wert des Ohm. ib. S. 261, auch Z. S. f. Instr. 1893, Febr.-Beiheft.

72. Widerstandsbestimmung eines zersetzbaren Leiters.

Eine Flüssigkeit, welche als Säule von der Länge l und dem konstanten Querschnitt q den Widerstand w hat, besitzt das Leitvermögen $k = l/q \cdot 1/w$. Über die Korrektion der Widerstands-Kapacität l/q für konische Röhren s. **63** I 1. Man pflegt k noch auf Quecksilber zu beziehen; dann wird man m, qmm und Siem. Einheit zu Grunde legen.

I. Mit konstantem Strome.

Soll der Widerstand eines Elektrolytes bestimmt werden, so mufs Rücksicht auf elektromotorische Kräfte der Polarisation genommen werden. Anwendbar ist die Substitutionsmethode (**70**) in folgender Gestalt.

Die Flüssigkeit bilde eine Säule von konstantem Querschnitt mit zwei Elektroden, durch Batterie, Rheostat und Galvanometer geschlossen. Die eine Elektrode ist längs der Säule verschiebbar. Ist Gasentwickelung vorhanden, so befinden die Elektroden sich in den beiden Schenkeln eines U-förmigen aufgerichteten Rohres. Der Querschnitt q des Teiles, in welchem die Verschiebung stattfindet, wird durch Ausmessen oder Auswägen mit Wasser oder Quecksilber bestimmt (**19**).

Man schaltet so viel Flüssigkeit ein, dafs der Nadelausschlag eine schickliche Gröfse hat; dann nähert man die eine Elektrode der anderen um die Länge l und schaltet so viel Rheostatenwiderstand R ein, dafs derselbe Ausschlag entsteht. R ist der Widerstand der ausgeschalteten Flüssigkeitssäule. Das Leitvermögen (**63**) der Flüssigkeit ist also $k = l/(qR)$.

Weil das Leitvermögen stark von der Temperatur abhängt, so setzt man die Röhre in ein Bad mit Thermometer.

Da die Polarisation nur bei gröſserer Stromdichte an den Elektroden konstant ist und da meist Gas entwickelt wird, so nimmt man ein Drahtnetz oder einen spiraligen Draht als Elektrode.

Auch in der Wheatstone'schen Brücke läſst sich das Leitvermögen ganz ähnlich bestimmen.

Vgl. Tollinger, Wied. Ann. 1, 510. 1877. Über Vermeidung der Polarisation durch Zinklösung siehe Paalzow, Pogg. Ann. 136, 489. 1869.

Sehr schlechte Leiter. Für sehr schlecht leitende organische Flüssigkeiten, auch ganz reines Wasser, kann der „konstante Strom" Vorteile bieten. Man nimmt etwa gewöhnliche Brückenschaltung, eine Säule von hoher Spannung und schlieſst den Strom ganz kurz. Vgl. aber die Bemerkung in **71 b** über momentanen Schluſs. Die Polarisation entwickelt sich bei der geringen Stromstärke so langsam, daſs sie meistens vernachlässigt werden kann. Längerer Stromschluſs kann auch den Widerstand ändern. Über die empirische Bestimmung einer Widerstandskapacität zwischen den Elektroden s. S. 336.

F. K. u. Heydweiller, Wied. Ann. 53, 219. 1894; 54, 385. 1895; Warburg ib. S. 396.

II. Mit Wechselströmen (F. K.).

Man vermeidet den Einfluſs der Polarisation, wenn man rasch wechselnde entgegengesetzte Ströme von genau gleicher Gesamtstärke zwischen Elektroden von groſser elektrolytischer Kapacität anwendet. Gut platinirte (7, 18) Platinbleche von 10 bis 20 qcm Fläche genügen meistens. Je kleiner der zu messende Widerstand, desto gröſser und sorgfältiger platinirt müssen die Elektroden sein. Für 100 000 Ohm und mehr lassen sich auch kleinere blanke Bleche ohne Fehler verwenden.

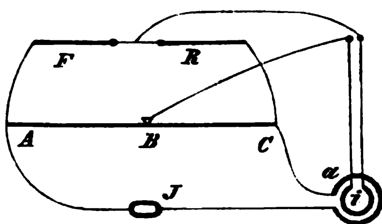
Die Wechselströme liefert ein „Sinus-Induktor", bestehend aus einem Multiplikator, innerhalb dessen ein Magnet rasch rotirt (vgl. Pogg. Ann. Jubelband S. 290), oder einfacher die inducirte Rolle eines gewöhnlichen Induktionsapparates mit rascher Stromunterbrechung.

Die Rheostatendrähte müssen ausgespannt oder bifilar gewunden sein, um Selbstinduktion auszuschlieſsen. Spulen über 1000 Ohm werden zur Vermeidung der elektrostatischen Kapacität unifilar abwechselnd gewickelt (**63** IV).

Zur Beobachtung der Wechselströme dient das Dynamometer (**66a**; auch **67a** 5) oder einfacher das Telephon **67a** 11 u. 12.

1. Elektrodynamometer in der Brücke.

Man schaltet in die Brücke nicht das ganze Dynamometer ein, weil dann die Stromstärke Null nicht scharf zu erkennen ist, sondern man leitet durch die eine Dynamometer-Rolle den ungeteilten Strom des Induktors und schaltet nur die andere Rolle in die Brücke ein.



J bedeutet den Erzeuger der Wechselströme, *a* die äufsere, *i* die innere Rolle des Dynamometers, *F* den Flüssigkeitswiderstand, *R* den Rheostatenwiderstand, je nach Bedürfnis zwischen 10 und 1000 Ohm. Die Strecke *ABC* soll die Verzweigungswiderstände bedeuten, entweder einen Draht mit Schleifkontakt oder zwei konstante Widerstände (vgl. **71b**).

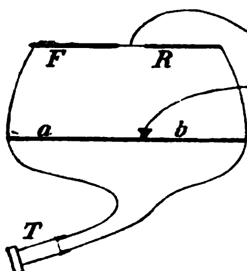
Wenn das Dynamometer keinen Ausschlag gibt, so gilt

$$F : R = AB : BC.$$

Die eine Zuleitung zur beweglichen Rolle kann bei den Wechselströmen durch eine in verdünnte Schwefelsäure (15%) tauchende platinirte Platin-Elektrode geschehen. Durch die Oberfläche der Flüssigkeit soll wegen der Reibung nur ein Draht (platinirt und geglüht; 7, 18) central hindurchtreten. Über Senkrechtstellung der Rollen vgl. **66a** I.

2. Telephon.

Das Bell'sche Telephon ist ein empfindliches Reagens auf rasche Wechselströme. Die Methode ist natürlich auch auf metallische Widerstände anwendbar. Man verbindet die inducirte Rolle des Induktionsapparates *J* so, wie in der Figur, mit dem Flüssigkeitswiderstand *F*, dem bekannten Widerstande *R* und dem Schleifkontakt des Brückendrahtes *ab*.



Wird der Kontakt so gestellt, dafs das Telephon T schweigt, so verhält sich $F:R = a:b$.

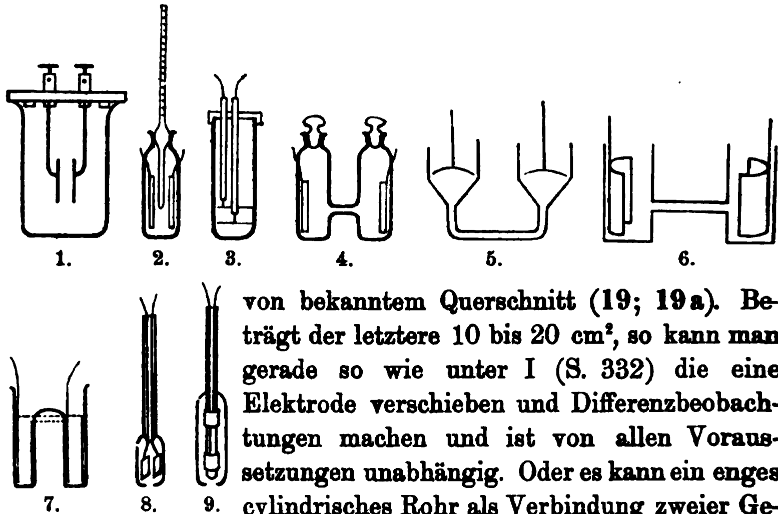
Nicht jedes Telephon eignet sich. Die Empfindlichkeit hängt von der Stärke seines Magnets, von der Beschaffenheit und der Stellung der Blechplatte und von dem Widerstande seiner Drahtwindungen ab. Oft findet man ein ganz ordinäres Telephon brauchbar. Weiche Zuleitungsschnüre zum Telephon, Verstopfen des einen Ohres mit Baumwolle sind zweckmäfsig, um störende Geräusche fernzuhalten. Ein Quecksilberunterbrecher auf weicher Unterlage kann fast vollkommen geräuschlos arbeiten. Von der Brücke und dem Telephon mufs man das Induktorium auch wegen der inducirenden und magnetischen Fernwirkung entfernt halten, von einer Walzenbrücke etwa 1 m weit; die beiderseitigen Windungen senkrecht zu einander.

Das Ton-Minimum. Unter Umständen verschwindet der Ton bei keiner Stellung des Kontakts vollständig. Ist das Minimum der Tonstärke noch deutlich ausgeprägt, so stellt man ohne merklichen Fehler auf den Punkt schwächsten Tons ein, welchen man am genauesten durch Hin- und Herschieben als die Mitte zwischen zwei Punkten gleicher Tonstärke findet. Ist es stärker verwischt, so wird erstens die Einstellung weniger genau, und zweitens können aus den Nebenumständen Fehlerquellen entstehen, die aber meistens unbedeutend sind.

Die Ursachen der Unschärfe können sein: 1. Reste von Polarisation an Elektroden von ungenügender elektrolytischer Kapacität (d. h. zu kleiner Fläche oder schlechter Platinirung) besonders bei kleinen Widerständen. 2. Selbstinduktion in den Widerstandsrollen, bei bifilarer Wickelung jedoch kaum auftretend. 3. Elektrostatische Kapacität grofser Widerstandsrollen. Abwechselnd unifilare Wickelung aus feinem Draht (63 IV) kann aber bis zu 30 000 Ohm brauchbar machen. 4. Elektrostatische Kapacität der Flüssigkeitszelle, besonders bei sehr schlechten Leitern von grofser Dielektricitätskonstante, z. B. reinem Wasser. Die Fehler 3 und 4 lassen sich durch Nebenschalten eines kleinen regulirbaren Kondensators neben den anderen Zweig aufheben oder vermindern. 5. Ladungen der Aufsenwände des Gefäfses in einem Wasserbad; ein Petroleumbad läfst die Störung vermeiden. 6. Elektrostatische Ladungen, welche bei sehr grofsen Widerständen die Induktionsströme begleiten können. Ableitung eines Punktes der Leitung nach der Erde (Gasleitung) pflegt zu helfen.

Bei zu messenden Widerständen von mehreren 100 000 Ohm gelingt es nicht immer, die Quellen der Unschärfe genügend zu beseitigen.

Die Widerstandsgefäfse. Soll eine vollständige, unabhängige Bestimmung des Leitvermögens gemacht werden, so mufs die Flüssigkeit in ein Gefäfs eingefüllt sein, dessen Widerstandskapacität sich berechnen läfst, also in ein cylindrisches Rohr



von bekanntem Querschnitt (**19**; **19a**). Beträgt der letztere 10 bis 20 cm², so kann man gerade so wie unter I (S. 332) die eine Elektrode verschieben und Differenzbeobachtungen machen und ist von allen Voraussetzungen unabhängig. Oder es kann ein enges cylindrisches Rohr als Verbindung zweier Gefäfse, in denen die Elektroden stehen, angebracht sein, ähnlich wie Fig. 6. Dann ist zu der Widerstandskapacität des Rohres die Ausbreitung in die Gefäfse hinzuzufügen (S. 280).

Bequemer sind Gefäfse aus einem Stück wie Fig., und zwar für schlecht leitende Flüssigkeiten Nr. 1 u. 2, Nr. 3 (Arrhenius), Nr. 7 (Pfeiffer) und 8. Die Elektrodenpaare Nr. 8 bez. 9, mit Quecksilber-Zuleitung in einer Doppelkapillare, taucht man einfach in die schlecht bez. gut leitenden Flüssigkeiten ein. Die Widerstandskapacitäten werden empirisch ermittelt.

Empirische Bestimmung der Widerstandskapacität γ.

1. Mit einer Flüssigkeit von bekanntem Leitvermögen. Man füllt das Gefäfs z. B. mit einer der folgenden Lösungen, deren Leitvermögen ohne eine genaue quantitative Analyse hinreichend bekannt ist. Über die Herstellung von Lösungen s. **7a**. Je nachdem Gefäfse von gröfserem oder kleinerem Quecksilberwiderstande zu bestimmen sind, wählt man eine besser oder eine schlechter leitende Füllung, so dafs der Gesamtwiderstand eine passende Gröfse erhält. Es haben bei

der Temperatur t das auf Quecksilber (0°) bezogene Leitvermögen K (s. auch Tab. 3a, 26 u. 27a)

wässrige Schwefelsäure von 30,4% H_2SO_4, spec. Gew. = 1,224,
$$10^7 \cdot K = 692 + 11{,}3 \cdot (t - 18);$$
gesättigte Kochsalzlösung von 26,4% NaCl, spec. Gew. = 1,201,
$$10^7 \cdot K = 202 + 4{,}5 \cdot (t - 18);$$
Bittersalzlösung von 17,3% $MgSO_4$ (wasserfrei), spec. Gew. = 1,187,
$$10^7 \cdot K = 46{,}0 + 1{,}2 \cdot (t - 18);$$
Essigsäurelösung von 16,6% $C_2H_4O_2$, spec. Gew. = 1,022,
$$10^7 \cdot K = 1{,}52 + 0{,}027 \cdot (t - 18);$$
Hundertel-normale Chlorkaliumlösung; 0,746 g KCl in 1 l,
$$10^7 \cdot K = 1{,}147 + 0{,}0250 \cdot (t - 18);$$
Gesättigte Gypslösung $CaSO_4 + 2H_2O$
$$10^7 \cdot K = 1{,}77 + 0{,}045 \cdot (t - 18);$$
Gesättigte Lösung von $SrSO_4$
$$10^7 \cdot K = 0{,}121 + 0{,}0028 \cdot (t - 18).$$

Bei den letzten drei Lösungen, besonders bei $SrSO_4$ ist sehr reines Lösungswasser vorausgesetzt. Die Sättigung der Lösung durch gepulverte Substanz erfolgt meistens rasch. Die Anwesenheit einer mäfsigen Menge des Pulvers beeinflufst das Leitvermögen nicht merklich. Man wäscht das Pulver wiederholt aus, bis ein konstanter Wert des Widerstandes erhalten wird.

Um die auf das richtige Ohm bezüglichen Leitvermögen zu haben, mufs man die Zahlen mit 1,063 multipliciren.

Über reines Wasser s. 7, 2. Das beste Destillat in Luft hat etwa $K = 10^{-10}$ bei 18°.

Die Widerstandskapacität γ eines Gefäfses, in welchem eine Flüssigkeit vom Leitvermögen K den Widerstand W ergibt, ist
$$\gamma = W \cdot K.$$

2. Mit einem Gefäfs von bekannter Kapacität. Man schaltet das unbekannte und das bekannte Gefäfs mit derselben Flüssigkeit gefüllt, wie F und R (Fig. S. 334) ein. Das Widerstandsverhältnis gibt dann das Verhältnis der beiden Kapacitäten. Lösungen von $KHSO_4$ oder für kleine Kapacitäten solche von Mannit und Borsäure (f. S.) sind wegen des geringen Temperatureinflusses zweckmäfsig.

Leitvermögen der Flüssigkeit.

Hat diese in einem Gefäfs von der Kapacität γ den Widerstand w, so ist ihr Leitvermögen $k = \gamma/w$.

(Welche Einheit der Rheostat besitzt, ist bei allem gleichgiltig. Man mifst eben W, also auch γ in derselben Einheit wie w.)

Bei engen Gefäfsen soll man die Ströme wegen der Wärmeentwickelung nicht stärker und länger als nötig nehmen!

Vgl. F. K. und Grotrian, Pogg. Ann. 154, 3. 1875; F. K., Wied. Ann. 6, 5. 49. 1879; 11, 653. 1880; 26, 168. 1885; 49, 228. 1893; 51, 346. 1894. Über Einflüsse auf die Güte des Tonminimums s. auch Elsas, Wied. Ann. 44, 666. 1891; M. Wien, ib. 47, 626. 1892.

Anordnung von Nernst. Eine Brückenverzweigung besteht aus vier paarweise gleichen Glasröhren, gefüllt mit einer Lösung, deren Leitvermögen von der Temperatur sehr wenig abhängt: 97 g Mannit und 33 g Borsäure in Wasser zu 1 l gelöst; $K = 0{,}9 \cdot 10^{-7}$. Einer von den Zweigen mufs eine in mefsbarer Weise verschiebbare Elektrode enthalten. Als Widerstandseinheit dient der dem Skalenteil dieser Verschiebung entsprechende Widerstand, in welchem man auch die Widerstandskapacität eines Mefsgefäfses ausdrückt.

Ein zu messender Flüssigkeitswiderstand, welchen man diesem Zweige hinzufügt, ist dann gleich derjenigen Verschiebung der Elektrode, welche das Telephon wieder zum Schweigen bringt.

Die Anordnung ist wegen ihrer Symmetrie den Störungen des Minimums weniger ausgesetzt und infolge dessen auch für sehr grofse Widerstände zu benutzen.

Nernst, Z. S. f. phys. Ch. 14, 642. 1894. Vgl. auch 86a I.

Optisches Telephon s. S. 303; elektrometrische Methoden 84 III.

Äquivalent-Leitvermögen.

p gr in 1000 g oder $p' = p \cdot s$ gr in 1 liter der Lösung (Dicht. $= s$) bedeuten einen Gehalt $m = p'/A$ gr-Äqu./liter, wenn A das chemische Äquivalentgewicht des gelösten Körpers. Ist k das Leitvermögen der Lösung, so nennt man $\lambda = k/m$ das auf Quecksilber bezogene Äquivalent-Leitvermögen des Körpers. Mit wachsender Koncentration nimmt λ ab. (Vgl. 7a und Tab. 27a.)

Elektrolytische Dissociation (Arrhenius). Unter der Annahme, dafs nur dissociirte Moleküle leiten und dafs in unendlicher Verdünnung die Dissociation vollständig erfolgt ist, erhält man den Dissociationsgrad der Lösung eines binären Elektrolytes $d = \lambda/\lambda_\infty$, wenn λ_∞ das Äquivalent-Leitvermögen in unendlicher Verdünnung ist.

Leitvermögen und Geschwindigkeit der Ionen.

Ist n die Hittorf'sche Wanderungszahl des Anions, d. h. die Geschwindigkeit des Anions geteilt durch die Summe der Geschwindigkeiten beider Ionen, also $1-n$ die Wand.-Zahl des Kations, so nennt man $u=(1-n)\lambda$ bez. $v=n\lambda$ die auf Quecksilber bezogenen Leitvermögen oder Beweglichkeiten des Kations bez. des Anions. $u+v$ ist also $=\lambda$.

Die Geschwindigkeiten U und V der Ionen, wenn die el. Kraft 1 Volt auf 1 cm Länge der Lösung beträgt, bekommt man folgendermaſsen.

1 cm-Würfel hat den Widerstand $1/(10000\cdot k)$ Siem.-Einh. oder $1/(10630\cdot k)$ Ohm (68 I). 1 Volt erzeugt hierin also den Strom $10630\cdot k$ Am.

Der Strom 1 Am scheidet 0,00001036 g-Äqu./sec aus, der obige Strom also $10630\cdot k\cdot 0{,}00001036=0{,}1102\cdot k$ g-Äqu./sec. 1 cm^3 Lösung enthält $m/1000$ g-Äqu. Sollen $0{,}1102\cdot k$ von diesen in 1 sec an den Endflächen frei werden, so ist die gegenseitige Geschwindigkeit der Ionen in cm/sec

$$U+V=0{,}1102\cdot k\cdot 1000/m=110{,}2\cdot\lambda$$

und $$U=110{,}2\cdot\lambda(1-n)=110{,}2\cdot u \qquad V=110{,}2\cdot\lambda n=110{,}2\cdot v.$$

F. K., Wied. Ann. 50, 402, 1893; eine Tabelle für n ib. S. 387.

Tab. 27b gibt die Beweglichkeiten einiger Ionen für den Grenzzustand äuſserster Verdünnung, so gut dieselben bekannt sind. Die Zahlen für mehrwertige Ionen sind weniger sicher.

72a. Löslichkeit schwer löslicher Körper.

1 mg eines Salzes in 1 l Wasser gelöst bewirkt eine Erhöhung des Leitvermögens von der Ordnung 10^{-10}, so daſs selbst Körper wie Chlorsilber oder Bariumsulfat eine gut meſsbare Vermehrung ergeben. Man wässert den gepulverten Körper aus, trocknet und zerreibt ihn noch einmal im Achatmörser, bringt ihn in das Gefäſs Nr. 2 S. 336, gieſst vorsichtig Wasser von bekanntem Leitvermögen auf, schüttelt und bestimmt das Leitvermögen abermals. Meistens wird wegen der Verunreinigungen noch einmal oder mehrere Male von dem Pulver abgegossen und Wasser aufgegossen werden müssen, bis konstante Leitvermögen entstehen.

Tab. 27b gibt die auf Hg bezogenen Beweglichkeiten u und v von Ionen in äuſserst verdünnter wässriger Lösung bei 18°. Hat man nun das Leitvermögen der gesättigten Lösung bei 18° um k gröſser gefunden als dasjenige des lösenden Wassers, so berechnet man die in 1 l gelösten gr-Äquivalente als $m=k/(u+v)$. Ist A das Äquivalentgewicht des gelösten Körpers, so stellt also $A\cdot m$ oder $A\cdot k/(u+v)$ die Koncentration in gr/liter dar

Nur bei Anwendung sehr reinen Wassers und in verdünnter Lösung neutraler Salze darf man so rechnen.

Beispiel: $BaSO_4$, $u=52$, $v=62$, $u+v=114\cdot10^{-7}$. Es wurde gefunden $k_{18}=2{,}4\cdot10^{-10}$, also $m=2{,}4/114\cdot10^{-3}=0{,}000021$ gr-Äqu/lit. Äqu. Gew. $\frac{1}{2}$ Ba $=68{,}5$, $\frac{1}{2}SO_4=48$, also $A=116{,}5$, woraus der Gewichtsgehalt $=116{,}5\cdot0{,}000021=0{,}0024$ gr/liter.

Vgl. Kohlrausch u. Rose, Berl. Sitz.-Ber. 1893, 453; Wied. Ann. 50, 127. 1893; Z. S. f. phys. Ch. 12, 234. 1893.

Über die Bestimmung gröfserer Löslichkeiten s. z. B. Ostwald, Physiko-chemische Methoden S. 202.

73. Widerstand einer galvanischen Säule.

Die Methoden I bis III setzen sehr konstante Säulen von nicht zu kleinem Widerstande voraus, wenn sie brauchbare Ergebnisse liefern sollen. IV und V sind in der Ausführung nicht einfach. VI ist meistens einfacher und genauer als die übrigen.

I. Mit dem Galvanometer (Ohm).

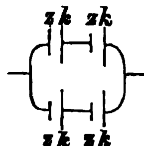
Man schliefst die Säule durch ein Galvanometer (**64** bis **67**), nötigenfalls mit so viel Widerstandsballast, dafs der Ausschlag eine passende Gröfse hat. Die Stromstärke sei J. Dann wird ein bekannter Widerstand R zugeschaltet; am besten so viel, dafs die neue Stromstärke i ungefähr die Hälfte der früheren wird. Daraus ergibt sich der Widerstand W, welchen der Stromkreis bei der ersten Beobachtung besafs,

$$W = Ri/(J-i).$$

Man zieht von W den Widerstand des Galvanometers, sowie eventuell den konstanten Ballast ab.

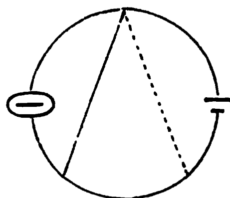
II. Mit Galvanoskop und Rheostat.

Eine gerade Anzahl von Elementen wird durch ein Galvanoskop und einen angemessenen Rheostatenwiderstand geschlossen. w_1 sei der Widerstand aufser demjenigen der Säule. Zweitens schalte man die Becher paarweise gleichgerichtet neben einander, so wird ein anderer Rheostatenwiderstand den früheren Nadelausschlag hervorbringen. w_2 sei der jetzige Widerstand aufser der Säule. Dann hatte die Säule bei dem ersten Versuch den Widerstand $4w_2-2w_1$.



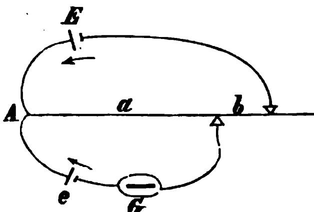
III. Durch Abzweigung (Siemens).

Die Säule sei durch ein Galvanoskop und durch eine Abzweigung geschlossen. Verlegt man die Abzweigung so, dafs wieder der frühere Nadelausschlag entsteht, so ist der frühere Widerstand auf der Seite der Säule ebenso grofs wie jetzt derjenige auf der Seite des Galvanoskopes und umgekehrt.



IV. Nach dem Kompensationsverfahren (v. Waltenhofen; Beetz).

ab ist ein ausgespannter dünner Draht von bekanntem Widerstand mit zwei verschiebbaren Kontakten, *E* die Säule, deren Widerstand *W* (wobei wir die nachher abzurechnenden Verbindungsdrähte einbegreifen) bestimmt werden soll. *e* ist eine schwächere konstante Hilfssäule. Man stellt die Kontakte so, dafs das Galvanoskop *G* stromlos ist. Die Drahtstücke seien *a* und *b*. Man ändert beide Stücke in a' und b', so dafs *G* wieder stromlos ist; dann ist $W = (a'b - ab')/(a - a')$.



Beweis. Der Kreis *AabE* habe den Strom *i*. Es ist (63, I, B.) $E = (W + a + b)i$; ferner $e = ai$, also $E/e = 1 + (W + b)/a$. Ebenso $E/e = 1 + (W + b')/a'$; also $(W + b')/a' = (W + b)/a$, woraus obiges folgt.

Gibt keine Stellung den Strom Null, so mufs der disponibele Widerstand vermehrt oder ein schwächeres *e* genommen werden.

Schliefst man nur sehr kurze Zeit (Stromschlüssel von Beetz), so kann man auch inkonstante Elemente untersuchen. Um den Widerstand mit Strom zu erhalten, legt man an *E* eine Nebenschliefsung, welche durch den Schlüssel bei *A* kurz vor der Verbindung der Säulen mit dem Rheostatendraht gelöst wird.

V. In der Wheatstone'schen Brücke (Mance).

In der Figur auf S. 322 sei im Zweige *W* die Säule, in P_1 das Galvanoskop, während der Zweig P_2 momentan geschlossen werden kann. Wenn der Galvanoskop-Ausschlag sich durch

diesen Schlufs nicht ändert, so ist der Widerstand der Säule $W = R \cdot a/b$. Durch einen konstant genäherten Magnet kann man die Galvanoskopnadel in der Nähe der Ruhelage halten.

Man mifst hier den Widerstand der geschlossenen Säule.

VI. Durch Wechselströme.

Am einfachsten ist die Messung nach 72 II. Elemente von nicht zu kleinem Widerstande verhalten sich den Wechselströmen gegenüber ähnlich wie gewöhnliche Leiter. Mit dem Elektrodynamometer untersucht man die Elemente paarweise hinter und gegen einander geschaltet. Für das Telephon (Lefs) ist die Gegenschaltung nur dann nötig, wenn die Ströme durch ihre Stärke Nachteile bringen würden.

Nach 86 V 1 kann man das Verhältnis zweier Widerstände in Brückenschaltung auch auf das Verhältnis zweier Kondensator-Kapacitäten zurückführen, welche die beiden anderen Zweige bilden.

Vgl. hierüber Nernst u. Haagn, Z. S. f. Elektrochem. 2, 493. 1896.

73a. Widerstand eines Galvanometers.

Der Widerstand γ eines Multiplikators läfst sich wie jeder andere nach 70 bis 71c bestimmen. Um aber die eigene Nadel zu benutzen, gibt es folgende Verfahren.

I. Direkter Schlufs.

Eine konstante Säule von bekanntem, thunlichst kleinem Widerstande (grofser Daniell, Akkumulator) wird durch das Galvanometer geschlossen, wenn nötig unter Einschaltung eines bekannten Widerstandes. w_0 sei die Summe dieses Ballastes und desjenigen der Säule. Die Stromstärke sei J. Man bringe durch Zuschaltung des Rheostatenwiderstandes R den Strom auf etwa die halbe Stärke i. Dann ist $\gamma = Ri/(J-i) - w_0$.

Denn es ist $(\gamma + w_0)J = (\gamma + w_0 + R)i$.

Hindernisse. Wegen der Inkonstanz der Elemente, der ungenauen Kenntnis ihres Widerstandes und weil bei empfindlichen Galvanometern der Ballast w_0 relativ grofs genommen werden mufs, wird das Verfahren selten genau sein.

II. Abzweigung und Strommessung.

Hier kann man, besonders bei empfindlichen Galvanometern, mit schwachen, unter Umständen auch wenig veränderlichen Strömen arbeiten, so daſs die Konstanz der Säule gewahrt bleibt.

Die Säule von bekanntem kleinem Widerstande sei geschlossen durch eine Leitung, welche sich in zwei Zweige teilt, von denen der eine aus dem Galvanometer γ, der andere aus einem bekannten Widerstande z bestehe. z möge von γ im allgemeinen nicht sehr verschieden sein.

W sei der Gesamtwiderstand des unverzweigten Teiles der Leitung, also einschlieſslich des Widerstandes der Säule. Es ist vorteilhaft, W groſs wählen zu können.

i sei die im Galvanometer beobachtete Stromstärke, wenn die Widerstände W, z und γ sind.

Bei Spiegelgalvanometern gilt für i einfach der Ausschlag, wenn er klein ist. Im übrigen vgl. 64 bis 67.

Allgemeiner Fall. Wenn W in W', z in z' verwandelt und zu γ ein Widerstand w zugeschaltet wird, so möge die Stromstärke i' in γ entstehen. Dann ist

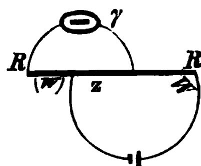
$$\gamma = \frac{i'[w(W'+z')/z'+W']-iW}{i(W+z)/z - i'(W'+z')/z'}.$$

Denn es ist $i = \dfrac{E\cdot z}{\gamma(W+z)+Wz}$; $\quad i' = \dfrac{E\cdot z'}{(\gamma+w)(W'+z')+W'z'}$ (S. 282).

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich leicht die folgenden Methoden. Die nebengesetzten Figuren zeigen an, wie man die Anordnung mit einem Rheostaten RR treffen kann, wenn man einige Stöpsel mit Klemmschrauben besitzt. Besonders Nr. 3, 4 und 7 werden sich leicht ausführen lassen.

Einzelne Fälle für den Gebrauch.

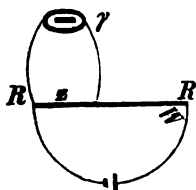
1) Man lasse W und z ungeändert, schalte aber in den Galvanometerzweig γ noch einen von γ nicht sehr verschiedenen Widerstand w. Die Stromstärke sei nunmehr $= i'$. Über i, W, z siehe oben. Dann ist



$$\gamma = \frac{i'[w(1/z+1/W)+1]-i}{(i-i')(1/z+1/W)}.$$

Ist W sehr groſs gegen z, so hat man $\gamma = w\dfrac{i'}{i-i'} - z$.

2) Man läfst bei dem zweiten Versuche W und den Galvanometerzweig ungeändert ($w = 0$), verwandelt aber z in den beträchtlich gröfseren Wert z', wodurch in γ die Stromstärke i' entstehe. Es ist

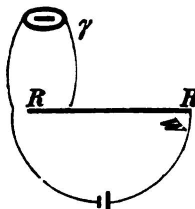


$$\gamma = \frac{i'-i}{i(1/z+1/W)-i'(1/z'+1/W)}.$$

Für grofses W entsteht $\gamma = \dfrac{i'-i}{i/z-i'/z'}$.

3) Bei dem zweiten Versuche werde W in W' verwandelt und durch das Galvanometer der ganze Strom i' geleitet (d. h. $w = 0$ und $z' = \infty$). Dann ist

$$\gamma = \frac{i'W'-iW}{i(W+z)/z-i'}.$$



Ist der Widerstand des ungeteilten Bogens bei beiden Versuchen der nämliche geblieben ($W' = W$), so gilt

$$\gamma = \frac{i'-i}{i(1/z+1/W)-i'/W},$$

und wenn W sehr grofs ist, $\gamma = z(i'-i)/i$.

Im allgemeinen wird es günstig sein, wenn die eine Stromstärke etwa halb so grofs ist wie die andere. — Die Anwendung eines Kommutators an der Säule ist zweckmäfsig.

Besonders auf Spiegelgalvanometer von nicht zu grofsem Widerstande, bei denen die gewöhnlichen Methoden versagen, sind die Methoden 1 bis 3 anwendbar.

III. Abzweigung mit gleicher Stromstärke.

Um die Methoden auch auf ein Galvanoskop anwenden zu können, welches keine eigentliche Messung erlaubt, regulire man die Widerstände bei dem zweiten Versuche so, dafs die beiden Stromstärken gleich sind ($i' = i$).

In diesem Falle ist allgemein (s. oben)

$$\gamma = z\frac{w(W'+z')+z'(W'-W)}{Wz'-W'z}.$$

Man hat zwischen folgenden Methoden die Wahl.

4) Der Widerstand W der unverzweigten Leitung bleibe konstant ($W' = W$). Man füge zu dem Galvanometerzweig γ noch einen Widerstand w, der die Stromstärke erheblich (etwa

auf die Hälfte) sinken läfst. Alsdann vergröfsere man z in z', bis die frühere Stromstärke entsteht. Dann ist

$$\gamma = \frac{wz}{z'-z}\left(1+\frac{z'}{W}\right)$$

und für sehr grofses W einfach $\gamma = wz/(z'-z)$.

Bei der Ausführung nach der Figur zu Nr. 1 hat man nötigenfalls diejenigen Widerstände, welche den Strom i'' genau $= i$ machen, aus zwei benachbarten Widerständen und Stromstärken zu interpoliren (5).

5) Man lasse z ungeändert, schalte w zu γ und vermindere W in W', bis die alte Stromstärke erreicht ist. Man hat

$$\gamma = w\,\frac{W'+z}{W-W'} - z.$$

Über Interpolation siehe 4).

6) Man läfst den Galvanometerzweig bei beiden Beobachtungen ungeändert ($w = 0$). Wenn z und W dieselbe Stromstärke geben wie z' und W' (vgl. Fig. zu Nr. 2), so ist

$$\gamma = \frac{W-W'}{W'/z'-W/z}.$$

7) Mit dem Widerstande W der Hauptleitung und dem Zweigwiderstand z (Fig. bei 2) gebe das Galvanometer denselben Ausschlag wie mit dem gröfseren Widerstande W' und ohne Abzweigung (also $w = 0$, $z' = \infty$, Fig. bei 3). Dann ist

$$\gamma = z(W'-W)/W.$$

IV. In der Wheatstone'schen Brücke (Thomson).

Das Galvanometer kommt in einen der vier Brückenzweige. Als Brücke genügt ein blofser Verbindungsdraht mit Unterbrecher. Wenn der Ausschlag sich bei Schliefsung und Öffnung der Brücke nicht ändert, so stehen die Widerstandspaare in Proportion. Zu grofse Ausschläge kann man durch einen genäherten Magnet vermindern. In der Ausführung kostet das Ausprobiren der Proportion einige Zeit.

V. Durch Dämpfung.

Nach **71c**. Wenn die log. Dekremente der Nadel sind: λ_0 bei kurzem Schlufs, λ bei Schlufs durch den bekannten Widerstand R, λ' bei offenem Multiplikator, so ist der Widerstand des Multiplikators $\gamma = R(\lambda - \lambda')/(\lambda_0 - \lambda)$.

74. Vergleichung elektromotorischer Kräfte (Potentialunterschiede, Spannungen).

Um eine el. Kraft zu messen, kann man dieselbe mit der Kraft eines in Volt (63 II u. 76) bekannten konstanten Elementes (Daniell, Akkumulator, Clark, Cadmium-Element) vergleichen.

Zur Beurteilung der Messungen mufs man bedenken, dafs, abgesehen von zeitlichen Änderungen, die Spannung noch von der Stromstärke abhängt. Bei einer grofsplattigen Säule mit starker Salpetersäure oder Kupferlösung wird für mäfsigen Strom die Schwächung nicht merklich sein. Elemente mit verdünnten oder länger gebrauchten Flüssigkeiten und „inkonstante" Elemente (z. B. Smee, Leclanché, auch Clark) können mit starkem Strome mehrfach schwächer sein als kompensirt oder mit ganz schwachem Strome.

I. Vergleichung durch Galvanoskop und Rheostat.

Das eine Element E wird durch ein Galvanoskop und einen Rheostaten geschlossen. Der Gesamtwiderstand des Kreises bei einem passenden Ausschlag sei W. Dann ersetzt man E durch das andere Element e und bewirkt mit dem Rheostaten den früheren Ausschlag. Der Gesamtwiderstand sei jetzt w. Dann verhalten sich die Spannungen

$$E:e = W:w.$$

W und w enthalten die Widerstände des Rheostaten und der übrigen Kette einschliefslich des Elementes. Nimmt man aber die Rheostatenwiderstände grofs gegen die übrigen Teile, was durch ein empfindliches Galvanoskop immer ermöglicht wird, so kann man die letzteren vernachlässigen, oder es genügt eine Schätzung.

II. Vergleichung durch das Galvanometer (Fechner).

Erzeugen zwei el. Kräfte E und e in Stromkreisen vom Widerstand W und w die Stromstärken J und i, so ist

$$E:e = JW:iw.$$

Sehr einfach wird das Verfahren, wenn man ein empfindliches Galvanometer (66, 75, 77) und einen sehr grofsen kon-

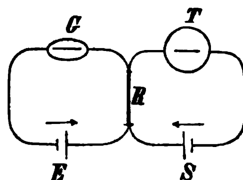
stanten Widerstand nimmt, so dafs der Widerstand der Säulen vernachlässigt werden kann. Die Spannungen verhalten sich dann einfach

$$E : e = J : i.$$

III. Kompensationsmethode von Poggendorff.

Von einer inkonstanten Säule kann man die volle Spannung dadurch bestimmen, dafs man sie durch Kompensation stromlos macht. Die genaue Kompensation ist oft zeitraubend, weil bei dem Ausprobiren die Säule Strom bekommt, dessen Einflufs auf ihre Spannung eine Zeit lang nachwirkt. Man schalte also während des Probirens einen Widerstandsballast zu dem zu kompensirenden Element und schliefse immer nur kurze Zeit, überzeuge sich aber bei der definitiven Beobachtung durch längeren Schlufs, ob die Kompensation wirklich erreicht ist.

G ist ein Galvanoskop, *T* ein Galvanometer, *R* ein Rheostat, *E* eins der zu vergleichenden Elemente, *S* eine konstante stärkere Hilfssäule. *E* und *S* sind gegengeschaltet. Man schaltet so viel Widerstand *R* ein, dafs *G* stromlos ist, und beobachtet die Stromstärke *J* in *T*.



Jetzt schaltet man statt *E* die andere Säule *e* ein, macht *G* durch einen Rheostatenwiderstand *r* wieder stromlos und beobachtet die Stromstärke *i* in *T*. Dann ist

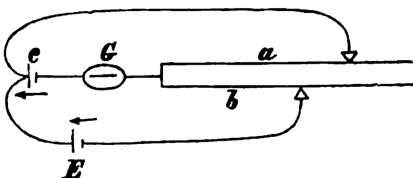
$$E : e = JR : ir.$$

Denn es ist $E = JR$ und $e = ir$ (68 I B), da der Strom in *G* Null ist.

Unter Umständen kann man den Versuch durch Einschalten eines Widerstandes auch im Zweige *S* bequemer machen.

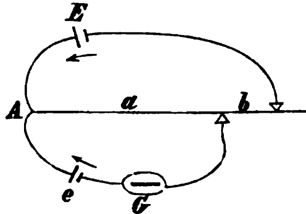
IV. Kompensations-Verfahren nach Bosscha.

Die Spannung eines Elementes *e* sei mit derjenigen *E* einer **stärkeren** konstanten Säule (ein oder mehrere Daniell oder Akkumulatoren) zu vergleichen. *a* und *b* seien Rheostatenwiderstände (etwa gespannte Drähte mit **guten** Schleifkontakten), welche die Nadel des Galvanoskops *G*



auf Null bringen. Bei einem zweiten Versuche mögen a' und b' dieser Anforderung genügen. Dann ist

$$E/e = 1 + (b - b')/(a - a').$$



Die Anordnung des Versuchs kann auch mit einem einzigen Draht mit zwei Schleifkontakten getroffen werden (Fig.). Es gilt dann dieselbe Beziehung.

Im ersteren Falle dürfen beide Kontakte, im letzteren darf der Kontakt hinter b keinen wechselnden Widerstand haben. Mit Quecksilber gefüllte, auf blankem Platindraht gleitende Röhrchen können brauchbar sein.

Vgl. 78 IV, wo auch der Beweis und die Bedingung der Ausführbarkeit.

V. Kompensations-Verfahren nach du Bois-Reymond.

Ist in der obigen Figur der Widerstand $a + b$ konstant, so ist bei ungeändertem E der Widerstand a, welcher den Strom in G verschwinden läfst, einfach proportional der bei e eingeschalteten el. Kraft. Also $e = C \cdot a$.

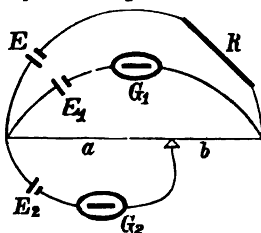
Wenn nämlich W der Widerstand der Säule E nebst Verbindungsdrähten, so ist $e : E = a : (W + a + b)$.

Den Faktor C kann man ermitteln, indem man einmal ein bekanntes Element (Daniell, Akkumulator, Clark) für e setzt.

Zur Ausführbarkeit des Verfahrens IV und V wird erfordert, dafs mindestens ein Widerstand $a = We/(E - e)$ zur Verfügung steht. Reicht a hierfür nicht aus, so mufs man eine stärkere oder gröfsere Säule E nehmen.

VI. Kompensations-Verfahren nach Clark.

Mittels zweier Galvanoskope G_1 und G_2 und einer stärkeren konstanten Hilfssäule E kann man zwei inkonstante el. Kräfte E_1 und E_2 direkt mit einander vergleichen. R sei ein Rheostat, ab ein Draht mit Schleifkontakt. Es sei $E > E_1 > E_2$. Durch Einschalten von Widerstand in R und gleichzeitiges Reguliren des Schleifkontaktes kann man die Ströme in G_1 und G_2 zum Verschwinden bringen. Alsdann hat man offenbar $E_1 : E_2 = (a + b) : a$.



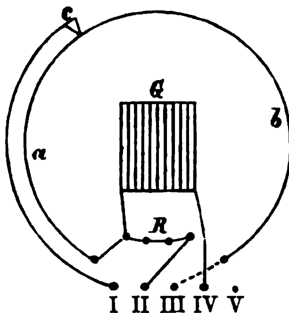
Stöpselrheostaten. Solche kann man in IV, V und VI für die Widerstände $a+b$ nehmen, indem man die Drähte von E fest an die Enden des Rheostaten bringt, mit den Drähten von e und G dagegen die beiden Seiten einer solchen Widerstandsstrecke a berührt, dafs der Strom in G verschwindet.

Elektrostatische Methoden s. in 84.

75. Universalgalvanometer von Siemens.

Das Instrument kann gebraucht werden erstens als Sinusbussole, ferner für die Widerstandsbestimmung nach der Brückenmethode, endlich für die Vergleichung el. Kräfte.

G ist der Multiplikator, R bedeute die durch Herausziehen von Stöpseln einzuschaltenden Widerstände 1, 10, 100 oder 1000 Ohm, a und b den kreisförmig gespannten Brückendraht. I, II, III, IV, V sind Klemmschrauben, von denen III und IV durch einen Stöpsel direkt mit einander verbunden werden können. Klemme V mit einem Kontakttaster nach II wird für momentanen Schlufs statt II gebraucht. Wenn V fehlt, so kann zu diesem Zweck ein leicht zu handhabender Kontakt an II dienen. C bedeutet den verstellbaren Kontakt (die wirkliche Verbindung von C nach I liegt unter dem Instrument).



1. Sinusbussole. Man verbindet die Klemmen II (oder V) und IV mit der Leitung. Mittels R kann man zugleich einen Widerstand einschalten. Als Teilkreis dient die Gradeinteilung am Brückendraht. Vgl. 65.

2. Widerstandsbestimmung. Man verbindet I und II (V) mit einer Säule, II und III mit dem Widerstande und setzt den Stöpsel zwischen III und IV. Man hat dann die gewöhnliche Brückenschaltung **71 b** II. Wird C so gestellt, dafs der Kontakt keinen Strom gibt, so ist $W:R=b:a$. R wählt man so, dafs b und a möglichst wenig ungleich sind. $b+a$ ist $=300$; der Nullpunkt der Teilung liegt in der Mitte. Eine Tabelle erleichtert die Rechnung.

3. Vergleichung elektromotorischer Kräfte (74 IV u. V). Man zieht den Stöpsel III—IV heraus, setzt die Stöpsel von R aber ein, und schaltet die eine der zu vergleichenden el. Kräfte e zwischen I und IV, die (stärkere und konstante) Vergleichs-Säule E zwischen II (V) und III, und zwar gleichnamige Pole von e und E mit I und III verbunden. Dann sucht man die Strecke a, bei welcher die Nadel in Ruhe bleibt. Die Säule e muſs, wenn sie inkonstant ist, zuletzt geschlossen werden, was man mit dem Kontaktröllchen selbst oder an der Klemme I ausführt. Wenn der Widerstand w_0 der Säule E bekannt ist, so hat man $e:E = a:(a+b+w_0)$.

Ist e' eine zweite Säule und findet man für diese bei der Vergleichung mit E die Strecke a', so ist $e:e' = a:a'$.

76. Elektromotorische Kraft in absolutem Maſse.

Vgl. die Eingangsbemerkung zu **74.**

Eine el. Kraft, welche im Widerstande W den Strom J erzeugt, ist $= W \cdot J$, und zwar gemessen in dem Maſssystem, in welchem W und J gemessen sind, z. B. in [C-G-S]-Einheiten. Ohm und Ampere geben Volt, wobei zwischen „legalen“ und „richtigen“ Volt zu unterscheiden ist. Vgl. **63** I u. Anh. 20.

1 richtiges Volt $= 10^8[\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-2}]$; 1 leg. Ohm $= 0{,}9972$ Ohm; 1 Siem. Einh. $= 0{,}9407$ Ohm.

I. Direkte Messung. Man schlieſst durch ein Galvanometer ev. mit zugeschaltetem Widerstand. Die Summe dieser äuſseren Widerstände sei $= w_1$, der Widerstand des Elements $= w_0$, die Stromstärke $= J$, dann ist $E = (w_0 + w_1)J$.

Bei empfindlichen Galvanometern kann w_0 und häufig auch der Galvanometerwiderstand vernachlässigt werden.

Vgl. auch **77** und die elektrometrische Methode **84a.** Über Klemmspannung **76a.**

Spannungsmesser. So heiſsen Galvanometer von sehr groſsem Widerstande, ev. einschlieſslich eines konstant vorgeschalteten Widerstandes (so daſs der Widerstand der Stromquelle dagegen vernachlässigt werden kann), wenn die Teilung gleich das Produkt Stromstärke $\times$ Widerstand, also die Spannung des Elements angibt, z. B. in Am $\times$ Ohm $=$ Volt. Ist der Widerstand des Spannungsmessers $= w$, so multipliciren Vorschaltwiderstände

von $9w$, $99w$ etc. den Wert der Teilung mit 10, 100 etc. Wenn w eine runde Zahl ist, z. B. = 10000 Ohm, so kann dieselbe Teilung auch für Strommessung beziffert sein.

Das Leitungsmaterial des Spannungsmessers soll von der Temperatur wenig beeinflufst werden (Tab. 25).

Die Prüfung eines Spannungsmessers kann mittels Strom- und Widerstandsmessung oder mit einer Säule von bekannter el. Kraft (63 II) geschehen.

II. Ohm'sche Methode. Durch zwei Messungen eliminirt man den Widerstand Säule + Galvanometer. Man schliefst durch Rheostat und Galvanometer und beobachtet die Ströme i_1 und i_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2. Dann ist

$$E = i_1 i_2 (R_1 - R_2)/(i_2 - i_1).$$

Der eine Strom mag ungefähr die Hälfte des anderen sein. 35° und 55° Ausschlag sind für die Tangentenbussole am besten.

Die Methode ist auf „konstante" Elemente beschränkt; bei starken Strömen nimmt die el. Kraft aller Säulen ab (S. 346). Dynamomaschinen sind von der Methode ausgeschlossen.

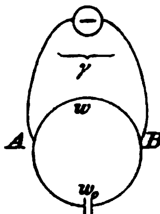
III. Poggendorff'sche Kompensationsmethode. Nach der in der Fig. 74 III dargestellten Schaltung. Ist durch den Widerstand R im Rheostaten der Strom im Galvanoskop G auf Null gebracht und dann J die Stromstärke in T, so ist die el. Kraft E

$$E = RJ.$$

Die Methode ist auch auf inkonstante Elemente anwendbar. Vgl. übrigens die Vorschriften unter 74 III.

76a. Potentialdifferenz im Schliefsungskreise. Klemmspannung.

Um die Potentialdifferenz (Spannungsunterschied) zu finden, welche zwischen zwei Punkten A und B eines Stromes besteht, zweigt man zwischen diesen Punkten durch ein empfindliches Galvanometer mit zugefügtem grofsem Widerstand ab. Ist γ der Gesamtwiderstand und i die Stromstärke in der Abzweigung, so ist der Spannungsunterschied P für sehr grofses γ einfach $P = i\gamma$. Ein Spannungsmesser gibt P direkt.



Sind die übrigen Widerstände gegen γ nicht zu vernachlässigen, so kommt eine Korrektion hinzu. Es sei w der Widerstand der Hauptleitung zwischen den beiden Punkten, w_0 ihr übriger Widerstand einschliefslich der Stromquelle, so war die Spannung P' vor dem Anlegen des Zweiges gleich

$$P' = i\left(\gamma + \frac{w_0 w}{w_0 + w}\right) = P\left(1 + \frac{1}{\gamma}\frac{w_0 w}{w_0 + w}\right).$$

Klemmspannung. Darunter versteht man die Potentialdifferenz an den Polen der Stromquelle (Batterie; Dynamomaschine), während dieselbe Strom gibt. Die Messung geschieht so, wie oben; nur legt man die Abzweigungspunkte an die Pole (Klemmen) der Stromquelle. Die Bestimmung ist von grofser Bedeutung bei Dynamomaschinen, da deren el. Kraft von der Stromstärke abhängt, bei Serienmaschinen sogar überhaupt nur vorhanden ist, wenn dieselben geschlossen laufen. Nur bei sehr grofsem äufseren Widerstande w ist die Klemmspannung P mit der ganzen el. Kraft E identisch; sonst ist, wenn w_0 den inneren Widerstand der Stromquelle bedeutet,

$$E = P(w_0 + w)/w \quad \text{oder} \quad = i(w_0 + \gamma(w_0 + w)/w).$$

Denn wenn i_0 der Strom in der Stromquelle, so ist $i_0 = i(w + \gamma)/w$. Also $E = w_0 i_0 + \gamma i = (w_0(w + \gamma)/w + \gamma)i = (w_0 + \gamma(w_0 + w)/w)i$ q. e. d.

Messung grofser Stromstärken mit dem Spannungsmesser.

An einen Leitungsteil vom bekannten Widerstande R (etwa indem man einen Starkstrom-Präcisionswiderstand R eingeschaltet hat **63**, S. 288), legt man einen Spannungsmesser an. Aus der Spannung P findet man den Strom in R gleich P/R. Der Stammstrom ist im Verhältnis $1 + R/\gamma$ gröfser, wenn γ den Widerstand des Spannungszweiges bedeutet. Häufig wird R gegen γ zu vernachlässigen sein. Vgl. auch **68a.**

77. Torsionsgalvanometer von Siemens und Halske (Frölich).

Strommessung. Man führt die Nadel durch Drehung des Torsionskopfes um den der Stromstärke proportionalen Winkel α auf ihre den Windungen parallele Nullstellung zurück.

Die Stromstärke ist dann $i = C \cdot \alpha$. C wird mit dem Silbervoltameter (**68** I) oder mit dem Clark- etc. Element (**68a**), oder durch Vergleichung mit einem Normalgalvanometer

bestimmt. Vgl. 69. Die von S. und H. ausgegebenen zwei Arten von Instrumenten sollen $C = 0{,}001$ bez. $0{,}0001$ Am/Grad haben.

Starke Ströme werden mit Abzweigung (64a) gemessen. Der Multiplikatorwiderstand beider Instrumente ist auf 1 bez. 100 Ohm abgeglichen. Es bewirkt also ein Zweigwiderstand z den Reduktionsfaktor $C = 0{,}001\,(z+1)/z$ bez. $0{,}0001\,(z+100)/z$ Am. Runde Zahlen erhält man durch $z = 1/9$ $1/99$ etc. bez. $z = 100/9$ $100/99$ Ohm etc., nämlich $C = 0{,}01$ $0{,}1$ etc. bez. $C = 0{,}001$ $0{,}01$ etc.

Spannungsmessung. Die Hinterschaltung von R Ohm zu den Instrumenten bewirkt den Wert eines Skalenteiles $= 0{,}001\,(R+1)$ bez. $0{,}0001\,(R+100)$ Volt. Widerstände von $R = 9$ 99 999 Ohm bez. 900 9900 99900 Ohm können zu den Instrumenten bezogen werden. Durch dieselben wird 1 Sk.-T. $= 0{,}01$ 0,1 1 bez. 0,1 1 10 Volt. Um Fehlern der Stromwärme thunlichst aus dem Wege zu gehen, schliefse man die Ströme nur während der Messungen.

Vom Erdmagnetismus sind die Angaben bei Orientirung in den Meridian unabhängig. Änderungen des Nadelmagnetismus dagegen, welche mit der Zeit oder durch einen zu starken Strom eintreten können, ändern die Konstante, die also häufig neu zu bestimmen ist.

Ebenso ist, wenn nicht Multiplikator und Nebenwiderstände aus einem gegen Temperatur unempfindlichen Materiale bestehen, auf die letztere zu achten.

Ausführlicheres s. v. Waltenhofen, Z. S. f. Elektrotechn. 1886, S. 154. Über starke Ströme W. Kohlrausch, Centr.-Bl. f. El.-Techn. 1886, 813.

77a. Dynamomaschinen.

Die Maschine kann als Stromerzeuger (Generator) oder als Krafterzeuger (Motor) laufen. Das Folgende betrifft hauptsächlich die Generatoren.

Vgl. Silv. Thompson, Dynamoel. Machinery 5. Aufl. 1896; deutsch von Strecker u. Vesper, Halle 1896.

A. Gleichstrom-Maschinen.

Wartung. Der Kollektor ist von Metallstaub frei zu halten, zuweilen mit Schmirgelpapier überlaufen zu lassen und darauf zu reinigen. Ist er stärker angefressen oder unrund, so wird er mit einem am Maschinengestell zu befestigenden Support abgedreht. Das Anfressen wird durch

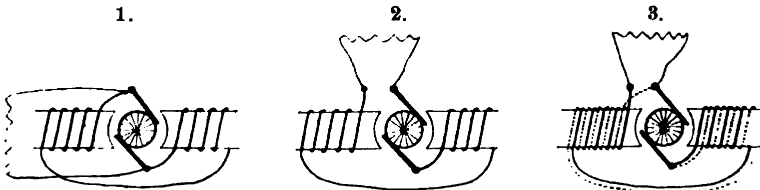
leichtes Auflegen der Bürsten und Einstellung auf Funkenfreiheit eingeschränkt.

Die Funken rühren von der Selbstinduktion in dem Teile des Ankers her, welcher einen Augenblick zuvor durch die Bürste kurz geschlossen war. Die Bürsten funkeln vornehmlich dadurch, dafs sie auf Kollektorstreifen liegen, deren Ankerwindungen nicht induktionsfrei sind, d. h. nicht mit der „neutralen Zone“ zusammenfallen. Die letztere steht nun, wenn die Maschine Strom hat, nicht genau senkrecht auf der Richtung des Feldes der Elektromagnetpole, sondern ist dadurch verschoben, dafs der Ankerstrom die Magnetisirungsrichtung des Ankerkernes gegen die Feldrichtung verdreht, und zwar um so stärker, je stärker der Strom ist. Die zur Funkenfreiheit nötige Verdrehung der Bürstenbrücke aus der Symmetrielage (bei dem Generator in, beim Motor entgegen dem Lauf) wächst also durch die „magnetische Rückwirkung des Ankerstromes“ mit dem letzteren (mit „der Belastung“), und zwar um so stärker, je gröfser bei einer Maschine die magnetisirende Kraft des Ankerstromes relativ zur Feldstärke der Schenkelpole ist. Man probirt die funkenfreie Stellung für die zeitweilige Stromstärke durch Verdrehung des Bürstenhalters aus. Bei Maschinen mit Doppelbürsten kann weiter eine kleine gegenseitige Verschiebung der Bürsten eines Paares helfen.

Wenn keine ständige Wartung vorhanden ist, stellt man nahe für die gröfste Stromstärke ein.

Ausgefaserte oder ungleich verschlissene Bürsten sind im Schraubstock sorgfältig zu beschneiden.

Die Maschinen sollen auf Schienen stehen, damit der Riemen zur Verminderung des Gleitens bequem angezogen werden kann.



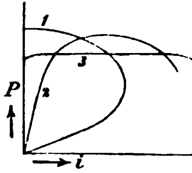
Gemäfs der Schaltung der Magnetwickelung teilt man ein in:

1. Nebenschlufsmaschine (am verbreitetsten; Lichtcentralen; Betriebsmotoren). Der Anker ist durch die (verhältnismäfsig dünndrähtige) Magnetwickelung und die äufsere Leitung nebeneinander geschlossen; Schema in Fig. 1. Die Klemmspannung ist bei kleinem äufseren Widerstande gleich Null und steigt mit dessen Anwachsen zu einem Grenzwert.

2. Hauptstrom- oder Serienmaschine (besonders als Strafsenbahnmotor; als Generator selten mehr gebraucht). Die (dickdrähtige) Magnetwickelung liegt mit Anker und der Aufsenleitung im einfachen Stromkreise (Fig. 2). Mit wachsendem äufseren Widerstand nimmt die el. Kraft des Generators bis auf Null ab. Die Klemmspannung hat für einen bestimmten äufseren Widerstand ein Maximum.

3. Gleichspannungs- oder Verbund- (Compound-)Maschine. Der Elektromagnet hat zwei Wickelungen. Die eine, dünndrähtige liegt wie bei der Nebenschlufsmaschine an den Bürsten (in Fig. 3 punktirt gezeichnet), oder auch an den Klemmen der Maschine. Die andere, dickdrähtige liegt mit dem Anker und der äufseren Leitung in Serienschaltung. Bei geeigneten Verhältnissen ist für normale Umdrehungszahl die Klemmspannung vom äufseren Widerstande wenig abhängig.

Bezeichnungen. i = Aufsenstrom, i_A = Ankerstr., i_N = Nebenschlufs-, i_S = Serienwicklungsstrom; w, w_A, w_N, w_S die entsprechenden Widerstände; E = elektrom. Kraft, P = Klemmspannung. Bei der Serienmaschine ist $w_A + w_S$ der Maschinen-Widerstand und die i sind alle gleich, bei der Nebenschlufsmaschine ist $i_A = i + i_N$.



Den Zusammenhang zwischen i und P für die drei Schaltungsarten zeigen die Kurven. Die gröfsten Stromstärken können übrigens wegen unzulässiger Erhitzung der Maschine nicht dauernd benutzt werden.

Technische Betriebe arbeiten meist auf konstante Spannung (an Glühlampen etc.), selten auf konstanten Strom. Um die Spannung konstant zu erhalten, dienen Regulirwiderstände, welche in Nebenschlufswickelungen oder neben Serienwickelungen geschaltet werden können.

I. Stromstärke. Über die Messung starker Ströme durch die Tangentenbussole vgl. **64**, durch Abzweigung empfindlicher Galvanometer **64a** u. **77**, durch die technischen Stromzeiger **67a**, durch Spannungsmessung an den Enden eines bekannten Widerstandes **68a** und **76a** am Schlufs.

Für feine Messungen sehr starker Ströme ist die letztere Methode unter Anwendung eines Starkstrom-Präcisionswiderstandes (S. 288) besonders geeignet.

Den Maschinenströmen kommen im allgemeinen Schwankungen zu, deren Einflufs durch gute Dämpfung der Instrumente vermindert wird. Um von mehreren Gröfsen (Strom, Spannung, Lichtstärke) richtig zusammengehörige Momentanwerte zu erhalten, geschehen die Ablesungen auf einen und denselben Takt des Motors unter ev. Auslassen bei dem Aussetzen von Gasmotoren.

II. Widerstand. Über Mefsmethoden s. **70** bis **71c**. Technisch sind hauptsächlich die betriebswarmen Widerstände von Bedeutung. Deren Messung kann, mit Ausnahme des Ankerwiderstandes, während des Betriebes durch Messung von Stromstärke und Spannung nach **71** II 2 oder sicherer nach **71** II 3 mit Einschaltung eines Starkstrom-Präcisionswiderstandes geschehen.

Den Ankerwiderstand mifst man in derselben Weise sofort nach Aufhören des Betriebsstromes mit einem Strom von nahe gleicher Stärke aus Akkumulatoren. Magnet- und Ankerwicklung werden während der Messung von einander getrennt oder der Anker festgekeilt. Unregelmäfsige Übergangswiderstände an den Bürsten eliminirt man durch Beobachtungen bei verschiedener Kollektorstellung. Die Bürsten sollen gut eingelaufen, der Kollektor frisch geschmirgelt sein.

Der Widerstand w_0 kalt und w warm liefert die Temperaturerhöhung in Graden etwa $= 250 \cdot (w - w_0)/w_0$. Die Erhöhung soll bei Dauerbetrieb höchstens 40° erreichen.

III. Elektromotorische Kraft. Direkt mefsbar nach 76a, 77 ist die Spannung P zwischen den Klemmen, oder P_B zwischen den Bürsten der Maschine. Ebenso ist i und i_N mefsbar.

Die gesamte el. Kraft E ist dann allgemein gleich der Bürstenspannung, vermehrt um den (kleinen) Spannungsverlust im Anker $E = P_B + i_A w_A$. Für die Nebenschlufsmaschine ist $P_B = P$, $i_A = i + i_N$. Für die Serienmaschine $P_B = P + iw_S$, $i_A = i$. Für die Verbundmaschine mit kurzem Nebenschlufs $P_B = P + iw_S$, $i_A = i + i_N$.

IV. Leistung oder Effekt (Stromarbeit pro Sekunde). Als Einheit dient das Watt = Volt $\times$ Ampere; vgl. Anh. 22. 1 Watt $= 10^7$[C-G-S] $= 0{,}102$ kg-Gew. $\times$ m/sec $= 0{,}00136$ Pferdekr. 1 Pferdekraft $= 0{,}736$ Kilowatt (rund $^3/_4$).

Die äufsere, nutzbare Leistung ist $L = Pi$, die gesamte elektrische Leistung $= Ei_A$ oder $= Pi + V$, wo V die Summe der Verluste durch Stromwärme in der Anker- und Magnetwicklung bedeutet. V ist bei Nebenschlufsmaschinen $= i_N P + i_A^2 w_A$, bei Serienmaschinen $= i^2(w_A + w_S)$; bei Verbundmaschinen entsteht ein aus diesen zusammengesetzter Ausdruck.

Elektrisches Güteverhältnis. So heifst das Verhältnis γ der äufseren zur gesamten elektr. Leistung. Es ist also

$$\gamma = \frac{L}{Ei_A} = \frac{Pi}{Pi + V}.$$

Dasselbe beläuft sich bei modernen Maschinen von über 10 K-W. auf über 90%, von 5 K-W. auf knapp 90%, von 1 K-W. auf etwa 80%.

V. **Wirkungsgrad** η nennt man das Verhältnis der von der Maschine geleisteten äufseren elektrischen Arbeit zu der durch die Maschine verbrauchten mechanischen Arbeit L_0, also $\eta = L/L_0 = Pi/L_0$, beide in gleichem Mafse ausgedrückt (vgl. oben). Moderne Maschinen von einer

Leistung =	100	10	2	1	0,1 Kilowatt
haben etwa η =	über 90	85—90	80	70—75	60—70%.

Elektrische Bestimmung des Arbeitsverbrauchs L_0. Aufser dem Verlust V durch Stromwärme (s. v. S.) wird eine Verlustsumme V' durch Reibung, Magnetisirungswiderstand (Hysterese) und „Wirbelströme" im Eisen bewirkt und es ist $L_0 = Pi + V + V'$.

Zuerst belastet man die Maschine bei normaler Geschwindigkeit (Tachometer von Horn; von Bufs-Sombart etc. Vgl. hierüber Kittler, Handbuch S. 474) mit vollem, oder halbem, viertel etc. Strom, mifst i_N und bestimmt Pi und V nach Nr. IV. Dann führt man den Magnetwicklungen nach Lostrennung derselben vom Anker denselben Strom i_N von aufsen zu, wobei die Maschine sehr nahe denselben Magnetismus erhält wie vorher. Nach Wegnahme des Treibriemens wird an die Bürsten von aufsen allmählich eine so hohe Spannung P' angelegt, dafs der Anker, nun als Motor leerlaufend, die vorige Geschwindigkeit bekommt. Dabei nehme er den Strom i' auf, so ist (von Riemendruck und Änderung der Anker-Rückwirkung abgesehen) $V' = i'P' - i'^2 w_A$, worin das zweite Glied meist zu vernachlässigen ist.

Damit ist L_0 gefunden und η berechenbar.

Beispiel. Eine Nebenschlufsmaschine gab bei 500 Dreh./min $P = 250$ Volt, $i = 212$ Am, also $L = 53{,}0$ Kilowatt. Dabei war $i_N = 3{,}9$ Am, also $i_A = 216$; ferner $w_A = 0{,}0662$ Ohm. Hieraus findet sich der Verlust durch Stromwärme

$$V = 216^2 \cdot 0{,}0662 + 3{,}9 \cdot 250 = 3090 + 970 = 4060 \text{ Watt}$$

(also 7,7% von L), so dafs das elektr. Güteverhältnis

$$\gamma = \frac{53{,}0}{53{,}0 + 4{,}06} = 0{,}929 \text{ gefunden ist.}$$

Als Motor leerlaufend mit 3,9 Am im Nebenschlufs brauchte die Maschine, um auf 500 Dreh./min zu kommen, eine Bürstenspannung $P' = 252$ Volt, einen Ankerstrom $i' = 6{,}40$ Am. Also ist

$$V' = 6{,}40 \cdot 252 - 6{,}4^2 \cdot 0{,}066 = 1610 \text{ Watt (d. h. } 3{,}0\% \text{ von } L)$$

und der Wirkungsgrad $\eta = \dfrac{53{,}0}{58{,}7} = 0{,}903$.

Mechanische Messung des Arbeitsverbrauchs L. Man multiplicirt die Umfangsgeschwindigkeit der Riemenscheibe der Dynamomaschine mit der Differenz der Spannungen des ablaufenden und des auflaufenden Riementeils. Multiplikation mit 9,81 verwandelt die Kg-Gew. m/sec in Watt. Zur Messung dient z. B. das Hefner'sche oder das Fischinger'sche Transmissions-Dynamometer.

(Kittler, Handbuch. 2. Aufl. I S. 434—458.)

B. Wechselstrom-Maschinen.

Die Magnete werden durch einen besonderen Strom aus einer Hilfsmaschine oder aus Akkumulatoren erregt. Man unterscheidet Ein- und Mehrphasenmaschinen. Die in Deutschland gebräuchlichen Wechselzahlen (Halbperioden /sec) liegen zwischen 80 und 100.

I. **Effektive oder wirksame Stromstärke** i_e oder Stromstärke kurzweg heifst die Wurzel aus dem mittleren zeitlichen Quadrat der Stromstärke (vgl. **66a**). Ebenso definirt man die wirksame Spannung P_e.

Also $$i_e = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i^2 dt\right)} \qquad P_e = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau P^2 dt\right)},$$

wo τ, einen symmetrischen Verlauf des positiven und des negativen Stromstofses vorausgesetzt, z. B. die Dauer einer halben Periode bedeuten kann.

Die Instrumente mit quadratischer Empfindlichkeit, Elektrodynamometer (**66a**), Hitzdraht-Strommesser (**67**, 9), Elektrometer in Doppelschaltung (**84a**) geben, unabhängig von der Wechselzahl und der Gestalt der Spannungskurve, diese Gröfsen direkt. Strommesser mit weichem Eisen (**67a**, 4, 5, 6) müssen für die verschiedenen Wechselzahlen geaicht werden; geeignete Formen des Eisens können jedoch die Differenz der Angaben für Gleich- und Wechselstrom bis zu Wechseln von 100/sec auf 1 bis 2% vermindern.

Bruger, Bericht d. Elektr.-Kongresses, Frankfurt 1892, Bd. 2. S. 89 ff.

II. „**Scheinbarer Widerstand**“. Für einen unverzweigten Leiter vom Widerstande w und dem Selbstinduktionskoefficienten s (**83a**; Anh. 20b) mit sinusförmiger Endspannung von der Wechselzahl ν ist die Stromstärke

$$i_e = P_e / \sqrt{w^2 + \nu^2 \pi^2 s^2}.$$

$\sqrt{w^2 + \nu^2 \pi^2 s^2}$ heifst der scheinbare Widerstand (Impedanz).

III. Effektive elektromotorische Kraft E_e. Dieselbe wird aus der Klemmspannung P_e, dem Spannungsverlust im Anker $v_e = i_e \sqrt{w_A^2 + v^2 \pi^2 s_A^2}$, der inneren Verzögerung φ_A des augenblicklichen Spannungsverlustes v gegen i, gegeben durch $\operatorname{tg} \varphi_A = v \pi s_A / w_A$, und der äufseren Verzögerung φ von P gegen i (vgl. V) nach der Beziehung gefunden

$$E_e^2 = P_e^2 + v_e^2 + 2 P_e v_e \cos(\varphi_A - \varphi).$$

Die Formel setzt Sinusströme voraus. Über Messung von P_e s. vor. S.

IV. Zeitlicher Verlauf des Stroms oder der Spannung. Zu dessen Untersuchung dient ein auf der Welle der Maschine montirter periodischer Momentan-Kontakt.

Z. B. Lenz, Pogg. Ann. 76, 494. 1849; 92, 128. 1854; Joubert Ann. de l'éc. supér. 10, 131. 1881; neuerdings z. B. Roessler, El.-techn. Z. S. 16, 316. 1894.

Unter folgeweiser Winkelverstellung des Kontakts lassen sich Spannungskurven sowohl an den Maschinenklemmen wie auch an beliebigen Apparaten im Stromkreise (Bogenlampen, Transformatoren etc.) mit dem Elektrometer oder dem ballistischen Galvanometer aufnehmen. Im letzteren Fall ist ein Kondensator parallel zu schalten, der, nach der Ladung durch den Kontakt, durch das Galvanometer entladen wird. Auch beim Elektrometer werden Schwankungen durch Kontaktverschiedenheiten mit Hilfe eines Kondensators eliminirt. Die Spannung an einem im Stromkreise sitzenden, bekannten, induktionsfreien Widerstande liefert die Kurve der Stromstärke.

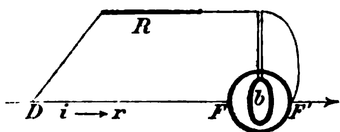
Mefsinstrumente und Mefsmethoden der Wechselstromtechnik siehe bei Feldmann, Wechselstromtransformatoren, Leipzig 1894 S. 229—405.

V. Die Leistung L eines Wechselstroms von der Momentanstärke i zwischen zwei Punkten mit der zugehörigen Spannungsdifferenz P ist allgemein (τ = halbe Periodendauer)

$$L = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau i P dt.$$

Wegen Selbstinduktion, Kapacität, äufserer el. Wechselkräfte (Wechselstrommotoren) haben P und i im allgemeinen Phasendifferenz, so dafs das Integral nur im speciellen Fall gleich $P_e i_e$ ist. Zur direkten Messung von L, unabhängig von der Phasendifferenz, dient der elektrische Effektmesser.

Effektmesser („Wattmeter"). Derselbe besteht aus einem Dynamometer mit dickdrähtiger fester Spule (Stromspule; Widerstand $= r_f$) und dünndrähtiger beweglicher Spule (Widerstand $= r_b$) mit einem grofsen, der letzteren vorgeschalteten induktionsfreien Widerstande R. Die Leitung $r_b + R$ heifse der Spannungszweig. Die Leistung $L = Pi$ eines Gleichstroms oder das obige Integral des Wechselstroms in einer Strecke des Stroms wird gemessen, indem man die Stromspule in i einschaltet und gleichzeitig den Spannungszweig anlegt.



Die Leistung L in dem Leitungsteile r einschl. r_f ist dem Skalenausschlage α proportional $L = A.\alpha$. Die Instrumentkonstante A würde aus dem Reduktionsfaktor C des Dynamometers für Strommessung (66a, 69) als $A = C^2(R + r_b)$ entstehen. Dieselbe läfst sich direkt durch Anlegung des Effektmessers an einen bekannten Gleichstrom i vom Widerstande w einschl. r_f (also von der Leistung $i^2 w$) als $A = i^2 w/\alpha'$ ermitteln, wenn α' den hier erhaltenen Ausschlag bedeutet.

Instrumente von Bláthy (Ganz u. Comp., Helios), von Hartmann und Braun etc.

Bestimmung der Leistung. 1) Mit dem Effektmesser. Schaltung siehe Fig.; r ist der Nutzwiderstand mit den Endpunkten D und F, $DRbF'$ der Spannungszweig.

Ist der Strom im Spannungszweig im Phaseneinklang mit der Spannung DF', so liefert das gehörig geaichte Instrument die Leistung in $r +$ derjenigen in der Stromspule. Letztere ist Korrektionsgröfse und als $r_f i_e^2$ zu bestimmen.

Soll dagegen die ganze äufsere Arbeit der Maschine gemessen werden, so fallen D und F' in die Maschinenklemmen und die kleine Leistung in der Spannungsleitung $P_e^2/(R + r_b)$ wird addirt.

Eine sehr kleine Phasendifferenz δ zwischen Spannung DF' und Strom i_b bleibt gewöhnlich vorhanden, $\operatorname{tg}\delta = \frac{v\pi s_b}{R + r_b}$. Bei den üblichen Instrumenten ist $\delta = 0{,}001$ bis $0{,}01$. Dies bedingt, dafs die Angaben des Effektmessers, wenn die Phasendifferenz von Strom i

und Spannung DF' durch φ_n bezeichnet wird, mit $\frac{1+\delta^2}{1+\delta \operatorname{tg} \varphi_n}$ multiplicirt werden müssen. Bestimmung von φ_n siehe unter 2).

Stefan, offic. Bericht über die Wiener el. Ausstellung 1883 p. 203.

Die angegebene Korrektion gilt streng nur für Sinusströme, bleibt aber auch für stark abweichende Stromformen moderner Maschinen bis auf sehr geringe Beträge (z. B. einige Zehntausendtel) giltig.

H. F. Weber, offic. Bericht über die el. Ausstellung Frankfurt Bd. II. S. 43 ff.

2) Für Sinusform von Spannung und Strom, was konstante Selbstinduktion (kein Eisen) voraussetzt, ist

$$L = i_e P_e \cos \varphi,$$

wo φ Phasendifferenz zwischen i und P.

Auch für von Sinusform abweichende Ströme wird L, wie es auch die Behandlung mit Fourier'schen Reihen angemessen erscheinen läfst, in dieser Form geschrieben. Ebenso bei Anwesenheit von Eisen, wo Strom und Spannung einen unähnlichen zeitlichen Verlauf haben, die Phasendifferenz sich also nicht mehr definiren läfst. In diesen Fällen heifst der durch $\cos \varphi$ ausgedrückte Faktor „Leistungsfaktor".

Messung von L mit dem Effektmesser nach 1) und gleichzeitig Strom- und Spannungsmessung liefern den Leistungsfaktor (Phasendifferenz).

Im Anschlufs an die Gleichung zerlegt man in der Technik den Strom in einen „Wattstrom" $i_e \cos \varphi$ und einen „wattlosen Strom" $i_e \sin \varphi$.

3) Bei selbstinduktionslosen Widerständen (Glühlampen) ist $L = i_e P_e$.

4) Ist im Kreise zwar Selbstinduktion, aber kein Eisen (keine Hysteresis) und auch keine fremde el. Kraft oder Wirbelstrom vorhanden, so findet nur Energieumsatz in Joule'sche Wärme des Nutzwiderstandes r statt, dann ist L also gleich $i_e^2 r$.

VI. Der Wirkungsgrad einer Wechselstrommaschine ergibt sich auf analogem, elektrischem Wege wie bei der Gleichstrommaschine unter A Nr. V, aber weniger einfach und unsicherer im Resultat.

Messungen an elektrischen Lampen.

Die Untersuchung elektrischer Lampen besteht in gleichzeitiger Messung der Lichtstärke und des Energieverbrauchs, also bei Gleichstrom des Produkts Spannung $\times$ Stromstärke, bei Wechselstrom seiner in B, V behandelten Leistung. Über Photometrie vgl. **47a**.

Glühlampen. Je höher die Temperatur der Faser, um so geringer ist der Energieverbrauch pro Lichteinheit, um so geringer aber auch die Lebensdauer der Lampe. Die normale Spannung, bez. seltener Stromstärke muſs daher sehr nahe innegehalten werden. 1% Änderung der Spannung bewirkt 6 bis 7% Änderung der Lichtstärke.

Die Lichtstärke wird gewöhnlich senkrecht zur Fadenebene gemessen. Die mittlere räumliche Lichtstärke wird erhalten, indem man eine um die Lampe gedachte Kugelfläche in Zonen gleichen Flächenraums und diese durch Meridiane in gleiche Teile zerlegt. Man miſst in der Richtung nach den Mitten dieser Teile hin und nimmt das Mittel. Je mehr Teile, desto genauer ist das Resultat. Die Lampen werden hierbei auf einem Gestell mit horizontaler und vertikaler Drehungsaxe mit Teilkreisen montirt.

Bogenlampen lassen sich nicht unmittelbar mit der Hefnerlampe oder Kerze vergleichen. Als Zwischenglied dient eine hochkerzige Glühlampe oder eine groſse, ½ Stunde vor der Messung angezündete Petroleumlampe, die mit beiden Lichtern verglichen ist.

Bei Messungen nach verschiedenen Richtungen, für welche ein Handregulator am geeignetsten ist, benutzt man wohl einen um 45° gegen die Photometerbank geneigten, um eine der letzteren parallele Axe drehbaren Spiegel, muſs dann aber die Abschwächung bei der Reflexion für den Spiegel ein für allemal besonders bestimmen. Direkter ist die Anwendung eines in beliebiger Richtung einstellbaren Photometers, etwa desjenigen von Leonh. Weber mit dem Lummer-Brodhun'schen Würfel (**47a**, 2u. 3).

Vgl. z. B. Krüss u. Voit, Bericht d. Münch. El.-Ausstellung II S. 76; v. Hefner-Alteneck, El. techn. Z. S. 1883. 445; Leonh. Weber ib. 1884. 176; Möller ib. 1884. 370. 405; Krüss, die el. Photometrie; Grawinkel u. Strecker, Hilfsbuch 1895.

77b. Galvanische Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität oder eines magnetischen Feldes.

I. Mit Voltameter und Tangentenbussole.

Derselbe Strom passirt eine Tangentenbussole mit n Windungen vom mittleren Halbmesser R cm und ein Voltameter von dem auf [C-G-S] bezogenen elektrochemischen Äquivalent A; z. B. 11,18 mg Ag. In t sec werde die Menge m ausgeschieden, während φ der mittlere Ausschlag der Bussole ist. Dann ist nach **64** und **68** die Stromstärke i einerseits $= \mathrm{tg}\,\varphi \cdot RH/(2\pi n)$ [C-G-S], andererseits $= m/At$, also die Horizontalintensität H

$$H = \frac{m}{At}\frac{2\pi n}{R}\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\,[\text{C-G-S}].$$

II. Mit Bifilargalvanometer und Tangentenbussole (W. Weber).

Der Strom durchfliefst ein Bifilargalvanometer (**67**) von der Direktionskraft D (**53**) und der Windungsfläche f (**83**) und eine Tangentenbussole (vgl. oben). Die gleichzeitigen Ablenkungen seien α am Bifilar und φ an der Tangentenbussole.

Dann erhält man die Horizontalintensität H aus

$$H^2 = \frac{D}{f}\frac{2\pi n}{R}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Starke magnetische Felder (z. B. zwischen den Polen eines Elektromagnets). Das Verfahren ist mit einem kleinen Bifilar auch hier brauchbar.

Himstedt, Wied. Ann. 11, 828. 1880; Stenger ib. 33, 312. 1888.

Stromstärke. Man erhält zugleich die Stromstärke i in absolutem Mafse aus

$$i^2 = D/f \cdot R/2\pi n \cdot \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Der Strom wird in beiden Instrumenten kommutirt. Über Korrektionen der Tangentenbussole vgl. **64** II. Zu R kommt ev. überall der Torsionsfaktor $1+\Theta$.

Die Ausdrücke ergeben sich, wenn man aus den beiden Gleichungen der einzelnen Instrumente (**64** und **67**) i oder H eliminirt.

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 138, 1. 1869.

III. Mit dem Bifilargalvanometer und einer Magnetnadel (F. K.).

Nördlich oder südlich im Abstande a cm von der Mitte der Bifilarrolle ist in gleicher Höhe eine kurze Magnetnadel

aufgehangen. Der Strom, welcher den Ausschlag α des Bifilars bewirkt, lenke die Nadel um ψ ab. r sei der genähert bekannte mittlere Halbmesser der Bifilarrolle. Dann ist

$$H^2 = \frac{D}{a^3(1-\frac{9}{8}r^2/a^2)(1+\Theta)} \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\psi}$$

und

$$i^2 = \frac{a^3 D}{f^2}\left(1-\frac{9}{8}\frac{r^2}{a^2}\right)(1+\Theta)\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi}{\cos\alpha}.$$

Nadellänge, sowie Dicke und Breite der Windungslage werden so klein vorausgesetzt, dafs ihre Quadrate gegen a^2 verschwinden.

Um a einwandsfrei zu erhalten, stellt man das Magnetometer nördlich und südlich auf, setzt für a den halben Abstand des Aufhängefadens und nimmt aus den Paaren von Ablenkungen die Mittel. Selbstverständlich kommutirt man den Strom. Vergleiche auch **60a**.

Beweis. α ist gegeben durch $D\cdot\sin\alpha = fiH\cdot\cos\alpha$. Für die Ablenkung ψ der Nadel durch den Strom der, selbst um den kleinen Winkel α abgelenkten, Rolle gilt $H(1+\Theta)\sin\psi = \frac{fi\cos\alpha}{a^3(1-\frac{9}{8}r^2/a^2)}\cos\psi$, woraus sich die obigen Ausdrücke ergeben.

Beobachtung aus 1. Hauptlage. Man stellt das Magnetometer östlich und westlich vom Bifilar auf; dann ist

$$H^2 = \frac{2D}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}(1+\Theta)} \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\psi}.$$

Über einige Korrektionen s. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

77c. Elektromagnetische Drehung des Lichtes (Verdet'sche Konstante).

Ein polarisirter Lichtstrahl durchsetze einen „magnetooptisch aktiven" Körper von der Länge l in der Richtung der Kraftlinien eines magnetischen Feldes H. Der Drehungswinkel α des Lichtstrahles ist dann (Faraday, Verdet)

$$\alpha = C\cdot Hl.$$

C ist die magnetooptische oder Verdet'sche Konstante des Körpers. Die Drehung findet in der Richtung des Stromes statt, welcher das magnetische Feld durch Umkreisen hervorruft.

Über die Messung von α s. **46** I 1 bis 6. Das magnetische Feld H wird zwischen breiten Elektromagnetpolen mit mög-

lichst kleiner Durchbohrung oder für genauere Messungen in einer Spule erzeugt (**77b** II und **81b**).

Für Natriumlicht bei 18° ist (Arons, H. Becquerel, Bichat und de la Rive, Gordon, Köpsel, Quincke, Rayleigh, Rodger und Watson)

in	Schwefelkohlenstoff	Wasser
$C =$	0,0425′	0,0131′[$cm^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}sec$].

C nimmt mit wachsender Temperatur ab, auf 1° bei CS_2 um 0,00007, bei Wasser in mittl. Temp. um 0,000002. Es ist beiläufig dem Quadrat der Wellenlänge λ des Lichtes umgekehrt proportional, genauer $C = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$.

Rodger und Watson, Phil. Trans. 186 A, 621. 1895; Z. S. f. phys. Ch. 19, 323. 1896.

Strommessung. Sehr starke Ströme lassen sich durch die Drehung z. B. in CS_2 innerhalb einer Drahtspule (**81b** I) nach den vorigen Formeln genähert messen.

78. Die Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung. (Ballistisches Galvanometer.)

Es soll bedeuten

K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers (**54**),

D die Direktionskraft (**36**; Anh. 9), welche für eine einzelne Magnetnadel $= MH(1+\Theta)$ (Anh. 16), für einen Körper mit Direktionskraft durch einen elastischen Aufhängedraht nach **36** gleich $\frac{1}{2}\pi \cdot [F] \cdot r^4/l$,

p das Dämpfungsmoment, d. h. den Faktor, mit welchem die jeweilige Winkelgeschwindigkeit das der Bewegung widerstehende Drehungsmoment ergibt,

u_0 die Winkelgeschwindigkeit bei dem Durchgang durch die Ruhelage,

α den Ausschlag, welcher ohne Dämpfung darauf erfolgen würde,

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ die Ausschläge, welche mit Dämpfung erfolgen,

$k = \alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_2 : \alpha_3 = \ldots$ das Dämpfungsverhältnis,

$\lambda = \log k$ das briggische logarithmische Dekrement,

$\Lambda = \log\text{nat}\, k = 2{,}3026\,\lambda$ das natürliche logarithmische Dekrement (welches für schwache Dämpfung gleich $k-1$ ist),

τ die Schwingungsdauer, welche ohne Dämpfung gelten würde,

T die Schwingungsdauer mit Dämpfung.

Alsdann gelten folgende Beziehungen.

1. $$\Lambda = \frac{\pi}{2}\frac{p}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} = \frac{1}{2}\frac{p}{K}T. \qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}},$$ 2.

$$T = \pi \frac{K}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} = \tau \frac{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}{\pi} \quad \text{oder} \quad = \tau \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}}. \qquad 3.$$

Die Schwingungsdauer wächst also mit der Dämpfung. Für schwache Dämpfung kann man schreiben, da π^2 nahe $= 10$ und $\Lambda = k - 1$ ist, $T = \tau(1 + \frac{1}{20}(k-1)^2)$. Eine Dämpfung von einigen Procenten beeinflufst also die Schwingungsdauer nicht merklich. Vgl. Tab. 21b.

Bedeutet u_1 die Geschwindigkeit bei der ersten Rückkehr in die Gleichgewichtslage, so ist

$$u_0 = k \cdot u_1. \qquad 4.$$

Ferner ist

$$\alpha = \alpha_1 \, k^{\frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\Lambda}}. \qquad 5.$$

Endlich erhält man aus dem Ausschlage die Anfangsgeschwindigkeit

$$u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha = \pi/\tau \cdot \alpha_1 \, k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}. \qquad 6.$$

π/Λ ist zum Aufschlagen des arc tg durch Multiplikation mit 57,296 in Bogengrade umzurechnen. $k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}$ ist bis $k = 2$, d. h. bis $\lambda = 0{,}3$ oder $\Lambda = 0{,}7$ hinreichend genau $= 1 + 1{,}160 \cdot \lambda$, für schwache Dämpfung auch $= \sqrt{k}$. Vgl. hierfür und für $\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}/\pi$ bis $k = 3$ auch Tab. 21b.

Wenn das Dämpfungsmoment $p \gtreqless 2\sqrt{KD}$ wird, so geschehen keine Schwingungen mehr, sondern die rückkehrende Nadel nähert sich der Ruhelage aperiodisch.

Über die Abnahme von k bei gröfseren Schwingungen mit der Schwingungsweite s. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471. 1880.

Dämpfung, Galvanometerfunktion und Widerstand.

Handelt es sich um ein Galvanometer, also um die Dämpfung einer Magnetnadel durch einen Multiplikator oder um die Dämpfung einer im Magnetfeld schwingenden geschlossenen Spule (67a, 7), so besteht zwischen log. Dekrement und Galvanometerkonstante eine nahe Beziehung. Es sei

q das von dem Strome Eins bewirkte Drehungsmoment, also die sog. „dynamische Galvanometerkonstante“.

Für die Magnetnadel (Magnetismus $= M$) bedeute G die „Multiplikator-Funktion“ d. h. das Drehmoment des Stromes Eins auf eine Nadel vom Magnetismus Eins, welches der Gestalt und der Windungszahl proportional ist; dann ist

$$q = GM \qquad 7a.$$

Für die Spule ist $q =$ Feldstärke $\times$ Windungsfläche

$$q = Hf. \qquad 7b.$$

In beiden Fällen gibt nach dem Induktionsgesetz (Anh. 20) $q \cdot u$ die el. Kraft, welche durch die Winkelgeschwindigkeit u entsteht. Nennt man w den Widerstand des Stromkreises in abs. Mafs, so entsteht also der Strom qu/w, und von diesem eben stammt das dämpfende Drehungsmoment, welches danach die Gröfse $q \cdot qu/w = u \cdot q^2/w$ hat. Hiernach ist also q^2/w das Dämpfungsmoment, welches wir oben p nannten und welches nach Gleichung 1. gleich $2K\Lambda/T$ ist. Also hat man

$$p = q^2/w = 2K\Lambda/T. \qquad 8.$$

p oder q^2/w, welches mit K, Λ und T so einfach zusammenhängt, ist dem

Magnetismus der Nadel, welche in dem Multiplikator schwingt, oder der Stärke des Feldes, in welchem die Spule schwingt, quadratisch proportional. Aufserdem hängt es von der Gestalt des Multiplikators ab, aber (bei Kurzschlufs) nicht von dem Querschnitt des Drahtes, mit welchem der Raum bewickelt ist. Denn wenn man diesen Querschnitt in irgend einem Verhältnis kleiner, also die Windungszahl in demselben Verhältnis gröfser nimmt, so ändert sich offenbar q in dem gleichen Verhältnis, w aber mit dem Quadrate desselben. q^2/w bleibt also konstant. $q/\sqrt{w}$ bedeutet die „dynamische Galvanometerkonstante" für eine Wickelung, welche den Widerstand $=1$ ergibt. Der Widerstand der Zuleitungsdrähte einer aufgehangenen Spule ist hierbei nicht berücksichtigt.

Aus K, Λ und T läfst sich q bez. w nach obigem einzeln bestimmen, wenn w bez. q bekannt ist.

Endlich sei noch, wie in **64** ff.:

C der gewöhnliche „Reduktionsfaktor" des Galvanometers, welcher aus der Ablenkung φ (bez. $\operatorname{tg}\varphi$) die Stromstärke i in abs. Mafse als $i = C\varphi$ gibt, d. h. $\qquad C = D/q$. 9.

Dies gibt für ein Nadelgalvanometer

$$C = 1/q \cdot MH(1+\Theta) = 1/G \cdot H(1+\Theta) \qquad 10a.$$

und für ein Spulengalvanometer $C = D/(Hf)$. 10b.

In Wirklichkeit rührt ein Teil der Dämpfung von dem Luftwiderstande etc. her. Es genügt, in Gl. 8 statt Λ zu setzen $\Lambda - \Lambda'$, wo Λ' das log. Dekrement ist, welches bei geöffnetem Multiplikator stattfindet.

Man setzt hier überall voraus, dafs Nadel bez. Spule kleine Bewegungen machen und nicht in Stellungen kommen, in denen die Multiplikatorfunktion bez. das magnetische Feld sich ändern (vgl. vor. S. und **66**).

Ableitung. Die Differentialgleichung der gedämpft schwingenden Nadel ist $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{p}{K}\frac{dx}{dt} + \frac{D}{K}x = 0$, wo x den zur Zeit t stattfindenden Ablenkungswinkel bedeutet. Die Integration der Gleichung ergibt für den Fall $p < 2\sqrt{KD}$ den periodischen Zustand in der Form

$$x = Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t} \sin\left(\frac{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}}{K}t\right) \qquad 11.$$

Daraus lassen sich die Gesetze Nr. 1 bis 10 ableiten.

Aperiodischer Zustand ($p > 2\sqrt{KD}$). Eine vorhandene Ablenkung x_0 von der Gleichgewichtslage fange zur Zeit $t=0$ an zu verschwinden. Dann besteht zur Zeit t noch die Ablenkung x, wenn $\sqrt{p^2 - 4KD} = E$ abgekürzt wird:

$$x = x_0 \cdot \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\left[\left(1+\frac{p}{E}\right)e^{\frac{1}{2}\frac{E}{K}t} + \left(1-\frac{p}{E}\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{E}{K}t}\right]. \qquad 12.$$

Für den Grenzfall der Aperiodicität ($p = 2\sqrt{KD}$) geht dies über in

$$x = x_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{p}{K}t\right) = x_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{D}{K}}\cdot t}\left(1 + \sqrt{\frac{D}{K}} \cdot t\right). \qquad 13.$$

Endlich für ganz langsame Bewegungen, wenn p sehr grofs gegen $2\sqrt{KD}$,

$$x = x_0 \cdot e^{-\frac{D}{p}\cdot t} = x_0 \cdot e^{-D\frac{w}{q^2}t} = x_0 \cdot e^{-C\frac{w}{q}t}. \qquad 14.$$

Es ist hiernach, wenn die Empfindlichkeit $1/C = q/D$ immer weiter gesteigert wird, für ein Spulengalvanometer eine immer langsamere Bewegung der Spule unvermeidlich, welche das Instrument schliefslich unbrauchbar macht. Das Nadelgalvanometer läfst dies durch Anwendung einer schwachen Nadel vermeiden. Vgl. auch **67a**.

78a. Messung eines kurz dauernden elektrischen Stromes oder einer Elektricitätsmenge.

I. Mit dem ballistischen Galvanometer.

Ein gegen die Schwingungsdauer kurzer Strom (Stromstofs) erteilt der Nadel, bez. der Spule, eine Geschwindigkeit und infolge deren einen (kleinen) Ausschlag, proportional mit der Elektricitätsmenge Q (Quantität, Stromintegral, Strommenge, Entladungsmenge, $\int i dt$), welche durch den Querschnitt der Leitung hindurchfliefst. Es sei C der gewöhnliche Reduktionsfaktor (**64. 69**) des Galvanometers. Da die Ausschläge mit Spiegel und Skale beobachtet werden, so wird bequemer der Reduktionsfaktor $\mathfrak{C}$ für 1 Sk.-T. eingeführt (**66**) $\mathfrak{C} = C/(2A)$, wo A der Skalenabstand ist. τ sei die Schwingungsdauer (**52**); α, oder in Sk.-T. gemessen e, der Ausschlag der Nadel. Wenn die letztere ungedämpft ist, so hat man (vgl. unten)

$$Q = C\cdot\tau/\pi\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{oder} \quad Q = \mathfrak{C}\cdot\tau/\pi\cdot e. \qquad 1.$$

$C\cdot\tau/\pi$ bez. $\mathfrak{C}\cdot\tau/\pi$ stellt also den ballistischen Reduktionsfaktor vor.

Beweis. Ist x die Ablenkung zur Zeit t, also $u = dx/dt$ die Winkelgeschwindigkeit, bedeutet ferner D die Direktionskraft, K das Trägheitsmoment, so gilt $du/dt = -D/K\cdot\sin x$. Durch Multiplikation mit $u = dx/dt$ entsteht $u\,du = -D/K\cdot\sin x\, dx$. Die Integration ergibt $\frac{1}{2}(u_0^2 - u^2) = D/K \times (1-\cos x) = D/K\cdot 2\sin^2\frac{1}{2}x$, wenn u_0 die Geschwindigkeit für $x = 0$ war. Für den Augenblick des gröfsten Ausschlags ($x = \alpha$) ist $u = 0$, also $\frac{1}{2}u_0^2 = 2D/K\cdot\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Mit Rücksicht darauf, dafs $D/K = \pi^2/\tau^2$, entsteht hieraus (gerade wie bei dem Pendel)

$$u_0 = 2\pi/\tau\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{und für kleines } \alpha \quad u_0 = \pi/\tau\cdot\alpha.$$

Wenn q die dynamische Galvanometerkonstante (**78**) bedeutet, so erteilte die Elektricitätsmenge Q die Winkelgeschwindigkeit $u_0 = Qq/K$. Da nun nach 78 Gl. 9 $q/K = 1/C\cdot D/K = 1/C\cdot\pi^2/\tau^2$, so ist $u_0 = Q/C\cdot\pi^2/\tau^2$. Andrerseits war $u_0 = \pi\alpha/\tau$. Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert $Q = C\alpha\tau/\pi$, q. e. d.

Gedämpfte Schwingung. Auch für diese ist der Ausschlag e_1 der Strommenge proportional. Die absolute Messung verlangt aber noch die Kenntnis des Dämpfungsverhältnisses k

(51. Vgl. auch 78). Es sei das natürliche log. Dekrement $\Lambda =$ log nat $k = 2{,}3026 \cdot$ log brigg k. Dann ist (Tab. 21b)

$$Q = \mathfrak{C}\frac{\tau}{\pi} \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda} \cdot e_1 = \mathfrak{C}\frac{T}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda} \cdot e_1, \qquad 2.$$

wenn τ die Schwingungsdauer der ungedämpften, T diejenige der gedämpften Schwingung ist.

Folgt aus 78 Gl. 6. Siehe ebenda die Vereinfachungen der Rechnung.

Die Elektricitätsmenge Q wird in der Einheit erhalten, welche dem Reduktionsfaktor C oder $\mathfrak{C}$ zu Grunde liegt, z. B. in [C-G-S] oder auch in Am. sec. oder Coulomb $= 0{,}1$ [C-G-S]. Über Ladungsmengen von Leidener Flaschen s. 85 III.

Gröfsere Schwingungen reducirt man nach 49 auf den Sinus des halben einseitigen Ausschlages (vgl. oben den Beweis). Von einem beobachteten Ausschlage $= e$ Sk.-T. zieht man also die Gröfse $\frac{11}{32}e^3/A^2$ ab, wo A den Abstand der Skale vom Spiegel bedeutet.

Vgl. auch 79!

II. Durch dauernde Ablenkung.

Kann man die Elektricitätsmenge Q längere Zeit rasch wiederholt (Nmal in 1 sec) durch das Galvanometer schicken, so entsteht eine dauernde Ablenkung α. Dann ist $Q = C \cdot \alpha/N$ oder $= \mathfrak{C} \cdot e/N$. Hier ist ev. das Korrektionsglied mit $\mathfrak{C}'$ zu berücksichtigen (66).

Anwendungen.

Eine el. Kraft E wirke während der Zeit t; das Produkt Et heifst Zeitintegral oder kurz Integral der el. Kraft. Ist E nicht konstant, z. B. bei einer Induktionsmaschine, einem Erdinduktor etc., so hat man anstatt $E \cdot t$ die Summe der Produkte $E \cdot dt$ über alle Zeitelemente dt, also $\int E dt$ zu setzen.

Wenn w der Widerstand des Kreises, so ist die Stromstärke in jedem Augenblick $i = E/w$ und die in der Zeit t hindurchgegangene Elektricitätsmenge

$$Q = \frac{Et}{w} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{1}{w}\int_0^t E\,dt.$$

Es ist aber nicht zu vergessen, dafs auch der Strom von einer konstanten el. Kraft im Anfang inkonstant ist, wenn der Stromkreis Selbstinduktion enthält (Anh. 20b). Die Fehlerquelle läfst sich dadurch vermindern, dafs man induktionsfreien Widerstandsballast einschaltet.

Durch Messung eines Stromstofses Q sind folgende Aufgaben möglich:

1) Bestimmung eines Widerstandes. Entweder in absolutem Maſse, wenn Et oder $\int Edt$ gegeben sind (82 II, III, V), oder vergleichungsweise durch Einschaltung der Widerstände in denselben Induktionskreis (**81**).

2) Bestimmung eines Integrales elektromotorischer Kraft; wenn der Widerstand bekannt ist; in absolutem Maſse (**81b** II; **81c** II; **83a**, 1 u. 2; **83b**, I) oder vergleichend (**80**). Hierher gehört die

Bestimmung magnetischer Momente. Zu vergleichende Stäbe werden einzeln in die Mitte einer längeren engen Spule plötzlich hineingeschoben oder herausgezogen. Die Stromintegrale sind den Magnetismen proportional. Hat die lange Spule eine gleichmäſsige Wickelung von n Windungen/cm, ist w, der Widerstand des Kreises, ebenso wie Q in [C-G-S] gemessen (1 Ohm $= 10^9$ cm/sec), so erhält man das magnetische Moment eines Stabes (vgl. Anh. 20) $M = Q\cdot w/(4\pi n)$[C-G-S].

Man kann die Ausschläge leicht multipliciren (**79** I).

3) Messung kurzer Zeiten (Pouillet), z. B. Schuſs-, Fall- oder Stoſszeiten. Der Strom einer konstanten el. Kraft E wird zu Anfang der Zeit (z. B. wann der Hahn des Gewehrs aufschlägt oder die stoſsenden Kugeln sich berühren) geschlossen, zu Ende derselben (z. B. wann das Geschoſs die Scheibe trifft oder einen gespannten Draht durchschneidet etc.) unterbrochen. Ist E und der Widerstand w des Stromkreises in [C-G-S] bekannt, so bekommt man die Zeit $t = Q\cdot w/E$ in sec. Vgl. aber die Bemerkung vor. S. unten.

Pendelunterbrecher (v. Helmholtz). Derselbe läſst durch zwei Hebel, an welche das schwere Pendel schlägt, zwei Stromkontakte in kleinem Zeitintervall in Thätigkeit setzen und hierdurch z. B. zwei Stromkreise nach einander öffnen oder einen Strom für die Zwischendauer durch ein Galvanometer schlieſsen, wobei etwa der erste Kontakthebel vor seinem Wegschlagen als Nebenschluſs benutzt worden war. Der eine Kontakt ist mikrometrisch verstellbar. Hierdurch läſst sich auch das Anwachsen eines Stromes in den ersten Augenblicken (vgl. oben) feststellen bez. in Rechnung setzen.

Der Apparat wird nach 3 empirisch geaicht oder es werden die Zeitunterschiede aus den Fallgeschwindigkeiten u berechnet,

welche man aus der Fallhöhe ableitet. Hat nämlich das Pendel die Schwingungsdauer τ und wird es aus einem Ablenkungswinkel A losgelassen, so ist bei einem Ablenkungswinkel α die Winkelgeschwindigkeit $= 2(\pi/\tau)\cdot\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}A - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}$; die Lineargeschwindigkeit u eines Punktes vom Radius r ist also

$$u = r\cdot 2(\pi/\tau)\cdot\sqrt{\sin^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Vgl. Helmholtz, Berl. Monatsber. 1871, 295; Schiller, Pogg. Ann. 152, 535. 1874.

79. Die Multiplikations- und die Zurückwerfungs-Methode (Gaufs und Weber).

Zur Messung kurz dauernder Wirkungen auf ein ballistisches Galvanometer, z. B. besonders zur Messung inducirter Ströme, ist es oft zweckmäfsig, die Impulse regelmäfsig zu wiederholen. Hierdurch entsteht bei Dämpfung schliefslich eine sich konstant erhaltende Bewegung (so, wie die Amplitude eines Uhrpendels, welches bei jeder Schwingung einen Impuls durch das treibende Gewicht erhält, aber durch Reibung und Luftwiderstand gedämpft wird, nach einer Reihe von Schwingungen konstant wird). Die Beobachtung dieses Endzustandes kann man beliebig oft wiederholen und einen genauen Mittelwert nehmen. Ein weiterer Vorzug besteht darin, dafs beim Beginn der Beobachtungen nicht notwendig Ruhe bestehen mufs.

Wir nehmen an, dafs die Schwingungen so klein bleiben, bez. dafs der Dämpfer so breit oder bei einem Spulengalvanometer das magnetische Feld genügend weit konstant sei, dafs wirklich ein konstantes Dämpfungsverhältnis besteht.

Gröfsere Ausschläge reducirt man nach S. 369 auf den Sinus des halben Winkels.

I. Multiplikationsmethode.

Das Verfahren ist dem Beispiel des Uhrpendels analog. Man erteilt den Impuls; der Körper schwingt hinaus und kehrt zurück. Im Augenblicke, wo er seine Gleichgewichtslage rückwärts durchschreitet, erteilt man den zweiten Stofs in entgegengesetzter Richtung wie den ersten, so dafs die Bewegung vermehrt wird. Bei dem folgenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage erfolge wieder ein Stofs im ersten Sinne, u. s. f. Die Schwingungen

werden allmählich weiter, erreichen aber endlich einen konstanten Grenzwert.

Kleine Schwingungen vorausgesetzt, ist der Grenzbogen proportional dem Geschwindigkeitszuwachs durch den einzelnen Stofs, also auch der jedesmal durch das Galvanometer geflossenen Elektricitätsmenge.

Der erste Ausschlag durch einen einmaligen Stofs wird aus dem Grenzbogen A erhalten $= \frac{1}{2}A(k-1)/k$, wenn k das Dämpfungsverhältnis bedeutet (**51**). Der erste Ausschlag α, welcher ohne Dämpfung entstehen würde, wird gefunden für eine mäfsige Dämpfung $\alpha = \frac{1}{2}A \cdot (k-1)/\sqrt{k}$

und allgemein $\alpha = \frac{1}{2}A \cdot \frac{k-1}{k} \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}$,

wo $\Lambda = \log \operatorname{nat} k = 2{,}3026 \log \operatorname{brigg} k$ ist (Tab. 21b).

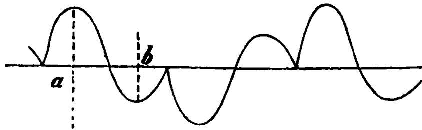
Aus α wird die dem einzelnen Stromstofs entsprechende Strommenge Q nach **78a** Gl. 1 berechnet.

Beweis. Beim Hinausschwingen sei u_0 die Anfangsgeschwindigkeit; dann ist nach 78 Gl. 6 offenbar $u_0 = \pi/\tau \cdot \frac{1}{2}A \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}$. Bei der Rückkehr in die Ruhelage ist die Geschwindigkeit $u_1 = u_0/k$. Die Differenz $u_0 - u_1 = u_0(k-1)/k = u$ ist der durch den Stofs geleistete Ersatz. Diesem allein würde ohne Dämpfung entsprechen der Ausschlag $\alpha = \tau/\pi \cdot u_0(k-1)/k$. Obiges u_0 eingesetzt, gibt den Ausdruck.

II. Zurückwerfungsmethode.

Das Verfahren liefert zugleich das Dämpfungsverhältnis.

Man teilt einen Stofs mit, läfst hinaus-, zurück-, nach der anderen Seite hinaus-, und wieder zurückschwingen. In dem Augenblick, in welchem alsdann die Gleichgewichtslage passirt wird, erteilt man den zweiten Stofs in entgegengesetzter Richtung wie den ersten. Dadurch tritt, da durch die Dämpfung Geschwindigkeit eingebüfst worden ist, Zurückwerfung ein. Nun läfst man abermals zweimal umkehren und wirft bei der nächsten Erreichung der Gleichgewichtslage wieder zurück, u. s. f. Schliefslich nehmen die Ausschläge der Nadel konstante Werte an. Dann herrschen also Schwingungen von der in der Figur graphisch dargestellten



Form, wo die Zeiten als Abscissen, die Skalenteile, von der Ruhelage der Nadel an gerechnet, als Ordinaten gelten.

Die Herbeiführung dieses gleichförmigen Zustandes kann dadurch beschleunigt werden, dafs man den ersten Stofs geeignet abschwächt.

Die Zurückwerfungsmethode liefert also, nachdem man den Mittelwert je aus den entsprechenden Beobachtungen genommen hat, vier Umkehrpunkte auf der Skale. Die Differenz a der beiden äufseren soll der grofse, die Differenz b der inneren Umkehrpunkte soll der kleine Schwingungsbogen heifsen.

Das Dämpfungsverhältnis ist offenbar $k = a/b$.

Der Ausschlag α, welchen ein einzelner Stofs ohne Dämpfung hervorbringen würde, ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\cdot k^{-1/\pi\cdot \operatorname{arc\,tg} \Lambda/\pi} \quad \text{oder auch} \quad = \tfrac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\,\frac{k^{1/\pi\cdot \operatorname{arc\,tg}\pi/\Lambda}}{\sqrt{k}}.$$

Der Faktor von $\frac{1}{2}(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$ kann mit höchstens 1/1000 Fehler bis zu $k = 1{,}1$ vernachlässigt und bis zu $k = 2$ gleich $k^{-\Lambda/\pi^2}$ gesetzt werden (vgl. Tab. 21b).

Aus α erhält man durch Multiplikation mit π/τ oder $\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}/T$ (wo τ ohne, T mit Dämpfung gilt) die durch den einzelnen Stofs mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit.

Unter Umständen kann man die „Zurückwerfungsmethode" zweckmäfsig abändern, indem man den Stofs nach der dritten oder vierten Schwingung erteilt.

Beweis ähnlich wie oben.

W. Weber, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. I, 341. 1846; oder Weber's Werke Bd. III, 438 u. 441. 1893. Über den Einflufs der Dauer und Rechtzeitigkeit der Stromstöfse siehe Dorn, Wied. Ann. 17, 654. 1882.

80. Erdinduktor (W. Weber).

I. Hervorbringung bekannter Integrale von el. Kraft.

Eine Spule von der Windungsfläche f (83) werde im magnetischen Felde H gedreht; die Fläche bilde vor und nach der Drehung die Winkel φ_1 und φ_2 mit der Richtung von H. Dann ist $\int E dt = H \cdot f(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$ (Anh. 20).. φ ist von 0 bis 360° durchzuzählen. Man kann so beliebige Integrale von el. Kraft hervorbringen. Bei vertikaler Windungsfläche ist H die Hori-

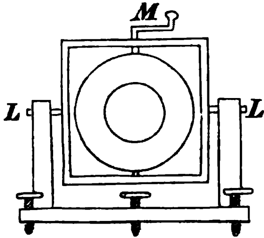
zontalintensität und φ das Azimut gegen den magnetischen Meridian.

Gewöhnlich dreht man um 180° aus der einen in die andere Ostwestlage der Spule, dann ist also

$$\int E dt = 2 H f.$$

II. Bestimmung der Inklination.

Die Bestimmung beruht auf der Vergleichung der durch die horizontale und vertikale Komponente des Erdmagnetismus in der Spule inducirten Ströme. Das Verhältnis der Galvanometerausschläge durch beide gibt die Tangente des Inklinationswinkels.



Die Galvanometernadel ist durch den Multiplikator, bez. noch durch einen Kupferrahmen gedämpft. Die Dämpfer sollen hinreichend breit sein, dafs das Dämpfungsverhältnis bei beiden Induktionen gleich grofs ist. Andernfalls entstehen bei der Multiplikationsmethode Korrektionen, bei der Zurückwerfung weniger.

Vertikale Komponente. Man legt die Axe M horizontal und orientirt sie mit Hilfe einer Magnetnadel in den magnetischen Meridian. Mittels einer Wasserwage wird die Axe LL horizontal gemacht.

Nun wird mit der hinteren Fufsschraube die Drehungsaxe M der Spule genau horizontal gelegt, d. h. so, dafs die Luftblase der Wasserwage bei dem Umsetzen auf den beiden gleich dicken Zapfen von M dieselben Teilstriche einnimmt. Jetzt wird ein Satz von Induktions-Beobachtungen ausgeführt, wobei die Spule jedesmal rasch von dem einen zu dem anderen Anschlag um 180° gedreht wird.

Horizontale Komponente. Man stellt die Spule aufrecht (Fig.), lehnt sie an einen der Anschläge und setzt auf die Axe M eine Wasserwage nordsüdlich auf. Die hintere Fufsschraube wird so gedreht, dafs die Luftblase in den beiden Anschlagstellungen der Spule dieselben Teilstriche einnimmt. Nun wird wie vorher ein Satz Induktions-Beobachtungen ausgeführt, möglichst unter Innehaltung der Drehungsgeschwindigkeit.

Induktionsmethoden. Beide Induktionssätze werden in gleicher Weise ausgeführt: am besten mit Zurückwerfung (79 II). Vgl. oben. Die Multiplikation setzt man entweder bis zu einem konstanten Grenzbogen fort; oder, wobei man aber mit ruhendem Galvanometer beginnen mufs, man gibt bei beiden Induktionen dieselbe Anzahl von Stöfsen und addirt beide Male eine gleiche Anzahl von Bögen von gleicher Ordnungszahl. Diese Summe, bez. der Grenzbogen, oder endlich bei der Zurückwerfung der Ausdruck $(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$, werde mit S bezeichnet, in den beiden Axenstellungen durch den Index 1 und 2 unterschieden, so ist die Inklination J gegeben durch

$$\operatorname{tg} J = S_1/S_2 .$$

Prüfungen. Die Windungsfläche soll in den Anschlagstellungen senkrecht auf der zu bestimmenden erdmagnetischen Komponente stehen. Dafs dieselben um 180 differiren, wird mit einem versilberten Planglase auf der Axe M leicht erkannt. Im Übrigen wird die Prüfung des Rahmens mit einer Wasserwage und einer Bussole meistens ausreichen. Wenn nicht, so beschränkt man mit dem Ringsektor (Fig.) den Spielraum der Drehung auf etwa 30°. Induktionsbeobachtungen aus beiden Stellungen geben dann, wenn die Stellung unrichtig ist, einen ungleichen Nadelausschlag.

Ein Fehler von 1° in den Stellungen kommt kaum in Betracht. Die Axe MM dagegen ist sorgfältig zu orientiren.

Man vermeidet Fehlerquellen leichter, wenn man nicht mit vertikaler und horizontaler Drehungsaxe arbeitet, sondern wenn man aus einigen Beobachtungen mit einer der Inklination nahe gelegenen Axenrichtung die genaue Inklinationsrichtung der Axe bestimmt, in welcher keine Induktion stattfinden würde (Schering). Die Axen-Neigung wird mit aufgesetztem Spiegel durch den Theodolit ermittelt.

Vgl. W. Weber, Werke, Bd. II, 277. 1892; Schering, Gött. Nachr. 1882, 345.

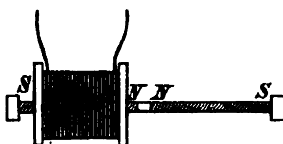
81. Magnet-Induktor (Gaufs. Weber).

Integrale elektromotorischer Kraft von beliebigem Betrage kann man durch die gegenseitige Verschiebung eines Magnets und einer Spule erhalten. Wechselt man zwischen zwei be-

stimmten Stellungen, so entstehen je nach der Richtung entgegengesetzte Integralwerte von gleicher Gröfse.

Absoluter Integralwert. Das Einschieben eines Magnets vom Magnetismus M (62) aus gröfserer Entfernung in die Mitte einer längeren, engen Spule, welche n Windungen auf jeder Längeneinheit hat, liefert den Wert $\int E dt = 4\pi n \cdot M$ (Anh. 20).

Doppelmagnet-Induktor. Die Anordnung der Fig. ist für konstante Induktionsstöfse besonders geeignet. Der Doppelmagnet wird ganz durch die Spule oder die Spule über den Magnet geschoben. Die Endstellungen sind mittels der verstellbaren Anschläge oder durch Filzstücke u. dgl. so regulirt, dafs in ihrer Nähe keine Induktion stattfindet. Selbstverständlich darf die Verschiebung das Galvanometer nicht durch Fernwirkung beeinflussen.



Widerstandsbestimmung. Wird die Spule durch ein Galvanometer geschlossen, so ist die Strommenge dem Gesamtwiderstande umgekehrt proportional. Nach **78a** oder **79** kann man die Menge messen.

w_0 sei der Widerstand Induktor + Galvanometer; zugeschaltet werde ein Widerstand w_1; die Nadelausschläge seien bezüglich α_0 und α_1. Dann ist $w_1/w_0 = (\alpha_0 - \alpha_1)/\alpha_1$. Hiernach kann man w_0 durch w_1 oder w_1 durch w_0 ausdrücken. Wenn w_2 statt w_1 zugeschaltet wird, sei der Ausschlag α_2. Dann erhält man $w_1/w_2 = (\alpha_0 - \alpha_1)/(\alpha_0 - \alpha_2) \cdot \alpha_2/\alpha_1$. Hier ist merklich konstante Dämpfung vorausgesetzt. Andernfalls s. **78** Gl. 5 oder **79 II**.

Auch für Nullmethoden (**71a** u. **b**) sind Induktionsstöfse brauchbar, wenn die Widerstände nicht stärkere Selbstinduktion haben.

81a. Magnetischer Induktionskoefficient eines Stabes in schwachem Felde.

Die temporäre Änderung des Magnetismus eines Stabes von der Gestalt gewöhnlicher Magnete in einem magnetischen Felde von der Ordnung des horizontalen Erdmagnetismus bis zu Feldstärken gegen vielleicht 4 [C-G-S] ist nahe der Feldstärke proportional. Verstärkungs- und Schwächungs-Koefficienten permanenter Magnete sind nahe gleich. Bei gewöhnlichen Magneten

beträgt die Änderung für die Feldstärke 1 [C-G-S] etwa 1,5 bis 2 [C-G-S] auf 1 ccm Stahl, oder 0,2 bis 0,3 auf 1 g. Die Zahl hängt von Gestalt, Härte, chemischer Beschaffenheit ab und ist für unmagnetisches Material etwas gröfser als für magnetisirtes.

Ein nordsüdlich hängender Magnet also hat einen, um einige Hundertel [C-G-S] auf das Gramm Stahl gröfseren Magnetismus als in der Ost-Westlage. Der Überschufs im Verhältnis zum eigenen Magnetismus des Stabes heifst Induktionskoefficient durch die Horizontalkomponente (Lamont).

Messung mit dem Erdmagnetismus (Weber). Eine um 180^0 drehbare enge Spule, welche länger sein soll als der Magnetstab, ist durch ein Galvanometer geschlossen. Man dreht aus der einen Meridianlage in die andere. Der Ausschlag betrage: α_0, wenn die Spule allein gedreht wird; α, wenn dieselbe mit dem in der Spulenaxe befestigten Stabe gedreht wird; α_1, wenn ein Stäbchen vom bekannten Magnetismus M_1 (62) aus einiger Entfernung in die leere Spule bis zur Mitte rasch eingeschoben oder von hier herausgezogen wird.

Der durch die nordsüdliche Lage in dem ersteren Stabe inducirte Magnetismus ist dann $m = \frac{1}{2} M_1 (\alpha - \alpha_0)/\alpha_1$; der durch das magnetische Feld Eins inducirte Magnetismus ist $= m/H$, wenn H den Erdmagnetismus bedeutet (59; Tab. 22); endlich der „Induktionskoefficient“ Δ, wenn M den ganzen Magnetismus bedeutet, $\Delta = m/M$.

Man wird für diese Beobachtungen meistens die Multiplikation gebrauchen (79). Bei schwächerer Dämpfung kann man Zeit sparen, wenn man nicht bis zu konstantem Grenzausschlage inducirt, sondern in allen Fällen für α den gleichvielten Schwingungsbogen oder besser die Summe einer gleichen Anzahl Bogen von denselben Ordnungsnummern setzt.

Untersuchung mit einem Strom. Anstatt Spule und Magnet gegen den Erdmagnetismus umzulegen, kann man dieselben ruhen lassen, aber eine zweite Spule darüber wickeln oder schieben, in welcher ein gemessener Strom i geschlossen oder geöffnet oder rasch kommutirt werden kann. Die innere Spule erfährt dann eine el. Kraft durch die äufsere Spule und eventuell durch den Magnet. Die Beobachtungen entsprechen genau den obigen. Das magnetische Feld in der Stromspule

ist $= 4\pi n i$, wenn n die Windungszahl auf der Längeneinheit derselben vorstellt.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 22, 417. 1884; Sack, ib. 29, 53. 1886.

81 b. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes.

Erzeugung starker Felder.

In einer Kupferspule kann man ohne erhebliche Kühlung bis zu einer Feldstärke von etwa 800 [C-G-S] kommen, mit starker Kühlung bis etwa 1500.

Zwischen den Polen eines Elektromagnets mit kegelförmig zugestutzten Polschuhen kann die Feldstärke bis zu 40000 betragen. Die höchste Stärke liefert ein Kegel vom halben Winkel 55°, ein möglichst gleichmäſsiges Feld ein solcher von 40° (Stefan, Wied. Ann. 38, 440. 1889; Ewing u. Low, Phil. Trans. 180, 221. 1889; du Bois'scher Ringmagnet, Wied. Ann. 51, 537. 1894).

I. Bestimmung in einer Spule durch Rechnung.

In einer im Verhältnis zu ihrer Länge engen gleichmäſsig bewickelten Spule von n Windungen auf jedem cm der Länge bewirkt der Strom i [C-G-S] (**64. 68. 68a. 69**) das magnetische Feld $4\pi n i$ [C-G-S].

Vorausgesetzt wird hierbei eine so groſse Entfernung a vom Ende, daſs r^2/a^2, wenn r der Spulenhalbmesser, gegen 1 verschwindet. Sonst ist das Feld in der Axe um den Bruchteil $\frac{1}{2}(\sqrt{r^2+a^2}-a)/\sqrt{r^2+a^2}$ kleiner und beträgt also in der Endfläche $2\pi n i$, da für $a=0$ jener Bruchteil $=\frac{1}{2}$ wird.

In einem Punkt der Axe einer Spule von der Länge l, welcher um a von der einen Endfläche absteht, ist die Feldstärke

$$2\pi n i\left[a\cdot(r^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(l-a)\cdot(r^2+(l-a)^2)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

also mitten $4\pi n i\cdot l/\sqrt{l^2+4r^2}$ und am Ende $2\pi n i\cdot l/\sqrt{l^2+r^2}$.

II. Durch Induktion (Verdet).

Ein kleiner ebener Leiter (Kreisdraht) von der Windungsfläche f wird, mit seiner Ebene senkrecht zu den Kraftlinien, aus gröſserer Entfernung plötzlich in das Feld hineingestoſsen oder aus demselben herausgezogen. Er ist mit einem Spiegel-Galvanometer von nicht zu kleiner Schwingungsdauer verbunden.

Ist H die Stärke des Feldes, so wird dadurch eine el. Kraft von dem Integralwerte $f\cdot H$ inducirt. (Herumdrehen um 180° statt herausziehen würde $2f\cdot H$ geben.)

Das Galvanometer gebe hierbei den in Skalenteilen gemessenen ersten Ausschlag e. Ist bei Multiplikation (**79 I**) der Grenzbogen E gefunden, so ist, wenn k das Dämpfungsverhältnis, $e=\frac{1}{2}E(k-1)/k$. Dann hat man

$$H=P\cdot e/f.$$

Bestimmung der Versuchskonstante P.

1. Mit dem Erdinduktor (80). In derselben Leitung befinde sich ein Erdinduktor von der Fläche f_0 konstant eingeschaltet. Umdrehung desselben um 180° erzeuge den Ausschlag e_0; H_0 sei die erdmagnetische Intensität senkrecht zu der Windungsebene des Induktors (59). Dann ist (Quincke, Wied. Ann. 24, 349. 1885)

$$P = 2 H_0 f_0 / e_0 .$$

2. Mit dem Magnetinduktor. Eine gestreckte Drahtspule mit der Windungszahl N auf jeder Längeneinheit ihrer Axe sei mit dem kleinen Induktor und dem Galvanometer konstant eingeschaltet. Ein kurzer Magnet von dem Moment M (62) werde rasch in die Mitte der Spule eingeschoben oder von dort herausgezogen. Die Nadel mache den ersten Ausschlag e'. Dann ist (63 am Schlufs und Anh. 20)

$$P = 4\pi N M / e' .$$

3. Aus dem Reduktionsfaktor des Galvanometers. Der gewöhnliche Reduktionsfaktor auf [C-G-S] sei $= C$(64 II; 69) oder der Reduktionsfaktor $\mathfrak{C}$ für 1 Skalenteil $\mathfrak{C} = C/(2A)$, wenn A den Skalenabstand bedeutet (66). Es sei ferner k das Dämpfungsverhältnis, $\varLambda = \log \operatorname{nat} k$ (51) und endlich τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel. w bedeute den Widerstand Galvanometer + kleiner Induktor in absolutem Mafse, d. h. den in Ohm ausgedrückten Widerstand multiplicirt mit 10^9 (Anh. 21). Dann ist

$$P = \mathfrak{C} w \tau / \pi \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \pi / \varLambda} .$$

Über die Berechnung des Exponentialfaktors s. Tab. 21 b und die Bemerkung zu 78 Gl. 6.

Beweise. Das el. Kraft-Integral ist bei der Messung Hf (Anh. 20), bei der ersten P-Bestimmung $2 H_0 f_0$ (80 I), bei der zweiten $4\pi N M$ (Anh. 20). Da der Widerstand konstant, so folgt sofort

$$P = Hf/e = 2 H_0 f_0 / e_0 = 4 \pi N M / e' .$$

Der Ausdruck unter 3 ergibt sich daraus, dafs einerseits die Elektricitätsmenge des Stofses $Q = Hf/w$, andererseits nach 78 a Gl. 2

$$Q = \mathfrak{C} \tau / \pi \cdot e \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \pi / \varLambda} .$$

III. Mit einem kleinen Bifilargalvanometer.

Auf horizontale Felder beschränkt, s. 77 b II.

IV. Mit der Wage.

Eine kleine Spule wird, die Windungsfläche parallel der Drehaxe der Wage, mit einem Wagebalken fest verbunden und in das Feld gebracht, so dafs sie den Kraftlinien parallel steht. Ein Gegengewicht von m gr am Balken l sei nötig, um das Drehmoment auf die Spule aufzuheben. Dann ist $H = lgm/(fi)$.

Angström, El. techn. Z. S. 10, 543. 1889.

V. Aus der Dämpfung einer schwingenden Spule.

Eine kleine Spule vom Trägheitsmoment K cm²·g und der Windungsfläche f cm², die Windungsebene parallel der Feldrichtung, mit einem Gesamtwiderstande w Ohm $= 10^9 w$ cm/sec, habe das Dämpfungsverhältnis k und zugleich die Schwingungsdauer T. Dann ist die Feldstärke

$$H = \sqrt{2K}/f \cdot \sqrt{wA/T}.$$

Es ist $A = \lg\mathrm{nat}\, k$. T kann ev. aus der Schwingungsdauer ohne Dämpfung τ als $T = \tau \cdot \sqrt{\pi^2 + A^2}/A$ berechnet werden.

[Vgl. 78 Gl. 1—3, 7b u. 8.]

VI. Aus der Drehung der Polarisationsebene nach 77c.

Man benutzt z. B. Platten aus schwerem Flintglase in durchgehendem oder in, auf der versilberten Rückseite reflektirtem Licht. Schwach keilförmige Gestalt gestattet, störende Reflexe abzublenden. Die Platte wird in dem bekannten magnetischen Felde einer Spule oder durch Vergleichung mit einer Schwefelkohlenstoffschicht geaicht.

Vgl. H. du Bois, Wied. Ann. 51, 549. 1894; Magnet. Kreise S. 328, Berl. 1894.

VII. Aus der Steighöhe magnetischer Flüssigkeiten (Quincke).

In dem magnetischen Felde befinde sich die Oberfläche einer Lösung eines Eisen-, Mangan- oder Nickelsalzes in einem Steigrohre, welches mit einem aufserhalb des Feldes liegenden Rohre kommunicirt. Durch das magnetische Feld werde die Höhendifferenz h zwischen den beiden Niveaus bewirkt. Dann ist

$$H = C \cdot \sqrt{h}.$$

C wird für die betr. Flüssigkeit in einem bekannten Felde bestimmt. Kennt man den Magnetisirungskoefficienten $\varkappa$ (Anh. 16) der Flüssigkeit, so ist, wenn s ihr spec. Gewicht und g die

Schwerbeschleunigung, $C = \sqrt{2gs/\varkappa}$. Koncentrirte Eisenchloridlösung hat etwa (h in cm) $C = 7000$.

Quincke, Wied. Ann. 24, 347. 1885; du Bois ib. 35, 137. 1888; auch: Magnetische Kreise S. 333. 1894.

VIII. Aus Widerstands-Änderungen des Wismuts.

Der Widerstand von Wismut wächst im magnetischen Felde (Righi): für kleines H beschleunigt, von etwa $H = 10000$ [cm, g] an ungefähr gleichförmig, bei $H = 20000$ etwa das Doppelte des Ausgangswertes erreichend. Eine ebene Spirale aus gepreſstem Wismutdraht, zur Vermeidung von Induktion am besten bifilar gewunden, erfährt bei Querstellung gegen die Kraftlinien die stärkste Änderung.

Das Messungsverfahren ergibt sich, wenn man den Widerstand als Funktion des magnetischen Feldes kennt, von selbst. Die Tabelle oder Kurve muſs empirisch hergestellt werden. Der Gang wird aber von der Temperatur beeinfluſst. Nach Henderson ist, wenn man den Widerstand im unmagnetischen Felde als Ausgangspunkt nimmt, derjenige im Felde H [C-G-S] für reines gepreſstes Wismut

	$H = 0$	2000	4000	6000	8000	10000	12000 [C-G-S]
bei 18°	1,00	1,046	1,14	1,24	1,36	1,48	1,59
bei 0°	1,00	1,064	1,18	1,32	1,46	1,59	1,73.

	$H = 0$	15000	20000	25000	30000	35000	40000 [C-G-S]
bei 18°	1,00	1,80	2,09	2,39	2,70	3,03	3,37.

Ferner $w_{18}/w_0 = 1,070$ im unmagnetischen Felde.

Vgl. Lenard, Wied. Ann. 39, 619. 1890; du Bois, magnet. Kreise p. 333 Berl. 1894; Henderson. Wied. Ann. 53, 912. 1894.

81c. Bestimmung eines Magnetisirungs-Koefficienten.

Entsteht in einem magnetischen Material durch eine daselbst herrschende magnetisirende Intensität $\mathfrak{H}$ die „Magnetisirung", d. h. das magnetische Moment der Volumeinheit J, so nennt man $\varkappa = J/\mathfrak{H}$ den Magnetisirungs-Koefficient (Susceptibilität) des Körpers.

$\varkappa$ ist nur für diamagnetische sowie schwach magnetische Körper eine Konstante. Für Eisen steigt mit wachsender Feldstärke $\varkappa$ von einem kleinen, den schwächsten Feldern zukommenden Anfangswerte zunächst zu einem Maximalwerte, nimmt dann wieder ab und wird schlieſslich Null, da auch durch eine unendlich starke magnetisirende Kraft nur ein endlicher Grenzwert der Magnetisirung erzielt wird (etwa 1700 [C-G-S] für Schmiedeeisen, 1250 für Guſseisen, 540 für Nickel, 1300 für Kobalt).

Gröfse und Gang des Magnetisirungs-Koefficienten werden aufser durch den mechanischen Zustand durch chemische Beimengungen besonders stark beeinflufst. Über einige Eisensorten s. Tab. 24a.

$1+4\pi\varkappa$ wird Permeabilität genannt. Vgl. S. 448.

Entmagnetisirende Intensität. In jedem Körper, mit Ausnahme eines gleichförmig nach seiner Axe magnetisirten Ringes oder unendlich langen Stabes, bewirkt der Magnetismus des Körpers selbst Kräfte, welche der von aufsen wirkenden magnetisirenden Kraft H entgegenstehen. Es besteht also eine innere „entmagnetisirende Intensität" H_i, welche von H abzurechnen ist, um die wirkliche magnetisirende Intensität $\mathfrak{H}$ zu erhalten. Also ist

$$\mathfrak{H}=H-H_i. \qquad 1.$$

H_i ist im allgemeinen durch den Körper hindurch ungleich verteilt. Nur in einem gleichförmig nach einer Hauptaxe magnetisirten Ellipsoid herrscht ein konstanter, der Magnetisirung proportionaler Wert $H_i=P\cdot J$. Hier ist also

$$2. \quad \mathfrak{H}=H-P\cdot J \quad \text{und} \quad J=\varkappa(H-PJ) \quad \text{oder} \quad J=\varkappa H/(1+\varkappa P). \quad 3.$$

Ein Ellipsoid mufs sich also in einem konstanten magnetischen Feld gleichförmig magnetisiren. Der „Entmagnetisirungsfaktor" P hängt vom Axenverhältnis ab.

Rotationsellipsoid. Die Magnetisirung finde nach der Richtung der Rotationsaxe l statt, der Rotationsdurchmesser sei $=d$. Es sei $d<l$ und $e=\sqrt{1-d^2/l^2}$ die Excentricität. Dann ist nach Neumann (Vorles. üb. Theor. d. Magn. p. 74)

$$P=4\pi\frac{1-e^2}{e^3}\left(\tfrac{1}{2}\lg\text{nat}\frac{1+e}{1-e}-e\right). \qquad 4.$$

Für eine Kugel ist $P=\frac{4}{3}\pi=4{,}19$, für einen relativ unendlich langen Stab $=0$, für eine dünne, breite, der Dicke nach magnetisirte Platte hat es den gröfsten Wert 4π.

Cylinder. Für einen Cylinder von der Länge l und dem Durchmesser d gilt genähert dieselbe Formel, um so näher, je gröfser l/d ist (Kirchhoff, Oberbeck).

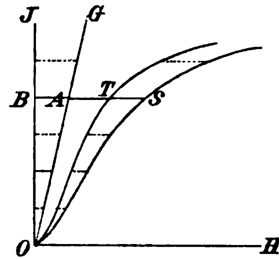
Tabelle für P (Ellipsoid).

l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$
5	0,701	17,5	40	0,0266	42,5	100	0,0054	54,0
10	,255	25,5	50	,0181	45,3	150	,0026	58,8
15	,135	30,4	60	,0132	47,5	200	,0016	64,0
20	,085	34,0	70	,0101	49,5	300	,0007	67,5
25	,059	36,7	80	,0080	51,2	400	,0004	72,0
30	,043	38,8	90	,0065	52,5	500	,0003	75,0

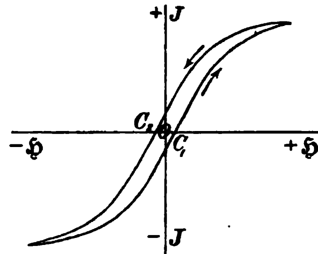
Aus du Bois, Magn. Kreise S. 45; Über Cylinder s. Mann, Diss. Berlin 1895.

Graphische Darstellung. Scheerung. Man kann die beobachteten Magnetisirungen J als Ordinaten zu den Intensitäten H auftragen und die Kurve OS ziehen, welche aber nach dem früheren nicht nur von

dem Material, sondern auch von der Gestalt des untersuchten Körpers abhängt. Zu J, als bloſser Eigenschaft des Materials, gehört als Abscisse die wirkliche magnetisirende Intensität $\mathfrak{H} = H - P \cdot J$ (Gl. 2). Die entsprechende Kurve OT kann aus OS durch folgende „Scheerung" erhalten werden (Lord Rayleigh). Man zieht eine Gerade OG, bei welcher zur Abscisse H die Ordinate $J = H/P$ d. h. zur Ordinate J die Abscisse $P \cdot J$ gehört. Durch einen Punkt S der Kurve legt man dann eine Parallele SAB zur Abscisse und trägt eine Strecke $ST = AB$ von S aus nach links ab; dann ist offenbar T ein Punkt der gesuchten Kurve. Denn die Abscisse zu T ist ja gegen H um AB d. h. um $P \cdot J$ verkleinert. Phil. Mag. 22, 175. 1886.



Remanenter Magnetismus. Wegen der Koercitivkraft gehört zu jeder Feldstärke bei abnehmender Magnetisirung ein stärkerer Magnetismus, als bei zunehmender. Geht man mit der Magnetisirung also wiederholt aufwärts, dann abwärts durch Null hindurch zu entgegengesetztem Magnetismus und wieder rückwärts, so stellen die Beobachtungen sich durch 2 Kurven dar, welche eine Schleife bilden etwa von der Gestalt der Figur, falls man hoch hinauf magnetisirt hat. Das Flächenstück zwischen den beiden Kurven (die Arbeit bei dem magnetisirenden Kreisproceſs) kann als Maſs für die Remanenz des Magnetismus, die „Hysterese" dienen (Warburg, Ewing).



Als Maſs der **Koercitivkraft** betrachtet man die Intensität OC_1 oder OC_2 (Fig.), welche in einem Stabe, der ganz ruhig gehalten wird, nach einer Magnetisirung in der anderen Richtung den unmagnetischen Zustand herstellt. Bei weichem Eisen etwa $= 2$, steigt sie für gehärteten Wolframstahl auf etwa 50—70.

Man wendet langgestreckte Stäbe an, damit die entmagnetisirende Kraft klein ist; Erschütterungen sind zu vermeiden.

I. Bestimmung mit dem Magnetometer.

Der Stab wird in eine Spule gebracht, deren Strom für die Strecke des Stabes ein gleichförmiges magnetisches Feld gibt (81 b I), und das magn. Moment M bei verschiedener Feldstärke gemessen (62). Wenn V das Stabvolumen, so ist die Magnetisirung $J = M/V$.

Die, der Stromstärke proportionale, Wirkung der Spule selbst auf die Nadel wird für eine passende Stromstärke ge-

messen und danach in Rechnung gesetzt; oder besser, man kompensirt die Spulenwirkung durch eine jenseit des Magnetometers angebrachte zweite Spule, durch welche stets derselbe Strom geht.

II. Bestimmung durch inducirte Ströme.

„Induktion". Die Magnetisirung des Stabes in einem Querschnitt sei $= J$, das dieselbe bewirkende Feld in dem Sinne von S. 382 $= \mathfrak{H}$. Dann nennt man $4\pi J + \mathfrak{H}$ die magnetische Induktion in dem Querschnitt (Anh. 16 und 20). Wenn nämlich der Körper an der betrachteten Stelle von einer kurzen engen Spule von der Windungszahl N umgeben ist, so wird in derselben durch das Entstehen oder Verschwinden des Feldes und des Magnetismus ein el. Kraft-Integral (78a) inducirt

$$\int E dt = q(4\pi J + \mathfrak{H})N \qquad 5.$$

wo q der Querschnitt, qJ also das magn. Moment der Längeneinheit des Stabes ist. Statt $(4\pi J + \mathfrak{H})$ kann man auch schreiben $\mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa)$. $q(4\pi J + \mathfrak{H})$ heifst Induktionsflufs.

Man mifst nach 78a mit einem in den Stromkreis eingeschalteten ballistischen Galvanometer die Elektricitätsmenge Q des Induktionsstofses, setzt (w = Gesamtwiderstand)

$$Q \cdot w = \int E dt = q(4\pi J + \mathfrak{H})N$$

also
$$J = \frac{1}{q}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{Q \cdot w}{N} - \mathfrak{H}q\right). \qquad 6.$$

Alle Gröfsen sind in [C-G-S] auszudrücken.

Das magnetisirende Feld wird in der Regel durch eine enge lange Spule hervorgebracht (81b I). Die kleine sekundäre befindet sich gewöhnlich, dicht schliefsend über den Eisenstab geschoben, innerhalb der ersteren. Ist sie aufsen über die magnetisirende Spule geschoben, so wie in der Figur (folg. S.), so ist in Formel 6 statt $-\mathfrak{H}q$ zu setzen $-\mathfrak{H}(q + q')$, wenn q' den nicht vom Eisen ausgefüllten Querschnitt der Spule bedeutet.

Die Dauer des Induktionsstromes mufs kurz gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers sein, was bei Elektromagneten mit grofsen Eisenmassen nicht immer der Fall ist.

Abziehen der Induktionsspule. Anstatt das magn. Feld verschwinden zu lassen, kann man die kleine Spule plötzlich abziehen.

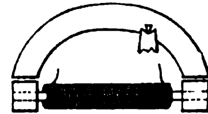
Magnetisirung eines permanenten Magnets. Dieselbe läfst sich für jeden Querschnitt dadurch messen, dafs man, so wie eben, von dem letzteren eine kurze enge Spule abzieht. Das magn. Moment der Längeneinheit ist $= Qw/(4\pi N)$; vgl. Formel 6.

Schlufsjoch (Hopkinson). Kürzere Stäbe kann man, um die „Selbst-Entmagnetisirung“ (S. 382) zu vermeiden, durch ein weiches schmiedeeisernes Joch von grofser Masse gut verbunden schliefsen. Die primäre und die sekundäre Spule sind über den Stab geschoben.



III. Mit der Wage (du Bois).

Der von der Magnetisirungsspule umgebene Stab ist mit seinen Enden in eiserne Backen gespannt, über denen sich sehr dicht ein starker eiserner Bügel als Wagebalken mit zwei ungleichen Hebelarmen befindet. Die Differenz der durch Anziehung entstehenden Drehmomente, durch Laufgewichte gemessen, ist dem Quadrate der Induktion (vgl. II) genähert proportional. Die Aichung auf absolutes Mafs mufs mit einem anderweitig untersuchten Stabe geschehen.



H. du Bois, Magnetische Kreise p. 367, Berlin 1894. Ebenda, sowie bei Ewing, Magnet. Induktion, übers. von Holborn u. Lindeck, 1892 siehe nähere Angaben über die obigen und andere Mefsmethoden.

82. Absolute Widerstands-Messung (W. Weber).

Vgl. 78—80 und Anhang 19—21.

Hier soll nur eine Übersicht der Methoden gegeben werden.

I. Aus der Dämpfung eines schwingenden Magnets.

Es soll bedeuten

k das Dämpfungsverhältnis einer Magnetnadel im geschlossenen Multiplikator (51),

$\varLambda$ = log nat k das natürliche log. Dekrement,

$\varLambda'$ dasselbe bei unterbrochener Leitung (Luftdämpfung),

τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel (52),

G die statische Galvanometerkonstante d. h. das Verhältnis des (kleinen) Ausschlags zur Stromstärke in [C-G-S], wenn das magn. Feld = 1 wäre, ohne Fadentorsion,

M den Magnetismus, Θ den Torsionskoefficient der Nadel,

H die erdmagnetische Horizontalintensität.

1. Dann ist der absolute Widerstand Multiplikator + Schlufsleitung in elektromagnetischem Weber'schem Mafse

$$w = \frac{\pi^2}{2\tau} \frac{G^2}{\Lambda - \Lambda'} \frac{M}{H(1+\Theta)} \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}}. \qquad 1.$$

Über die Bestimmung von M/H s. 59 II.

Galvanometerkonstante. Für einen kreisförmigen Multiplikator von n Windungen vom Halbmesser R mit kurzer Nadel im Mittelpunkte würde $G = 2\pi n/R$ sein (64 II), mit dem Korrektionsfaktor $1 - \frac{1}{8} b^2/R^2 + \frac{1}{12} h^2/R^2 + \frac{3}{16} \mathfrak{l}^2/R^2$ für Breite b, Dicke h der Windungslage und Polabstand $\mathfrak{l}$ der Nadel.

Für einen engen Multiplikator bestimmt man G empirisch mittels eines Stromes, welchen man gleichzeitig ganz durch eine Tangentenbussole und abgezweigt durch den Multiplikator gehen läfst (Dorn). Sind die Ablenkungswinkel bez. φ und φ', die Torsionskoefficienten bez. Θ und Θ', während G' die Konstante der Tangentenbussole, v der Abzweigungsfaktor (64a) ist, so hat man $G = vG' \cdot \operatorname{tg}\varphi/\operatorname{tg}\varphi' \cdot (1+\Theta)/(1+\Theta')$.

Über die Ausführung s. F. K., Wied Ann. 35, 710 u. 745. 1888.

II. Durch Induktionsstöfse mit dem Erdinduktor.

Ein Erdinduktor mit vertikaler Drehungsaxe (80) sei durch das Galvanometer geschlossen. Aufser den obigen Bezeichnungen sei

f die Windungsfläche des Induktors (83),

α der Nadelausschlag durch einen einzelnen Induktionsstofs ohne Dämpfung, in dem Sinne von S. 365 u. 368, bei Drehung um die vertikale Axe wie in 80.

2. Ist die Empfindlichkeitskonstante des Multiplikators bekannt oder wie oben bestimmt, so braucht man das Dämpfungsverhältnis nur so weit, wie es zur Berechnung von α gefordert wird. Es ist nämlich

$$w = \frac{2\pi}{1+\Theta} \frac{fG}{\alpha\tau}. \qquad 2.$$

3. Statt der Empfindlichkeitskonstante genügt eine genaue Kenntnis der Dämpfung. Es ist, wenn

K das Trägheitsmoment der Nadel bedeutet,

$$w = \frac{8}{\pi} \frac{f^2 H^2 \tau}{\alpha^2 K} \frac{\Lambda - \Lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}. \qquad 3.$$

4. Mit Hilfe der bekannten Beziehung (Anhang Nr. 10) $K = MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ kann man K eliminiren und erhält

$$w = \frac{8\pi}{1+\Theta} \frac{f^2}{\alpha^2\tau} \frac{H}{M} \frac{\Lambda - \Lambda'}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}. \qquad 4.$$

Die Gröfse α kann bei 2. durch Multiplikation oder Zurückwerfung, bei 3. und 4. mufs sie durch Zurückwerfung bestimmt werden, um zugleich die Dämpfung zu erhalten. Sind hierbei die beiden stationären Schwingungsbögen in absolutem Mafse $= a$ und b, so hat man also zu setzen (79 II)

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \left(\frac{b}{a}\right)^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \Lambda/\pi}$$

und $$\Lambda = 2{,}3026(\log a - \log b).$$

Über Vereinfachungen der Rechnungen s. Tab. 21b und S. 366, 373.

Die vorigen Methoden leiten sich aus 78 ab. Denn es ist $G = q/M$, also nach Gl. 7a, 8 und 3 daselbst

$$\frac{M^2G^2}{w} = 2K\frac{\Lambda - \Lambda'}{T} \text{ oder } = 2K\frac{\Lambda - \Lambda'}{\tau\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}},$$

woraus $$w = \frac{1}{2}\frac{M^2\tau}{K}\frac{G^2}{\Lambda - \Lambda'}\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}.$$

Indem man K durch $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ ersetzt, folgt unsere Gl. 1.

Ein Induktionsstofs durch die Horizontalkomponente H liefert ferner die Strommenge $2fH/w$ und teilt hierdurch der Nadel eine Winkelgeschwindigkeit mit (Gl. 6):

$$u_0 = \frac{2fH}{w}\frac{q}{K} = \frac{2fH}{wK}\sqrt{2wK\frac{\Lambda - \Lambda'}{T}} = \frac{fH}{\sqrt{w}}\sqrt{\frac{8(\Lambda - \Lambda')}{KT}}.$$

Hieraus folgt $w = f^2H^2/u_0^2 \cdot 8(\Lambda - \Lambda')/(KT)$. Indem man noch (78, Gl. 6 u. 3) $u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha$ und $T = \tau\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}$ setzt, kommt die Gleichung 3.

Gl. 2 endlich kommt aus 3, wenn man hier nach 78 Gl. 8, 7a u. 3

$$\Lambda - \Lambda' = q^2T/(2wK) = G^2M^2\tau\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}/(2wK\pi)$$

einsetzt und dann noch statt K schreibt $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$.

Alle Gröfsen sind in [C-G-S] auszudrücken. w liefert dann, durch 10^9 geteilt, den Widerstand in Ohm.

Die Methoden 2 und 3 können mit astatischer Nadel arbeiten.

Über inkonstantes Dämpfungsverhältnis vgl. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471. 1880. Auch die Selbstinduktion der Spulen bewirkt eine Korrektion; s. Dorn; ib. 17, 783. 1882. Endlich können auch lokale Variationen des Erdmagnetismus Korrektionen verlangen.

III. Mit dem rotirenden Erdinduktor (Weber).

Ein Kreisring vom mittleren Halbmesser r mit n Windungen rotire um eine vertikale Axe Nmal in 1 sec, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi N$. In einem Augenblick, wo die Axe des Ringes mit dem magn. Meridian den Winkel φ bildet, wird in ihm inducirt die el. Kraft $E = 2\pi N \cdot nr^2\pi \cdot H \sin\varphi$, also der Strom E/w. Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld in seinem Mittelpunkt $E/w \cdot 2\pi n/r$, dessen zum Erdmagnetismus senkrechte Komponente

$$E/w \cdot 2\pi n/r \cdot \sin\varphi = 1/w \cdot 4\pi^3 Nn^2 rH \sin^2\varphi$$

beträgt. Der Mittelwert dieser Komponente während einer halben Umdrehung ist

$$1/w \cdot 4\pi^3 Nn^2 rH \cdot 1/\pi \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = 1/w \cdot 2\pi^3 Nn^2 rH.$$

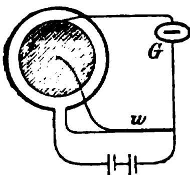
Eine Magnetnadel im Mittelpunkt werde hierdurch um den Winkel α dauernd abgelenkt. Dann ist

$$1/w \cdot 2\pi^3 Nn^2 rH \cos\alpha = H \sin\alpha, \text{ woraus } w = 2\pi^3 Nn^2 r \operatorname{ctg}\alpha.$$

Korrektionen stammen aus dem Querschnitt der Windungslage, der Fadentorsion, der Selbstinduktion und der Induktion der Magnetnadel auf die Spule.

IV. Mit einer im magnetischen Felde rotirenden Scheibe (Lorenz).

Ein Strom i durchfliefse eine lange Drahtspule von n Windungen auf 1 cm. Das magnetische Feld in der Spule ist (81 b I) $= 4\pi ni$. Eine Metallscheibe vom Halbmesser r rotirt in diesem Felde mit N/sec Umdrehungen, die Kraftlinien senkrecht schneidend. Ein Kontakt drückt gegen das Centrum, ein zweiter schleift an der Peripherie der Scheibe. Zwischen diesen Punkten wird dann, da ein Radius der Scheibe in der Zeiteinheit offenbar eine Fläche $N \cdot r^2\pi$ beschreibt, also $4\pi ni \cdot Nr^2\pi$ Kraftlinien schneidet, eine el. Kraft inducirt $4\pi^2 nr^2 N \cdot i$.



Derselbe Strom i durchfliefst den zu messenden Widerstand w, erzeugt also an dessen Enden die Spannung $w \cdot i$. Die Umdrehungszahl N wird so regulirt, dafs diese Spannung der obigen gleich ist, was an dem Strom Null in einem Galvanometer erkannt wird. Dann ist also $w = 4\pi^2 n N r^2$.

In Wirklichkeit verlangt die endliche Länge der Spule eine erhebliche Korrektion; vgl. **81b** I.

Anstatt der rotirenden Scheibe kann eine geeignet rotirende Spule angewandt werden (Lippmann).

V. Aus der wechselseitigen Induktion zweier Stromleiter (Kirchhoff).

Der wechselseitige Induktionskoefficient (**83b**) zweier Spulen sei $= P$. Derselbe wird aus der Gestalt und der Lage der Spulen berechnet, was im allgemeinen eine verwickelte Arbeit ist Einfach wird der Fall einer langen Spule vom Halbmesser r, gleichmäfsig mit n Windungen auf die Längeneinheit bewickelt, über welche eine enge, kurze Spule von m Windungen geschoben ist (Roiti, Himstedt). Von einer Korrektion, welche von der beschränkten Länge der ersteren Spule herrührt, abgesehen, ist dann $P = 4\pi^2 r^2 nm$ (Anh. 20b).

In der primären Spule entstehe oder verschwinde der Strom i. Das hierbei inducirte Integral el. Kraft ist $\int E dt = Pi$.

Die in dem sekundären Stromkreis inducirte Strommenge ist also $Q = Pi/w$. Dieselbe wird nach **78a** gemessen und liefert dann w in absolutem Mafse.

Mit Hilfe eines Stromunterbrechers im primären Stromkreis, welcher den Strom i in 1 sec Nmal unterbricht (**37a**), wobei aber mittels eines Disjunktors nur die Schliefsungs- oder die Öffnungsströme in der inducirten Spirale zu Stande kommen, kann man die Bestimmung von Q auf dauernde Ablenkungen zurückführen (Roiti, Himstedt).

Die Ablenkung eines Galvanometers im sekundären Stromkreis sei hierbei $= \alpha_1$, der inducirende Strom i gebe an demselben Galvanometer die Ablenkung α_2, dann ist

$$w = NP \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 .$$

Denn es ist $NPi/w = C \operatorname{tg} \alpha_1$ und $i = C \operatorname{tg} \alpha_2$. Anordnung und Korrektionen s. bei Himstedt, Wied. Ann. 26, 547. 1885.

VI. Aus der Stromwärme.

Ein Strom i $\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}} \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \mathrm{sec}^{-1}$ (**64** ff.) entwickele in einem Leiter in t sec die Wärmemenge q (**29—31**), dann ist der abs. Widerstand w dieses Leiters

$$w = A \cdot \frac{q}{i^2 t} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

A ist das abs. mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit, also z. B. $A = 41\,900\,000$ cm² g sec⁻²/Wasser-gr-cal. (Anh. 7).

83. Bestimmung der Windungsfläche einer Drahtspule.

I. Aus den gemessenen Durchmessern. Am direktesten, aber entweder mühsam oder weniger genau ist die Ausmessung des Durchmessers jeder Windungslage an mehreren Stellen (mit dem Kathetometer oder dem Cirkel) oder auch des Umfanges (mit dem Bandmaſs). Von dem an der äuſseren Oberfläche der Schicht gemessenen Durchmesser ist natürlich die Drahtdicke abzurechnen.

Ist nur die Windungszahl N, sowie der innere und der äuſsere Halbmesser r_0 und r_1 gemessen, so hat man bei gleichmäſsiger Wickelung $f = \frac{1}{3}\pi N(r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2)$.

II. Aus der Drahtlänge. Für eine nicht zu feine Drahtsorte kann man die Summe der Windungsflächen einer Spule messen, indem man bei dem Aufwinden die Windungszahl und die Länge des Drahtes bestimmt.

Bilden kreisförmige Windungen eine Lage von rechteckigem Querschnitt, ist l die Drahtlänge, n die Anzahl der Windungen, h die Höhe der Windungslage, so wird die Windungsfläche f gefunden $f = l^2/4\pi n + \frac{1}{12}\pi n h^2$.

Wegen des Einsinkens der Drähte und des Zusammenpressens der Bespinnung wird der so gemessene Wert mehr oder weniger zu groſs ausfallen.

Vgl. H. Weber, der Rotationsinduktor, Leipzig 1882.

III. Durch magnetische Fernwirkung (F. K.) Derselbe Strom durchflieſse die Spule und eine Spiegel-Tangentenbussole mit einer Windung vom Halbmesser R. Auf die kurze Nadel wirken beide Teile des Stromes gleichzeitig. Die Stromleiter sollen folgende Stellung gegen einander haben.

Die Spulenaxe liegt ostwestlich. Ihr Mittelpunkt hat den Abstand a von der Nadel und liege von dieser entweder östlich oder westlich (1. Hauptlage), oder nördlich oder südlich (2. Hauptlage). Den Abstand wählt man so, daſs die beiden Wirkungen auf die Nadel, wenn sie entgegengesetzt gerichtet

sind, sich nahe aufheben. Ist letzteres genau der Fall, so hat man in erster H.-L. $f = a^3\pi/R$.

Andernfalls betrage der Ausschlag Φ, wenn beide Ströme gleichsinnig wirken, und φ, wenn man den Strom in der Tangentenbussole allein kommutirt. Dann ist

$$f = \frac{a^3\pi}{R}\,\frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi}.$$

In der zweiten H.-L. kommt der Faktor 2 hinzu.

Denn da die Drehungsmomente des Stromes i auf die Nadel M von der Spule und von der Tangentenbussole zusammen demjenigen des Erdmagnetismus H das Gleichgewicht halten müssen, so hat man (für die 1. H.-L.) $2Mif/a^3 \cdot \cos\Phi + Mi2\pi/R \cdot \cos\Phi = MH\sin\Phi$ oder

$$2i(f/a^3 + \pi/R) = H\operatorname{tg}\Phi;$$

ebenso:

$$2i(f/a^3 - \pi/R) = H\operatorname{tg}\varphi.$$

Hieraus folgt durch Division der obige Ausdruck.

Korrektionen. 1. Wegen des Polabstands $\mathfrak{l}$ der Nadel ist der Ausdruck für f in 1. H.-L. mit $1 + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$, in 2. H.-L. mit $1 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$ zu multipliciren.

2. Die Abnahme der Kraft mit $1/a^3$ ist nicht streng richtig. L soll die Länge, r_1 und r_0 den äußeren und inneren Halbmesser der Spule bezeichnen. a sei so groß, daß L^4 und r^4 gegen a^4 zu vernachlässigen sind. $(r_1^5 - r_0^5)/(r_3^1 - r_0^3)$ heiße k. Dann dividirt man den obigen Ausdruck für f in der 1. H.-L. durch $1 + (\frac{1}{2}L^2 - \frac{9}{10}k)/a^2$, in der 2. H.-L. durch $1 + (\frac{27}{40}k - \frac{3}{8}L^2)/a^2$.

3. Wegen Korrektionen der Tangentenbussole s. **64**, S. 292.

Abstandsmessung. Um a zu messen, kann man z. B. die Tangentenbussole folgeweise auf beiden Seiten von der Spule aufstellen und für a den halben Abstand der beiden Lagen des Nadelfadens setzen.

Stromschwankungen werden um so unschädlicher, je kleiner φ' ist. Liegt φ' auf der anderen Seite als φ, so ist es negativ zu nehmen.

Vgl. über die Ausführung und eingehendere Angaben der Korrektionen F. K., Wied. Ann. 18, 513. 1883. (Unter λ wird daselbst die ganze Nadellänge verstanden. In den Formeln für 1te H.-L. ist dort irrtümlich $\frac{3}{4}$ statt 0,52 als Faktor des Korrektionsgliedes mit λ^2/a^2 gesetzt.)]

83a. Selbstinduktions-Koefficient eines Leiters (Maxwell).

Koefficient der Selbstinduktion (elektromagnetische Kapacität; elektrodynamisches Potential eines Leiters auf sich selbst oder kurz Selbstpotential) Π heißt der Faktor, mit welchem die Änderungsgeschwindig-

keit di/dt des Stromes in dem Leiter zu multipliciren ist, um die el. Kraft der Induktion (des Extrastromes) zu erhalten. Vgl. Anh. 20b.

Über die Berechnung des Selbstpotentiales von Rollen s. Stephan, Wied. Ann. 22, 107. 1884; Über die Messung oder Berechnung kleiner Selbstpotentiale M. Wien, ib. 53, 928; Prerauer 53, 772. 1894.

Drückt man die zur Messung dienenden Gröſsen im [C-G-S]-System aus, so wird der Ind.-Koefficient in [cm] erhalten; aus Ohm, Farad etc. in „Quadrant" (wohl bezeichnender, als die Benennung „Henry").

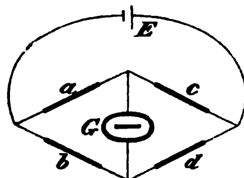
Über einen Leiter, dessen Selbstinduktion im Verhältnis 1:300 meſsbar veränderlich ist, s. M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. 1896.

Bei den Messungen ist auf ausreichende gegenseitige Entfernung der Leiter zu achten.

Sind Eisenkerne etc. vorhanden, so hängt der Ind.-Koefficient von der Stromstärke ab.

Bestimmung in der Brücke.

1. Nach Dorn. Der zu bestimmende Leiter sei im Zweige a enthalten. G ist ein ballistisches Galvanometer vom Widerstande γ. In den ungeteilten Strom kommt ein zweites Galvanometer. Die Widerstände werden so abgeglichen, daſs in G kein Strom, also daſs $a:b=c:d$ ist. Die Nadel des Instrumentes im Hauptstrom zeige die Ablenkung φ. Der Hauptstrom wird unterbrochen. Durch den dabei in a entstehenden Extrastrom mache die Nadel von G den Ausschlag e. Ihre Schwingungsdauer und ihr Dämpfungsverhältnis seien τ und k (51). $\Lambda = \log \operatorname{nat} k$.



Wir setzen $n = [\gamma(a+b+c+d)+(a+b)(c+d)]/d$.

Dann ist das Selbstpotential Π des Leiters a

$$\Pi = n \cdot \frac{\tau}{\pi} \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}} \frac{e}{\varphi} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}.$$

$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{c}$ bedeuten den Reduktionsfaktor (64 II, 66, 68a, 69) des Hauptgalvanometers bez. Brückengalvanometers. Ist das erstere eine Tangentenbussole, so hat man für φ zu setzen $\operatorname{tg}\varphi$.

Beweis: Ist $J=\mathfrak{C}\varphi$ der Stammstrom, i_a der Strom in a, so hat man zunächst $i_a = J(b+d)/(a+b+c+d)$. Während des Verschwindens von i_a ist die el. Kraft in a zur Zeit t gleich $\Pi \cdot di_a/dt$, der Strom i in G also (S. 282, 1. Beispiel) $i = \Pi \frac{di_a}{dt} \frac{c+d}{\gamma(a+b+c+d)+(a+b)(c+d)}$. Drückt

man hier i_a durch J aus und berücksichtigt ferner, dafs $a:b=c:d$ oder $ad=bc$ gemacht war, also $(b+d)(c+d)=(a+b+c+d)d$, so findet man $i=\Pi \cdot \mathrm{d}J/\mathrm{d}t \cdot 1/n$. Also ist

$$\int i\,\mathrm{d}t = \Pi J/n \text{ oder } \Pi = n\int i\,\mathrm{d}t \cdot 1/J = n \cdot \mathfrak{c}\tau/\pi \cdot e \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda} \cdot 1/\mathfrak{C}\varphi,$$

wenn $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$ die Reduktionsfaktoren der beiden Galvanometer sind.

Zur direkten Vergleichung werden die beiden Galvanometer zu verschieden empfindlich sein. Wie man sich durch Widerstände, Abzweigungen u. s. w. hilft, um $\mathfrak{c}/\mathfrak{C}$ zu bestimmen, s. in 69.

Zur Rechnung vgl. S. 366 u. Tab. 21b.

2. Nach Rayleigh. Anstatt den Stammstrom J zu messen, kann man einfacher an G selbst den Ausschlag e' bei Dauerstrom beobachten, nachdem man einen kleinen Widerstand w in den Zweig a zugeschaltet hat.

Dann ist $\Pi = w \cdot \tau/\pi \cdot e/e' \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}$.

Denn nach dem Zufügen von w entsteht ein Strom in der Brücke

$$\mathfrak{c} \cdot e' = J \cdot \frac{wd}{(a+b)(c+d)+\gamma(a+b+c+d)} = J\frac{w}{n}.$$

3. Vergleichung zweier Selbstpotentiale (Maxwell). In den Zweigen a und c mögen sich, hinreichend weit von einander aufgestellt, die Leiter mit den Selbstpotentialen Π und Π' nebst Rheostaten- oder Draht-Widerständen befinden; b und d seien induktionsfrei. Die Widerstände werden derartig abgeglichen, dafs die Nadel von G sowohl bei Dauerstrom wie bei der Schliefsung oder Öffnung ruhig bleibt.

Dann ist $\Pi/\Pi' = b/d \,(= a/c)$.

Diese Beziehung folgt aus Nr. 1, vor. S., denn man kann den Ausschlag Null ansehen als aus den beiden entgegengesetzt gleichen von Π und Π' herrührenden Ausschlägen $\alpha = A \cdot \Pi/n$ und $\alpha = A \cdot \Pi'/n'$ zusammengesetzt, wo A den gemeinsamen Ausdruck $\mathfrak{c}/\mathfrak{C} \cdot \tau/\pi \cdot 1/\varphi \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}$ bezeichnet. n und n' aber unterscheiden sich nur durch die Nenner d und b. Also ist $\Pi/\Pi' = n/n' = b/d$.

4. Vergleichung eines Selbstpotentials mit der Kapacität eines Kondensators (Maxwell). Die Spule mit dem Selbstpotential Π befinde sich im Zweige a; dem Zweige d wird ein Kondensator von der elektromagnetisch gemessenen Kapacität C (86) parallel geschaltet, d. h. die Enden von d werden durch kurze Drähte mit den beiden Belegungen verbunden. Bleibt die Nadel von G sowohl bei Dauerstrom wie

bei Schliefsung oder Öffnung ruhig, so ist $\Pi/C = a \cdot d = c \cdot b$. Die Widerstände a, d oder b, c in [cm/sec] gemessen und C elektromagnetisch in [$cm^{-1}sec^2$], erhält man Π in [cm]. Wahre Ohm und Farad geben Π in „Quadrant"; s. Anh. 20a, 20b, 21.

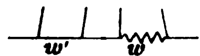
5. Vergleichung durch das akustische oder optische Telephon. Die Methoden 3 und 4 sind auch so auszuführen, dafs man in die Brücke statt des Galvanometers ein Telephon schaltet und als Stromquelle ein kleines Induktorium oder zum optischen Telephon einen synchronen Unterbrecher nimmt; s. Fig. S. 301 u. 334. Wenn die Reaktion des Telephons verschwindet, gelten die unter 3 bez. 4 aufgestellten Gleichungen.

Einstellungsverfahren für Nr. 3, 4 u. 5. Die Aufgabe umfafst jedesmal zwei zu erfüllende Bedingungen: erstens müssen die 4 Widerstände in Proportion stehen, zweitens mufs diese Proportion gerade diejenige sein, welche den zu vergleichenden Selbstinduktionen etc. entspricht. Verlangt wird also auf jeder Seite ein verstellbarer Verzweigungspunkt. Man kann z. B. für die Zweige b und d einen Brückendraht mit Schleifkontakt nehmen oder für b einen konstanten Widerstand, für d einen Rheostaten. Auch in ac ist ein Schleifkontakt bequem; doch wird daselbst oft auch ein Rheostat notwendig sein. Insofern die Leiter mit Induktion den Zweigen zugeschaltet werden, ist ihr Widerstand in dem betr. Zweige natürlich zuzurechnen.

Die richtigen Verhältnisse mufs man ausprobiren, wobei man unter Umständen so verfahren kann: Man stellt $a:c$ so, dafs die Reaktion des Strompröfers ein Minimum wird, alsdann $b:d$, dann wieder $a:c$ etc. bis man die Reaktion Null gefunden hat.

Bestimmung durch Abzweigen.

6. Der Leiter w mit Selbstinduktion Π wird mit einem induktionslosen Widerstande w' in den Kreis eines sinusartigen



Wechselstroms von der Wechselzahl (d. h. der doppelten Periodenzahl) ν/sec eingeschaltet. Man legt ein Elektrometer in Doppelschaltung (84a II) oder eine Abzweigung von grofsem Widerstande durch ein Dynamometer oder durch ein Hitzdrahtgalvanometer an die Enden von w, dann von w', und mifst die mittleren Quadrate der Klemm-

spannungen oder der Zweigströme L bez. L'; L' sei durch geeignete Wahl von w' am besten etwa gleich L gemacht. Dann ist

$$L : L' = (w^2 + \pi^2 \nu^2 \Pi^2) : w'^2$$

also

$$\Pi = \frac{1}{\pi \nu} \sqrt{\frac{L}{L'} w'^2 - w^2}.$$

Mit einem in den Hauptstrom eingeschalteten Dynamometer etc. oder einem an zwei Punkte konstant angelegten Elektrometer prüft man die Konstanz der Energie des Wechselstromes bez. stellt ihre Änderung fest. Beträgt die mittlere Energie zu beiden Versuchen E bez. E', so ist L/L' in obiger Formel mit E'/E zu multipliciren.

$\sqrt{w^2 + \pi^2 \nu^2 \Pi^2}$ entspricht bei dem Leiter mit Selbstinduktion dem Widerstande eines induktionslosen Leiters und wird wohl der „scheinbare Widerstand" oder die „Impedanz" des ersteren für eine Wechselzahl ν genannt. Vgl. auch **77a**, B und Anh. 20b.

Vgl. 1. Dorn, Wied. Ann. 17, 783. 1882; 2. Lord Rayleigh, Phil. Trans. 1882 II, S. 661; 3. Maxwell, Elektr. II, Art. 757; 4. ib. Art. 778; 5. M. Wien, Wied. Ann. 44, 689. 1891; 57, 249. 1896, wo auch Hindernisse und Schwierigkeiten besprochen werden. Über die Theorie auch Oberbeck, ib. 17, 826. 1882. Andere Methoden mit dem Magnetinduktor: F. K. ib. 31, 594. 1887; mit dem optischen Telephon von bekannter Periode M. Wien l. c.; auch Roiti, Foster, Joubert. Über einen Sinusinduktor s. F. K. Pogg. Ann. Jubelbd. S. 292. 1874. Eine Zusammenstellung vieler Methoden, Berechnungsformeln und der Litteratur in Heydweiller, Elektr. Messungen S. 179ff. Leipz. 1892.

83b. Gegenseitiger Induktionskoefficient.

In einem Leiter I ändere sich eine Stromstärke mit der Geschwindigkeit di/dt. In einem benachbarten Leiter II werde hierdurch eine el. Kraft $\Pi_{12} \cdot di/dt$ inducirt, dann heifst Π_{12} der Induktionskoefficient von I auf II. Es ist immer $\Pi_{12} = \Pi_{21}$. Vgl. auch Anh. 20b und den Eingang zu **83a**.

I. Direkte Bestimmung.

Durch den einen Leiter werde der gemessene Strom i geschickt, der andere sei durch ein ballistisches Galvanometer (**67a**, 8) zu einem Kreise vom Widerstande w geschlossen. Unterbrechung oder Schliefsung des primären Kreises bewirke im sekundären den Stromstofs Q (**78a** I), dann ist

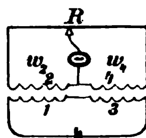
$$\Pi_{12} = w \cdot Q/i.$$

Denn es ist $\int e\,dt = \Pi_{12} \cdot i$ und $Q = 1/w \cdot \int e\,dt$.

Q/i läfst sich ersetzen durch den Ausdruck $\frac{\tau}{\pi} \frac{C}{\mathfrak{C}} \frac{e}{\varphi} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}$; vgl. über die Bedeutung dieser Gröfsen **83a** 1.

II. Vergleichung zweier gegenseitiger Ind.-Koefficienten (Maxwell, Elektr. § 755).

Man schaltet die inducirenden Rollen 1 und 3 mit einer Batterie und einem Stromschlüssel zu einem Stromkreise, die inducirten 2 und 4 mit induktionsfreien Rheostatenwiderständen, deren Verhältnis man ändern kann, zu einem zweiten Kreis, den man durch ein Galvanoskop überbrückt. Bleibt das letztere bei Stromwechsel ruhig, so ist



$$\Pi_{12} : \Pi_{34} = w_2 : w_4,$$

wenn w_2 und w_4 die Gesamtwiderstände links und rechts von der Brücke bezeichnen.

Beweis: Die el. Kräfte in den Zweigen durch die Entstehung etc. des primären Stromes stehen jederzeit im Verhältnis $\Pi_{12} : \Pi_{34}$.

Anstatt Batterie und Galvanoskop werden Induktionsapparat und Telephon oft bequemer sein. — Stromerreger und Stromprüfer kann man auch auswechseln.

Sind die Widerstände der Rollenpaare ungleich, so schaltet man vorteilhaft die weniger ungleichen in denselben Stromkreis.

III. Abgleichung eines gegenseitigen und eines Selbstinduktionskoefficienten (Maxwell, Elektr. § 756).

Gegeben seien zwei gegen einander verstellbare Rollen, z. B. die Anordnung von M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. Die eine Rolle kommt in die unverzweigte Leitung, die andere in den Zweig a der Brücke (Fig. S. 392) und zwar so gerichtet, dafs ihre Selbstinduktion Π der von der anderen Rolle erlittenen Induktion Π_{12} entgegengesetzt wirkt. Die Widerstände werden mit Dauerstrom bis zur Stromlosigkeit der Brücke, d. h. $a:b=c:d$ abgeglichen, dann werden die Rollen so gegen einander verstellt, dafs die Stromlosigkeit auch bei Stromwechsel erhalten bleibt. Dann ist $\Pi = \Pi_{12}(1+a/b)$ oder $\Pi_{12}(1+c/d)$.

Folgt daraus, dafs das el. Kraft-Integral in a bei Entstehung des Stammstromes J, des Zweigstromes i in a gleich $\Pi_{12}J - \Pi i$ auf Null gebracht und dafs aufserdem (S. 392) $J : i = (a+b+c+d) : (b+d)$ ist.

S. auch M. Wien, Wied. Ann. 44, 697. 1891; Heydweiller ib. 53, 499. 1894.

83c. Transformatoren.

I. Inducirte el. Kraft. Es seien $w_1 w_2$; $p_1 p_2$; $i_1 i_2$ die Widerstände, und die (effektiven) Klemmspannungen und Stromstärken (d. h. die in **77a** B I mit P_e und i_e bezeichneten Gröfsen) in beiden Wicklungen, L_1 die den Primärklemmen zu-, L_2 die von den Sekundärklemmen abgeführte Leistung (S. 356), $e_1 e_2$ die zusammen durch die Oscillationen des Magnetismus und der Ströme durch gegenseitige und Selbstinduktion primär und sekundär inducirten (effektiven) el. Kräfte. Für moderne Transformatoren sind e und p nahe gleich, und es gilt unabhängig von der Stromform sehr nahe die Beziehung

$$e_1 = p_1 - \frac{w_1 L_1}{p_1}; \quad e_2 = p_2 + \frac{w_2 L_2}{p_2}.$$

Danach lassen sich e_1 und e_2 bestimmen, da die Gröfsen rechts nach **77a** B zu messen sind.

II. Das Übersetzungsverhältnis p_2/p_1 ist sehr nahe gleich e_2/e_1 und dies sehr nahe gleich dem Verhältnis der Windungszahlen. Zwei auf einander reducirte Wechselstromspannungsmesser (**77a** B I), der für die Hochspannung mit geeignet gröfserem, induktionsfreiem Vorschaltwiderstand, dienen zur Messung.

Bei konstantem p_1 nimmt p_2 vom Leerlauf bis zur Vollbelastung (vgl. die obige Formel) nur sehr wenig ab, z. B. bei Transformatoren für mehr als 2 Kilowatt Leistung um 2 bis 3%.

III. Wirkungsgrad L_2/L_1. Derselbe wird, analog wie unter **77a**, A V angegeben, folgendermafsen durch eine Verlustbestimmung ermittelt.

Mit der, durch die Konstruktion des Transformators bedingten normalen Leistung L_2 wird die mit dem Effektmesser bestimmte Leistung l' verglichen, welche in die Primärwicklung bei normalem p_1 und offenem Sekundärkreis hineinfliefst. Indem man bei diesem Leerlaufversuch die Spannung p_1 ebenso hoch hält, wie bei dem Normalbetrieb (schärfer ist das wenig verschiedene e_1 an der Hand der unter I gegebenen Formeln konstant zu halten), so ist die Magnetisirung in beiden Fällen dieselbe, also auch der Hysteresis- und Wirbelstromverlust V'. l' liefert, ev. um das sehr kleine $w_1 i_1'^2$ vermindert, dieses V'.

Dazu kommt das für die Ströme bei Normalbetrieb zu ermittelnde $V = i_1^2 w_1 + i_2^2 w_2$ (vgl. S. 357).

Der gesamte aus diesen vier Gröfsen bestehende Transformatorenverlust beträgt bei modernen Apparaten

für eine Leistung von	> 20	von 5	von 1 Kilowatt
	$< 3\%$	etwa 5%	etwa 8%.

Der durch die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Stromstärke bedingte Leistungsfaktor der in die Primärwicklung eingeführten Energie (vgl. S. 361) ist bei Vollbelastung kaum von 1 verschieden, da alsdann diese Phasenverschiebung sehr klein ist. Derselbe sinkt mit Abnahme der Belastung zunächst langsam, dann schneller bis auf etwa 0,6 bei Leerlauf (für die jetzt gebrauchten eisengeschlossenen Typen).

IV. Phasenverschiebung φ. Gemessen seien die (effektive) Klemmspannung p, Stromstärke i und die Leistung L. Die Phasenverschiebung ist gegeben durch $\cos\varphi = L/(pi)$.

Die Phasen von Primär- und Sekundärstrom sind bei Vollbelastung für einen modernen Transformator, auf gleiche Richtung im Raum bezogen, fast genau entgegengesetzt.

Elektrostatik.

84. Allgemeines über elektrostatische Arbeiten.

Isolirung. Gut isolirende Stützen liefert Schellack. Zur Beseitigung der Oberflächenleitung des Glases dient Abwaschen oder besser Abkochen mit destillirtem Wasser und Trocknen in staubfreier Luft. Frisch gereinigte Gläser isoliren meistens gut. Die dauerhafteste Isolirung liefert Flintglas, schwer schmelzbares Kaliglas, alkalifreies Glas aus Jena; oder auch ein Überzug von Schellack. Paraffin isolirt gut, deformirt sich aber leicht. Paraffinirtes Holz (7 19) genügt für manche Zwecke. Für höhere Temperaturen leisten parallel zur Axe geschnittene Quarzplättchen gute Dienste.

Wenn die Entladung eines gewöhnlichen Elektroskops durch die Berührung mit einem abgeleiteten Körper eine merkliche Zeit in Anspruch nimmt, so ist der Widerstand des Körpers mindestens auf die Ordnung 10^{10} Ohm zu schätzen.

Influenzmaschinen hält man am einfachsten durch Anwärmen der Scheiben mit einem zwischengesetzten Petroleumlämpchen (Ganglampe) trocken. Man achte auf Fasern der Transmissionsseile und ähnliches.

Schutzhüllen. Um Influenzwirkungen nach und von aufsen zu beseitigen, schliefse man die Apparate und Leitungen in zur Erde abgeleitete, metallische Hüllen ein (Pappe, innen mit Stanniol überzogen; Netz aus Draht oder aus Stanniolstreifen, die auf, oder besser in die Glashüllen geklebt sind u. dgl.).

Vorsichtsmafsregeln bei der Messung mit abgetrennten Elektricitätsmengen. Zur Vermeidung von Reibungselektricität füllt man in Kommutatoren u. dgl. das Quecksilber in Fingerhüte, welche in eine isolirende Unterlage eingesetzt werden.

Messungen kleiner Kapacitäten verlangen Zuleitungen, Kommutatoren u. dgl. von kleiner Kapacität. Man stellt Kommutatoren z. B. aus Platindrähtchen an Schellackstäbchen her und bewirkt die Verbindungen durch ebenso gehaltene Platindrahtbügel.

Kondensatoren für genauere Messungen sollen keine Rückstände liefern. Man wähle Luftkondensatoren oder auch solche mit Paraffin; bei der Herstellung werden die Kondensatorplatten unter Vermeidung von Verunreinigungen (z. B. Öl) in flüssiges Paraffin völlig eingetaucht; s. Arons, Wied. Ann. 35, 291. 1888.

Rückstandsfreie Träger werden durch kleine, abgeleitete, nicht ganz bis an ihre Enden mit Paraffin ausgegossene Metallröhrchen geliefert, in deren Axen die Leitungsdrähte laufen.

Erzeugung konstanter Potentiale. Am besten dienen vielpaarige galvanische Ketten, z. B. Spamer'sche Chromsäureelemente (S. 284). Höhere Potentiale werden durch Leidener Batterien geliefert.

Nullpunkt des Potentials. Meſsbar sind nur Differenzen von Potentialen. Um für diese einen allen Apparaten einer Versuchsanordnung gemeinsamen Anfangspunkt, ein Potential „Null", festzulegen, verbindet man alle auf demselben zu haltenden Körper mit der Erde (Wasserleitung, Gasleitung, Erdplatte).

Im Folgenden ist unter Potential stets die Potentialdifferenz gegen den gewählten Nullpunkt verstanden.

84a. Messung von Potentialen (Spannungen). Elektrometer.

I. Sinus-Elektrometer (R. Kohlrausch).

Ablenkung der Magnetnadel um den Winkel φ, in einer ein für allemal bestimmten Stellung zu dem abstoſsenden Arm, bedeutet das Potential $V = C\sqrt{\sin\varphi}$.

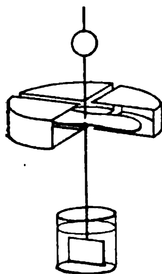
Die konstante Stellung erkennt man durch einen Spalt an dem Koincidiren des zweimal gespiegelten Bildes einer Marke mit einem Punkte auf dem Spiegel der Nadel. φ ist der Winkel, um welchen man bis zu diesem Einspielen der Nadel das Instrument von dem Nullpunkte an nachdrehen muſste.

Verschiedene Nadeln sowie verschiedene Stellungen derselben gegen den Arm ermöglichen sehr verschiedene Werte von C. Um diese auf einander zu reduciren, wird eine, einige Zeit zuvor geladene Leidener Batterie von groſser Kapacität unter den zu vergleichenden Umständen mit dem Instrument verbunden und φ beobachtet. Den Elektricitätsverlust eliminirt man durch alternirendes Beobachten in gleichen, kurzen Zeitintervallen.

R. Kohlrausch, Pogg. Ann. 88, 497. 1853.

II. Quadrantelektrometer (Thomson).

Einstellung. Die beiden Quadrantenpaare sollen gleichmäſsig auf die „Nadel" wirken. Zu diesem Zwecke stelle man bei Ableitung sämtlicher Elektrometerteile zur Erde die Symmetrielinie der Nadel in einen Trennungsdurchmesser der Quadranten ein.



Genauere Orientirung. Man dreht die Nadel mittels der Aufhängung so, daſs der bei abgeleiteten Quadranten unter Anlegung eines hohen Potentials an die Nadel eintretende Ausschlag ein Minimum wird,

oder besser, dafs die unter Vorzeichenwechsel dieses hohen Potentials eintretenden entgegengesetzten Ausschläge gleich werden.

Nach einer frischen starken Ladung der Nadel ist das Gleichgewicht zuweilen instabil. Oft hilft blofses Abwarten. Sonst verstelle man, wenn dies möglich ist, einen Quadranten, oder versuche, ob eine Änderung der Nadellage hilft; oder endlich, man gebe eine schwächere Ladung.

Allgemeine Formel. Werden die Quadrantenpaare und die Nadel bez. auf die Potentiale Q_1, Q_2 und N gebracht, so tritt eine mit Spiegel und Skale (48, 49) zu beobachtende Drehung der Nadel um den Winkel α ein

$$\alpha = C(Q_1 - Q_2)(N - \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)),$$

wo C die Elektrometerkonstante ist (84c).

Die Zuleitung zum „Biscuit" geschieht von oben durch den Aufhänge-Draht oder versilberten Quarzfaden oder aber von unten durch den in Schwefelsäure tauchenden Beruhigungsflügel.

Mit Hilfsladung.

1. Quadrantschaltung. Das eine Quadrantenpaar wird dauernd auf dem Potential Null, die Nadel auf einem gegen das zu messende hohen Potential gehalten. Letzteres geschieht mit einer andrerseits abgeleiteten vielpaarigen Kette oder bei geringeren Anforderungen an Konstanz mit einer Zamboni'schen Säule oder einer, oft schon mit dem Instrument verbundenen Leidener Flasche.

Die Ladung des zweiten, vorher abgeleiteten Quadrantenpaares zu dem Potential V bewirkt dann eine mit V nahe proportionale Ablenkung. Die meist vorhandene Unsymmetrie der Ausschläge wird mittels Kommutiren von V durch Messung des Gesamtausschlages eliminirt.

Die Ausschläge für $+V$ und $-V$ sind nach der Formel gleich $CV(N - \frac{1}{2}V)$ und $CV(N + \frac{1}{2}V)$, sie unterscheiden sich also von einander um V/N ihres Betrages, z. B. um 2%, wenn 50 Chromsäure-Elemente (100 Volt) die Nadel laden und wenn 2 Volt gemessen werden.

2. Nadelschaltung. Die beiden Quadrantenpaare werden dauernd durch Verbinden mit den Polen einer vielpaarigen galvanischen Kette, deren Mitte zur Erde abgeleitet ist, auf entgegengesetzt gleiches Potential geladen. Verbindet man die vorher abgeleitete Nadel dann mit dem zu messenden Potential V, so tritt (siehe die obige Formel) eine mit V proportionale Ablenkung ein. Eventuell vertausche man das Vorzeichen

von V mittels eines Kommutators. Vollkommene entgegengesetzte Gleichheit der Quadrantenpotentiale ist nicht nötig.

Bei Beobachtungen mit Hilfsladung muſs man wegen der Schwankungen des Hilfspotentials von Zeit zu Zeit die Empfindlichkeit bestimmen (**84c** I).

Ohne Hilfsladung (Doppelschaltung) für gröſsere Potentiale.

Die Nadel und das eine Quadrantenpaar sind abgeleitet. Das vorher abgeleitete zweite Quadrantenpaar gebe dann mit einem Potential V einen Ausschlag e, so ist

$$V = c \cdot \sqrt{e}.$$

Statt die mit der Nadel verbundenen Quadranten abzuleiten, die anderen zu laden, kann man auch umgekehrt verfahren.

Gröſsere Skalenausschläge werden auf Winkel reducirt (49); doch kann man die Korrektion auch mit der Kaliberkorrektion (84c) vereinigen. Ferner ist bei genaueren Messungen der mittlere Ausschlag bei gleichzeitiger Vertauschung der Quadranten und des Potentialvorzeichens zu nehmen, um Kontakt-Potentialdifferenzen zwischen den Elektrometerteilen zu eliminiren. Ohne dies können erhebliche Fehler entstehen. S. Hallwachs, Wied. Ann. 29, 1. 1886; 55, 170. 1895.

Die Konstanz ist hier nur bedingt durch die Konstanz der Aufhängung in Bezug auf Direktionskraft, Länge und Torsion und ist durch sehr feine Metalldrähte oder versilberte Quarzfäden in weitem Umfang erreichbar.

Die Empfindlichkeit variirt mit Vertikalverschiebungen der Nadel und läſst sich dadurch variiren. Bei genaueren Messungen stelle man aber die Nadel womöglich in die Mitte der Quadrantenschachtel, die Minimumlage der Empfindlichkeit. Ein Nachlängen der Suspension hat dann weniger Einfluſs, auch wird die Symmetrie der Ablenkungen in dieser Lage am wenigsten durch Verbiegungen der Nadel, ungleiche Höhe der Quadranten etc. gestört.

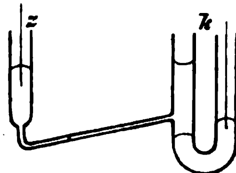
Die dämpfende Flüssigkeit (Schwefelsäure, staubfrei) veranlaſst häufig Nullpunktsverschiebungen, Kriechen der Nadel. Das Beruhigungsplättchen soll an einem äuſserst feinen platinirten und geglühten Platindraht (7, 18) aufgehängt sein, der central durch die Flüssigkeitsoberfläche geht. Über andere Dämpfung s. Hallwachs l. c.

Formen des Quadrantelektrometers s. bei Kirchhoff, Branly, Mascart, Edelmann, Hallwachs.

III. Kapillar-Elektrometer (Lippmann).

Die Kapillarspannung in einer mit verdünnter Schwefelsäure in Berührung stehenden Quecksilberoberfläche wird durch Polarisation mit Wasserstoff um einen Betrag verkleinert, welcher der Polarisation nahe proportional ist, so lange diese unter etwa $^1/_{10}$ Volt bleibt. Später wird die Abnahme langsamer; einem Minimum der Kapillarkonstante bei etwa 1 Volt folgt dann wieder eine Zunahme.

Wässrige Schwefelsäure (25% etwa) steht mit Quecksilber in Berührung einerseits in der Kapillare einer eng ausgezogenen Glasröhre, andererseits in einem weiten Glasrohr. Aus beiden Quecksilbermassen ragen Platindrähte *z* und *k* als Elektrometerpole heraus. Der negative Pol der zu messenden Spannungsdifferenz, welche < 1 Volt sein mufs, wird mit *z*, der andere mit *k* verbunden. Man beobachtet entweder mit einem Mikroskop die Gröfse der Verschiebung oder die Gröfse der Druckänderung, welche die Kontaktstelle auf den Nullpunkt zurückführt. Nullpunkt ist Einstellungspunkt bei metallischer Verbindung von *z* mit *k*.



Die Aichung des Instrumentes geschieht, unter Benutzung des Satzes von der Proportionalität der Änderung mit kleinen Spannungen, durch bekannte Elemente (**63**, S. 283ff.).

Nach Anwendung einer zu grofsen oder einer verkehrt gerichteten Spannung ist das Quecksilber an der Berührungsstelle in der Kapillare zu erneuern.

Lippmann, Pogg. Ann. 149, 546. 1873. Einfache Formen für das Kapillar-Elektrometer s. z. B. bei Ostwald, physiko-chemische Messungen S. 243.

IV. Andere Elektrometer.

1. Hankel'sches Elektrometer. Das Gold- oder Aluminiumblatt oder der versilberte Quarzfaden und die beiden seitlichen Ladungsplatten spielen dieselbe Rolle wie unter II Nadel und Quadrantenpaare. Man benutzt die gleichen Schaltungen wie dort. Ein Mikroskop mit Okularmikrometer mifst die Verschiebungen an einem feinen Zacken des Blättchens. Für scharfe Einstellung beleuchte man mit einer nicht grofsen Gasflamme aus einiger Entfernung.

Das Instrument hat sehr kleine Kapacität und momentane Einstellung. Bei maximaler Empfindlichkeit läfst sich 0,01 Volt beobachten. Durch Entfernen oder Annähern der Seitenplatten bezw. Änderung des Hilfspotentials wird die Empfindlichkeit variirt. Doppelschaltung mifst bis etwa 100 Volt.

2. Blattelektroskope. Aluminium- oder Goldblatt-Elektroskope mit geeignetem Gradbogen lassen Potentiale von 50 bis 10 000 Volt messen. Die Blättchen sollen möglichst in abgeleitete Metallhüllen eingeschlossen sein (84). Die Skala mufs empirisch graduirt werden.

Über ein Elektroskop für Potentiale von 50—200 Volt s. Exner, Wiener Berichte 95 II, 1088. 1887; ein dergl. mit einem um eine Axe spielenden Aluminiumstreifen für 500—10 000 Volt s. bei Braun, Wied. Ann. 31, 857. 1887 u. 44, 771, 1891.

3. Righi'sches Reflexionselektrometer, für stärkere Spannungen von etwa 3000 bis 25000 Volt, als Hilfsapparat des absoluten Elektrometers besonders geeignet (84b). Eine Nadel, welche auf das zu messende Potential V geladen wird, wird durch ihre unsymmetrische Stellung zu zwei Ausschnitten im Gehäuse oder dgl. abgelenkt. Die Ausschläge e sind dem Quadrat von V genähert proportional. Bei der empirischen Graduirung (84c) kann man die Formel $V = c\sqrt{e(1-c'e)}$ zu Grunde legen. Über Flüssigkeitsdämpfung s. S. 402.

Eine andere Anordnung für 6000 bis 60 000 Volt s. Heydweiller, Z. S. f. Instr. 1892, 377.

Vergleichung elektromotorischer Kräfte.

Die el. Kraft einer Säule ist dem Potentialunterschiede an ihren Polen proportional, wonach sich die el. Kräfte wie die am Elektrometer hervorgebrachten Ausschläge verhalten.

Auch der Potentialunterschied (die Spannung) zwischen verschiedenen Punkten eines geschlossenen Stromkreises, z. B. die Klemmspannung einer Dynamomaschine läfst sich elektrometrisch bestimmen.

Vergleichung von Widerständen.

Man schalte die zu vergleichenden Widerstände gleichzeitig hinter einander in denselben Stromkreis ein, dessen Konstanz man prüft, bringe die beiden Endpunkte von einem derselben

mit den Zuleitungsdrähten in Verbindung und beobachte den Ausschlag des Elektrometers. Verfährt man mit dem anderen Widerstande ebenso, so gibt das Verhältnis der Potentialunterschiede das Verhältnis der Widerstände.

Um elektrolytische Widerstände so zu bestimmen, verbindet man die Enden des Elektrolytes, der sich in einer kalibrirten engen Glasröhre befindet, durch Vermittelung von polarisationsfreien Elektroden (Zink in Gefäfsen mit Zinksulfatlösung, welche in geeigneter Weise mit den Enden der Glasröhre zusammenhängen) mit dem Elektrometer.

Bouty, Ann. d. ch. (6) III, 433. 1884.

Messung einer Strom-Energie.

Ein Elektrometer in Doppelschaltung werde an das eine Ende eines Widerstandes w im Stromkreis angelegt, während das andere Ende von w abgeleitet ist. Der Ausschlag, geteilt durch w, ist der Strom-Energie/sec innerhalb der Strecke w proportional, wenn innerhalb w keine el. Kräfte liegen. Dies gilt in induktionsfreien Leitern auch für Wechselströme.

84b. Absolute Messung eines Potentials in elektrostatischen Einheiten. (W. Thomson.)

Eine bewegliche von einem Schutzringe umgebene, kreisförmige ebene Platte von der Gröfse f hängt über einer gröfseren festen Platte in einem kleinen Abstande a. Der Potentialunterschied $V - V_0$ bedingt dann eine gegenseitige Anziehungskraft $k = \frac{1}{8} f/\pi \cdot (V - V_0)^2/a^2$. Man erhält also

$$V - V_0 \quad \text{oder, wenn } V_0 = 0 \text{ ist,} \quad V = a\sqrt{8\pi k/f}.$$

Alle Längen in cm, k in Dynen gemessen, kommt V in elektrostatischen [C-G-S], von denen eine Einheit 300 Volt beträgt. (Anh. 6, 12 u. 20.)

Für f ist genauer zu setzen, wenn R und R' die Halbmesser der beweglichen Scheibe und des Schutzringes bedeuten, also $b = R' - R$ die Breite der schmalen Fuge,

$$f = \frac{\pi}{2}\left(R^2 + R'^2 - \frac{R'^2 - R^2}{1 + a/(0{,}22\,b)}\right).$$

Die Schwierigkeit, a genau zu messen, umgeht man so: Die feste Platte wird auf irgend ein konstantes, nicht zu kleines Potential von entgegengesetztem Vorzeichen wie das zu messende geladen, während die bewegliche Platte zunächst zur Erde abgeleitet wird. Die dadurch in der Nullstellung ausgeübte Kraft sei k. Jetzt werde der beweglichen Platte das zu messende Potential V mitgeteilt. Damit dieselbe dann wieder in ihre Normalstellung kommt, müsse der Abstand a um l vermehrt werden. Alsdann ist $V = l\sqrt{8\pi k/f}$.

Kirchhoff'sche Wage. Die bewegliche Platte bildet die Schale einer Wage, mit dem Schutzring in einer Ebene liegend wenn der Wagezeiger auf Null steht. Ein Anschlag der zweiten Wagschale verhindert weitere Annäherung an die tiefer stehende feste Platte.

Wird letztere auf ein Potential V geladen, so mufs man auf die zweite Wagschale p Gramm legen, damit die Wage umzukippen beginnt. Das Potential bestimmt sich dann nach der oben gegebenen Formel, wenn man $k = 981 \cdot p$ setzt. Der Beginn des Umkippens wird durch das Aufhören eines galvanischen Stromes scharf fixirt, welcher durch den Anschlag zur zweiten Wagschale fliefst.

Näheres s. Quincke, Wied. Ann. 19, 561. 1883; Czermak, Wiener Berichte 97, 307. 1888. — Vgl. Maxwell, Elektr. I, § 217. 218. Wiedemann, Elektricität, 4. Aufl. I, S. 182.

Das Verfahren ist für Potentiale von reichlich 1000 Volt an aufwärts geeignet.

Schlagweite. Dieselbe liefert unter Umständen ein bequemes Mittel zur Schätzung hoher Potentiale von mindestens einigen 1000 Volt. S. darüber Tab. 27c.

Über einen Einflufs der Ladungszeit auf die Schlagweite vgl. Toepler, Pogg. Ann. 134, 217. 1868; Jaumann, Wied. Ann. 55, 655. 1895; Über den Einflufs der Belichtung der Kathode Warburg, Berlin. Sitz.-Ber. 1896, 223.

84c. Aichung und Kalibrirung eines Elektrometers.

Man beobachtet die Ausschläge, welche bekannte Potentiale, an das Elektrometer angelegt, hervorbringen.

I. Instrumente für kleinere Potentiale.

Bekannte Potentiale liefern Normalelemente von bekannter el. Kraft (S. 283ff.). Zur Kalibrirung beobachtet man die Aus-

schläge, welche mehrere Elemente einzeln und in ihrem Zusammenwirken hervorbringen.

Bekannte und kontrolirbar konstant zu haltende Potentiale bekommt man ferner durch Verbindung des Elektrometers mit verschiedenen Punkten eines stromdurchflossenen Rheostaten von großsem Widerstand, dessen eine Polklemme mit der Erde in Verbindung steht. Die ganze Klemmspannung des Rheostaten soll das gröfste zur Kalibrirung erforderliche Potential erreichen. Die Stromstärke i sei in Ampere gemessen. Liegt zwischen der abgeleiteten Polklemme und der Abzweigung zum Elektrometer ein Widerstand von w Ohm, so ist das Potential auf dem verbundenen Elektrometerteil iw Volt.

II. Instrumente für gröfsere Potentiale.

1. Mit einem absoluten Elektrometer; für Spannungen von etwa 1000 Volt und mehr. Die Potentiale werden durch eine, mit einer Leidener Batterie verbundene Influenzmaschine erzeugt. Am besten wird das absolute Instrument zuerst für das zu erreichende Potential eingestellt, erst dann die Ladung der beiden Instrumente vorgenommen, und zwar auf etwas höheres Potential wie das verlangte. Durch Annäherung einer abgeleiteten Spitze, Berührung mit einem Taschentuch u. dgl. bewirkt man dann ganz langsames Sinken des Potentials und liest, sobald das absolute Instrument einspielt, das zu aichende ab.

2. Mit galvanischer Kette; für Spannungen bis zu einigen Tausend Volt. Auch wenn die Spannung der Kette direkt nicht ausreicht, kann man auf folgendem Wege aichen.

a) Man verbindet die Säule mit der einen Endklemme eines Potentialverstärkers, mit der andern das Elektrometer. Ist z die Verstärkungszahl, V die Spannung der Kette (S. 283), so ist zV das Potential auf dem Elektrometer.

Hallwachs sowie Exner, l. c. (84 a).

b) Der eine Pol P_1 der isolirt aufgestellten Kette ist mit der innern Belegung einer grofsen, aufsen abgeleiteten Leidener Batterie dauernd verbunden. Man leite P_1 ab und verbinde P_2 mit dem zu aichenden oder mit einem passenden Hilfselektrometer und beobachte den der Spannung V der Kette entsprechenden Ausschlag n_1. Alsdann wird P_1 von der Erde gelöst und

das Elektrometer mit P_1 sowie einer Potentialquelle (Elektrisirmaschine etc.) verbunden und wieder bis zum Ausschlag n_1 geladen. Jetzt hat der Pol P_2 die Spannung $2V$.

Auf analoge Weise fortfahrend kann man beliebige Vielfache von V erzielen und an das Elektrometer anlegen. Voraussetzung ist eine gegen die Elektrometer grofse Kapacität der Batterie. Vgl. F. Braun, l. c. **84a.**

85. Messung der Elektricitätsmenge eines Kondensators.

Siehe auch **86** II.

1. Mit dem Elektrometer. Da die Ladungsmenge in einem bestimmten Kondensator dem Potential proportional ist, so lassen sich Ladungen desselben Kondensators mit dem Elektrometer (**84a**) vergleichen. Der „Rückstand“, d. h. die bei einer kurz dauernden Entladung zurückbleibende Elektricitätsmenge äufsert keinen Einflufs auf das Potential; den Angaben des Elektrometers ist also die durch eine kurz dauernde Verbindung beider Belegungen entladene „disponibele“ Ladung proportional.

2. Mit der Lane'schen Mafsflasche. Bei der Ladung einer Leidener Batterie kann man die zugeführte Elektricitätsmenge bestimmen, indem man die Belegungen isolirt und die eine mit der Elektrisirmaschine, die andere mit einer Mafsflasche verbindet. Jedem Funken der Mafsflasche entspricht ein bestimmter Zuwachs der Ladung der Batterie. Der Rückstand wird hier mit gemessen.

Angaben der Mafsflasche bei verschiedener Schlagweite reducirt man empirisch auf einander, etwa indem man mit dem Righi'schen oder dem Sinus-Elektrometer die entsprechenden Potentiale vergleicht. Nicht zu kleine Schlagweiten sind nahezu dem Potential proportional; vgl. auch Tab. 27c und S. 406.

3. Mit dem Galvanometer. Eine grofse Elektricitätsmenge kann mittels ihrer Entladung durch ein Galvanometer von hinreichend isolirten Windungen bestimmt werden (**78a**). Die Gefahr eines Überspringens zwischen den Windungen oder einer Änderung des Nadelmagnetismus wird durch Einschaltung eines grofsen Widerstandes (feuchter Faden) vermindert.

Die elektromagnetisch gemessene Elektricitätsmenge 1[C-G-S] ist = 10 Am. sec. oder = $300 \cdot 10^8$ elektrostatisch gemessenen [C-G-S]-Einheiten; Anh. Nr. 11 und 19a.

4. Mit dem Luftthermometer (Riefs). Die Depression der Flüssigkeitssäule durch eine Entladung ist proportional dem Produkt aus der entladenen Elektricitätsmenge und ihrem Potential. Der Widerstand des Drahtes in der Thermometerkugel wird sehr grofs gegen die Widerstände der übrigen Entladungsstrecken vorausgesetzt. Da die Ladung derselben Leidener Flasche oder Batterie ihrem Potential proportional ist, so verhalten sich die entladenen Mengen wie die Quadratwurzeln aus den durch sie hervorgebrachten Depressionen.

86. Elektrostatische Kapacität.

Kapacität c eines Leiters ist die Elektricitätsmenge, welche ihn zum Potential 1 ladet, während die Leiter in influenzirbarer Nähe auf Null gehalten werden. Die Kapacität hängt nicht nur von der Form des Leiters, sondern auch von seiner Lage zur Umgebung ab (Beobachter, Tisch, Wand etc.).

Kondensatoren. Kapacität schlechtweg heifst hier die Kapacität der einen (inneren) Belegung, des „Kollektors". Zu feineren Mefszwecken benutzt man Luftkondensatoren (R. Kohlrausch), allenfalls auch solche mit Paraffin (84). Glas-, Glimmer-, Wachstafft- etc. Kondensatoren folgen wegen Rückstand und Oberflächenleitung den einfachen Kondensatorgesetzen nicht genau. Ihre Kapacität pflegt mit wachsender Temperatur zu steigen, bis über 1% auf 1°.

Vgl. z. B. Schneebeli, Zürch. Viertelj.-Schr. 1881, 160.

I. Aus den Dimensionen (in elektrostatischen Einheiten).

Die Kapacität einfach gestalteter Kondensatoren läfst sich berechnen. a bedeute den konstanten Abstand der Belegungen. Die Formeln gelten für Luft als Dielektricum; ev. ist mit der Dielektricitätskonstante (86a, Tab. 24b) zu multipliciren.

Parallele Flächen. Bei relativ sehr kleinem Abstande a ist, wenn f die Fläche bedeutet, genähert $c = f/(4\pi a)$.

Kreisplatten-Kondensator vom Radius r. Genähert $c = \frac{1}{4} r^2/a$. Genauer ist (d = Plattendicke):

$$c = \frac{r^2}{4a} + \frac{r}{4\pi}\left(\log\text{nat}\frac{16\pi r(a+d)}{a^2} - 1 + \frac{d}{a}\log\text{nat}\frac{a+d}{d}\right). \qquad 1.$$

Schutzring-Kondensator. r sei der Radius der Kollektorplatte, r' der innere Radius des Schutzrings, $b = r' - r$ die Furchenbreite.

Näherungsformel: $c = (r + r')^2/(16a)$.

Genauer ist:

$$c = \frac{(r+r')^2}{16a} - \frac{r+r'}{2\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \lg\operatorname{nat}\cos\beta), \qquad 2.$$

wo $\beta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}b/a$. Die Formel setzt b klein gegen die Plattendicke voraus. Eine genaue Formel bei Kirchhoff.

Kirchhoff, Abhandl. Formel 1 S. 112, wo der Abstand aber $= 2a$ gesetzt ist, und Formel 2 S. 117; eine andere Formel bei Maxwell, Elektr. I, § 201.

Cylinder-Kondensator von der Länge l, dem inneren Radius r, dem äufseren $r+a$. Wenn l grofs gegen r, so ist $c = \frac{1}{2}l/\log\operatorname{nat}\left(1+\frac{a}{r}\right)$; ist auch a klein gegen r, so wird $c = \frac{1}{2}lr/a$.

Kugel-Kondensator. Eine Kugel vom Radius r sei ganz eingeschlossen von einer abgeleiteten anderen vom Radius r'. Die Kapacität der ersteren ist dann $c = rr'/(r'-r)$.

Die elektrostatische Kapacität ist bei beliebiger Gestalt umgekehrt proportional der Gröfse, welche S. 280 Widerstandskapacität genannt ist, wenn man den Kondensator in eine grofse Flüssigkeitsmenge eingetaucht denkt und die beiden Platten als Elektroden ansieht.

Freistehende Kugel vom Halbmesser r. $c = r$.

Eine elektrostatisch in cm gemessene Kapacität gibt, durch 900000 geteilt, die Kapacität in Mikrofarad (Anh. 20a).

II. Mit dem Elektrometer.

Man beachte, besonders bei kleinen Kapacitäten, die Bemerkungen S. 399 und zu Anfang dieses §. Die zu vergleichenden Leiter müssen so aufgestellt sein, dafs sie sich nicht gegenseitig influenziren.

Schnelle Beruhigung der Elektrometerschwingungen läfst sich durch passendes Ein- und Ausschalten von Elementen in die Erdleitung des geeigneten Elektrometer-Teils erreichen.

1. Vergleichung durch Ladungs-Teilung. Der Leiter I wird, mit dem Elektrometer (Kapacität γ) verbunden, zum Potential V geladen. Der vorher abgeleitete Leiter II wird zugeschaltet: das Potential sinke auf V'. Dann ist

$$c_2 : (c_1 + \gamma) = (V - V') : V'.$$

Die Methode eignet sich für grofse Kapacitäten, bei denen γ einen geringen Einflufs hat. Sie stellt erhebliche Anforderungen an Isolation.

Die Kapacität γ eines Elektrometers läfst sich gerade so durch Ladungs-Teilung mit der eines Leiters, z. B. eines Kondensators, vergleichen.

Kapacitäten, namentlich des Quadrantelektrometers, auch der Zuleitungen etc. werden leicht unterschätzt. Eventuell ist auch auf die Änderung von γ mit der Ablenkung zu achten.

2. Vergleichung durch Gegenstellung. Man schließe eine vielpaarige galvanische Säule durch einen großen Widerstand (Rheostat) R und verbinde die Leiter I und II je mit einem Ende von R. An beliebiger Stelle von R sei eine Erdleitung anzubringen. Wird dieselbe so angelegt, daß nach der Abtrennung der Leiter deren Ladungen sich bei gegenseitiger Verbindung neutralisiren, so verhalten sich die Kapacitäten umgekehrt wie die beiderseitigen Teile von R.

Die Kapacität des Elektrometers, an welchem man die Neutralisirung prüft, kommt hier nicht in Betracht.

Beweis aus 68 I S. 282.

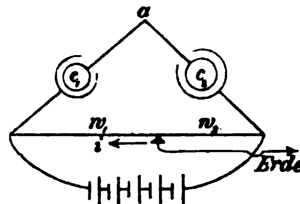
Die Methode läßt sich auf verschiedene Weise modificiren. Man kann z. B. die Leiter an die Pole der offenen Säule anlegen und die Erdleitung an der letzteren so anbringen, daß sie die Elementenzahl im Verhältnis $c_1 : c_2$ teilt.

Auch kann man, namentlich bei dem Vergleich nahe gleicher Kapacitäten, dem einen Pol der offenen Säule durch einen Widerstand geschlossene Elemente zufügen. Indem man von passender Stelle des Widerstandes ableitet, lassen sich die Potentiale genau in ein solches Verhältnis bringen, daß die Ladungen sich neutralisiren. Über die Ausführung vgl. Lebedew, Wied. Ann. 44, 289. 1891.

3. Vergleichung in der Brücke. Wird der Erdkontakt so verschoben, daß bei der Verbindung von a mit dem vorher abgeleiteten Elektrometer kein Ausschlag entsteht, so ist

$$c_1 : c_2 = w_2 : w_1 .$$

Man benutzt eine vielpaarige Säule und einen großen Widerstand. Vor der Verbindung mit der Säule sind alle Teile zu entladen.



Beweis: Die Potentiale der äußeren Belegungen sind $-iw_1$ und iw_2. Ist p das gemeinsame Potential auf c_1 und c_2, so sind die Ladungen der letzteren $(p+iw_1)c_1$ und $(p-iw_2)c_2$. Da die Summe wegen der Isolirung Null sein muß, so folgt $p(c_1+c_2) = i(w_2 c_2 - w_1 c_1)$, woraus für $p = 0$ folgt $w_1 c_1 = w_2 c_2$.

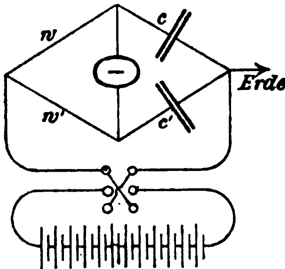
Zur Kalibrirung eines Kapacitätssatzes eignen sich Nr. 2 u. 3.

III. Mit dem ballistischen Galvanometer.

Diese Methoden geben nur bei grofsen Kapacitäten gute Resultate.

1. Vergleichung durch einzelne Entladungen. Man ladet die Kondensatoren zu gleichem Potential und entladet sie einzeln, bei grofser Spannung unter Einschaltung eines grofsen Widerstandes, durch dasselbe Galvanometer (78a). Die Kapacitäten verhalten sich wie die Ausschläge. Das gleiche Potential liefert eine galvanische Säule (S. 284), wobei man mit Vorteil die Multiplikationsmethode (79) anwenden kann. Leidener Flaschen können auch mit der Elektrisirmaschine zu gleichem Potential geladen werden, indem man jene während der Ladung mit einander verbindet, oder indem man sie an ein Elektrometer legt.

2. Prüfung auf Gleichheit durch Gegenstellung. Die Ladung geschieht mit entgegengesetztem Vorzeichen, z. B. so, wie in II 2. Die Gleichheit der Ladungsmengen wird mit dem Galvanometer geprüft, durch welches beide Kondensatoren gleichzeitig entladen werden.



3. Vergleichung in der Wheatstone'schen Brücke (Sauty). Werden w und w' so regulirt, dafs beim Kommutiren des Gesamtstromes kein Ausschlag entsteht, so ist $c:c' = w':w$. w und w' können zusammen aus einem Draht mit Schleifkontakt bestehen. Siehe auch V 1.

4. **Absolute Kapacität.** Die Entladung durch ein Galvanometer (vgl. Nr. 1) liefert die Kapacität c in elektromagnetischem Mafse (Anh. 20a), wenn die el. Kraft E der ladenden Säule bekannt ist. Man berechnet nach 78a die Elektricitätsmenge Q und hat dann $c = Q/E$. Q in Amp.-Sec. und E in Volt gibt c in Farad.

5. Nach Maxwell. E und die Galvanometerkonstante fallen heraus bei folgendem Verfahren. Man schliefst die Säule durch das Galvanometer und einen gegen den inneren Widerstand sehr grofsen Widerstand R; der konstante Ausschlag sei $= e_0$. Der mit derselben Batterie geladene Kondensator gebe

bei der Entladung durch das Galvanometer den Ausschlag e. Der Widerstand Säule + Galvanometer sei $= W$, die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel $= \tau$, das Dämpfungsverhältnis $= k$ und $\Lambda = \log \text{nat}\, k$ (**51**). Dann ist

$$c = \frac{\tau}{\pi} \frac{1}{R+W} \frac{e}{e_0} \cdot k^{1/\pi \cdot \text{arc tg}\, \pi/\Lambda}.$$

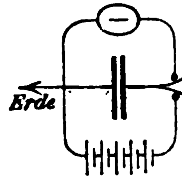
(Tab. 21b). Bei gröfseren Ausschlägen wird e auf den doppelten Sinus des halben Winkels, e_0 auf die Tangente corrigirt (**49**; Tab. 21a).

Verfügt man nicht über hinreichenden Widerstand R, so kann man bei der Bestimmung von e_0 die Elemente gruppenweise in gleicher Zahl parallel schalten. Der obige Ausdruck ist dann durch die Anzahl der Gruppen zu dividiren. Oder man legt eine Abzweigung an das Galvanometer; vgl. **64a**.

τ in sec, R und W in Ohm liefern die Kapacität in Farad (Anh. 20a). 1 Mikrofarad $= 10^{-6}$ Farad $= 10^{-15}$ el. magnetischen $= 9 \cdot 10^5$ el. statischen [C-G-S]-Einheiten.

IV. Mit dem Galvanometer nach Siemens.

1. Vergleichung. Die Zuleitung zu dem Kondensator etc. wird durch eine rasch gehende Wippe (Stimmgabelunterbrecher) abwechselnd mit der Batterie und dann mit dem Galvanometer verbunden. Der dauernde Ausschlag der Nadel bez. seine Tangente (**49**) ist cet. par. der Kapacität proportional.



Je kleiner die letztere, desto rascher darf die Wippe spielen, ohne unvollkommene Ladung oder Entladung befürchten zu müssen. Die Kapacität der Zuleitungsdrähte mufs aber ev. für sich bestimmt und abgerechnet werden.

2. Absolute Bestimmung. Aus dem bekannten Reduktionsfaktor $\mathfrak{C}$ (**64**; **69**) des Galvanometers, der el. Kraft der Batterie E und der Schwingungszahl N der Wippe (**37a**) erhält man die Kapacität in abs. Mafse, indem cEN offenbar gleich der mittleren Stromstärke ist, welche man aus dem Ausschlage e als $\mathfrak{C} \cdot e$ berechnet. Einfacher aber ist es, auch hier die Batterie E durch das Galvanometer und einen grofsen Widerstand R zu schliefsen. Mit den Bezeichnungen von III 5 hat man

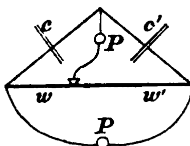
$$c = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{R+W} \cdot \frac{e}{e_0}.$$

e/e_0 wird vorteilhaft nicht weit von 1 genommen, weil dann die Korrektionen auf die Tangente etc. unerheblich wirken. Über das Verfahren bei mangelndem grofsen R s. III 5.

3. Nullmethoden. Die kontinuirliche Folge von Entladungsströmen kann durch die eine Windung eines Differentialgalvanometers geschickt werden, während durch die andere der durch zugeschalteten Widerstand regulirte konstante Strom aus derselben Batterie fliefst. Auch in einen Zweig der Wheatstoneschen Brücke kann man den Kondensator einschalten. Der Stromzweig, welcher den Kondensator nebst Unterbrecher enthält, wirkt wie ein Widerstand $1/(Nc)$.

Siemens, Pogg. Ann. 102, 66. 1857. Näheres über diese Methoden und über den Stimmgabel-Unterbrecher s. bei Klemenčič, Wien. Ber. 89, 298. 1884; Himstedt, Wied. Ann. 29, 560. 1886 u. 33, 1 1888.

V. Mit dem Telephon.



1. Die beiden P bedeuten ein Induktorium und ein Telephon. Wenn das letztere schweigt oder als optisches Telephon keinen Ausschlag gibt, so ist, wie unter III 3, $c:c' = w':w$ (Palaz). w und w' sollen induktionsfrei sein.

2. Über Vergleichung einer Kapacität mit einem Selbstinduktions-Koefficienten s. **83a**, 4. u. 5. Da der letztere konstanter als die elektrostatische Kapacität ist, kann diese Methode vorteilhaft sein.

Siehe über andere Methoden auch Heydweiller, El. Messungen S. 202 ff.

Kalibrirung eines Mefs-Kondensators von veränderlicher Kapacität (Nernst).

Einen solchen Kondensator (K) kann man herstellen, indem man in die Luftschicht eines Platten-Kondensators eine mit einer Längenteilung versehene (Glas-)Platte von höherer Dielektricitätskonstante (**86a**) mehr oder weniger tief einschiebt. Zur Kalibrirung dient ein ähnlicher Hilfskondensator (H) und ein kleiner Kondensator von konstanter Kapacität c, den man ab- oder zuschalten kann.

Man stellt K und H auf Gleichheit ein (s. z. B. oben Nr. V)

und liest K ab. Dann fügt man zu H die Kapacität c, stellt K wieder ein und liest ab. Nun entfernt man c, stellt zunächst H wieder ein, fügt dann c abermals zu H, verstellt K u. s. w. Den Verschiebungen von K entspricht jedesmal ein konstanter Zuwachs der Kapacität. Eine Kurve oder Tabelle nimmt diese auf.

Nernst, Z. S. f phys. Ch. 14, 639. 1894. Vgl. auch 86a I.

86a. Dielektricitätskonstante.

I. Mit dem Kondensator.

Die Kapacität eines Kondensators ist cet. par. der Dielektricitätskonstante oder dem specif. Induktionsvermögen D der isolirenden Zwischenschicht, des „Dielektricums", proportional. D wird für Luft $= 1$ gesetzt. Ist also C_1 die Kapacität mit Luft, C diejenige mit einem anderen Dielektricum von der D.-K. D, so ist $D = C/C_1$. Gase bezieht man auch wohl auf den leeren Raum als Einheit. Einige D.-Konstanten s. Tab. 27c.

Eine D.-Konstante wird also gemessen durch das Verhältnis zweier Kapacitäten (86). Die Auswahl der Methoden ist wegen der Leitung der Dielektrica beschränkt. Auf die hieraus entstehenden Fehler hat man hauptsächlich zu achten. Man verringert dieselben durch raschen Wechsel der Ladung und Entladung.

Die Proportionalität zwischen Kapacität und D.-K. ist daran geknüpft, dafs die Kraftlinien ganz durch das Dielektricum gehen. Cylinder-Kondensatoren, deren äufsere Belegung abgeleitet wird, lassen diese Bedingung besser erfüllen als Platten-Kondensatoren.

Die Kapacitäten der Zuleitungen sind ev. abzuziehen.

Vollkommene Isolatoren.

Nach den Methoden in 86.

Flüssigkeiten. Man wird den Versuchskondensator, einmal Luft, das andere Mal die Flüssigkeit enthaltend, mit einem zweiten, konstanten Kondensator von ähnlicher Kapacität vergleichen. Um die obige Bedingung zu erfüllen, kann man nötigenfalls den Kondensator ganz in die Flüssigkeit untertauchen. Zur Messung eignet sich die Methode von Siemens (86 IV 1), besonders auch Wechselstrom und Telephon (86 V 1).

Gase verlangen, da ihre D.-K. von 1 wenig verschieden ist, eine Nullmethode: etwa mit dem Elektrometer durch Gegenstellung (86 II 2) oder mit Galvanometer und Wippe (86 IV 3).

Tropfbare Flüssigkeiten s. u. A. bei Silow, Pogg. Ann 158, 306. 1876; Palaz, J. de phys. (2) 5, 370. 1885. Über Gase und Dämpfe: Klemenčič, Wien. Ber. 91, 712. 1885; Lebedew, l. c.

Feste Körper kann man, wenn sie schmelzbar sind, wie Flüssigkeiten behandeln, indem man sie um den eingetauchten Kondensator erstarren läfst. Oder man bringt sie in einen Plattenkondensator als reichlich breitere planparallele Scheiben. Bedeutet a den Plattenabstand des Kondensators (klein gegen den Radius), c_0 die Kapacität mit Luft, c die Kapacität mit eingeschobenem Körper von der Dicke d (18), so ist

$$\frac{1}{D} = 1 - \frac{a}{d}\frac{c - c_0}{c}.$$

Beweis. Es ist $c_0 = \frac{1}{4} r^2/a$ (86 I). Die Scheibe des Dielektricums wirkt wie eine Luftschicht von der Dicke d/D. Daneben ist noch eine Luftdicke $a - d$; also $c = \frac{1}{4} r^2/(a - d + d/D)$. Durch Division fällt r heraus; s. Boltzmann, Pogg. Ann. 151, 482 u. 531. 1874.

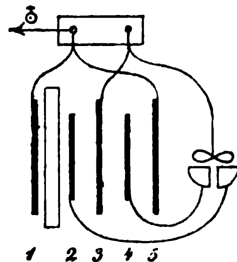
Je relativ kleiner der Plattenabstand, desto mehr verschwinden die Fehler, welche diesem Verfahren wegen des rückwärts verlaufenden Teiles der Kraftlinien anhaften.

Platten-Verschiebung. Man vermeidet die Messung von a und die Korrektion wegen der Zuleitungen, wenn die eine Kondensatorplatte parallel mefsbar verschoben werden kann. Nach Einbringen der festen Platte sei eine Abstandsvermehrung um e nötig, um die frühere Kapacität herzustellen. Dann ist

$$D = d/(d - e).$$

Vgl. obigen Beweis.

Auch auf Flüssigkeiten, welche man in ein zwischen den Platten stehendes plan-paralleles Gefäfs eingiefst, ist die Methode anwendbar.



Zur Prüfung der gleichen Kapacität ist eine Nullmethode am bequemsten. Man kann hierzu (Gordon, Phil. Trans. 1879, 417) fünf äquidistante Kondensatorplatten benutzen, von denen (Nr. 1) verschiebbar ist. 1 und 5 sind abgeleitet. 3 ist mit einem Pol eines Induktionsapparates verbunden, dessen anderer Pol abgeleitet ist, sowie mit der Nadel eines Elektrometers. Die Schaltung des letzteren entspricht dem Dynamometer in der Wheatstone'schen Brücke Fig. S. 334. Ist

Nr. 1 so eingestellt, dafs die Nadel ruhig bleibt, so verhalten sich die Kapacitäten (1,2):(2,3) = (4,5):(3,4). Die Einstellung wird mit und ohne dielektrische Platte gemacht; die Verschiebung ist = e. Je gröfser D, desto empfindlicher wirken Einstellungs-Fehler.

An Stelle des Elektrometers kann man ein Telephon anwenden (Winkelmann).

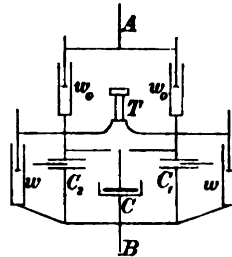
Über Anwendung von nur 3 Platten s. Winkelmann, Wied. Ann. 38, 161. 1889; vgl. jedoch dazu: Cohn, ib. 46, 135. 1892. Über Anwendung des Differentialinduktors: Elsas, ib. 44, 654. 1891.

Unvollkommenere Isolatoren.

Die Resultate der obigen Methoden können schon durch Spuren von Leitung erheblich gefälscht werden.

Durch Kompensation des Leitvermögens (Nernst).

C ist der Versuchskondensator, bestehend aus einer Metallplatte von konstanter Stellung zu dem Boden eines abgeleiteten Metallgefäfses, welches entweder mit Luft oder mit der zu untersuchenden Flüssigkeit oder endlich mit einer Flüssigkeit von bekannter D.-K. D_0 (Tab. 24b) gefüllt wird. C_1 ist der Vergleichs-Mefskondensator aus zwei Metallplatten mit einschiebbarer Glasplatte (86, S. 414). C_2 ist ein konstanter Hilfskondensator. T ist ein Telephon. Bei A und B werden Wechselströme eines kleinen Induktoriums eingeführt.



w_0 und w_0 bedeuten zwei gleiche, gleichgestaltete Widerstände, bei Nernst Flüssigkeitssäulen mit Elektroden. Die Gleichheit wird daran erkannt, dafs, wenn das Telephon schweigt, Vertauschung der beiden w_0 keine Änderung bewirkt. w und w sind zwei veränderliche Flüssigkeitswiderstände mit verschiebbaren Elektroden, die nur bei der Untersuchung schlecht isolirender Körper nötig sind. Über die Flüssigkeit in w s. 72, S. 338.

Man schaltet C luftgefüllt zu C_2 und stellt C_1 ein. Man schaltet dann C zu C_1 und verstellt C_1 wieder bis zum Schweigen des Telephons. Diese Verschiebung mifst das Doppelte der Kapacität c des Kondensators einschl. der Zuleitungen.

Ebenso wird die Kapacität c_f nach Beschickung des Troges

mit der Flüssigkeit von der unbekannten D.-K. D gemessen. Hat diese Flüssigkeit ein Leitvermögen, so ist das Telephon zunächst nicht zum Schweigen zu bringen. Man schaltet dann auf der Gegenseite durch Probiren eine solche Länge von w aus, dafs das Tonminimum wieder gut ist. Ein Leitvermögen wie dasjenige eines guten destillirten Wassers ist so noch zu kompensiren.

Gerade so sei nach Füllung des Troges mit der Aichflüssigkeit D_0 die Kapacität $= c_0$ gefunden.

D ergibt sich dann aus der Formel

$$D - 1 = (D_0 - 1)\cdot(c_f - c)/(c_0 - c),$$

worin man für die c die entsprechenden (ev. nach S. 414 korrigirten) Verschiebungen in C_1 setzt.

Folgt aus $c = \gamma\cdot 1 + \delta$, $c_f = \gamma\cdot D + \delta$, $c_0 = \gamma\cdot D_0 + \delta$.

Erdleitung sowie eine Berührung mit der Hand ist zu vermeiden, Symmetrie und Konstanz der Zuleitungen zu beachten.

Je nach der Gröfse der D.-K. kann man Tröge von verschieden grofser Luftkapacität anwenden.

Über direkte absolute Messung, über Fehlerquellen und Vorsichtsmafsregeln vgl. Nernst, Z. S. f. phys. Ch. 14, 622. 1894.

Durch elektrische Schwingungen.

Wenn ein Kondensator c sich auf einem Wege vom Selbstinduktionskoefficienten Π (88a) entlädt, so treten zwischen den Kondensatorplatten elektrische Schwingungen von der Schwingungsdauer $\tau = \pi\sqrt{c\Pi}$ auf. τ ist also cet. par. proportional $\sqrt{c}$. Über Hervorbringung, Messung und Verwendung der Schwingungen zur Ermittelung von c und D s. Schiller, Pogg. Ann. 152, 585. 1874.

Mit dem Helmholtz'schen Pendelunterbrecher (Cohn und Arons).

Die Methode beruht auf der Messung des zeitlichen Verlaufes der Ladung von Kondensatoren. S. Wied. Ann. 28, 454. 1886.

II. Durch Kraftwirkungen.

Die gegenseitige Kraftwirkung zweier auf festem Potential erhaltener Leiter ist proportional der Diel.-Konstante des Mittels, in welchem dieselben sich befinden.

An einem passend gebauten Quadrantelektrometer in Doppelschaltung (84a, II) beobachtet man die durch ein konstantes Potential (Daniell, Akkumulatoren) hervorgebrachten Ausschläge bei Füllung mit Luft bez. mit der Flüssigkeit. Die auf Pro-

portionalität mit dem Quadrat der Potentialdifferenz korrigirten Ausschläge (84 c) stehen im Verhältnis der D.-Konstanten. Die Nadel ist an einem feinen Metalldraht aufgehängt, der zugleich als Zuleitung dient (Silow).

Bei Spuren von Leitung stört die Polarisation; daher ladet man besser mit Wechselströmen (72; Induktionsapparat, rotirender Kommutator) und kann dann selbst Körper wie Alkohol, Wasser, Lösungen bis $k = 10^{-9}$ messen (Cohn u. Arons). Zur Eliminirung der Schwankungen des Potentials dient ein dem ersten parallel geschaltetes, gleichzeitig abgelesenes, gewöhnliches Elektrometer. Flüssigkeitsströmungen aus Temperaturschwankungen, Verdampfung etc. sind sorgfältig zu vermeiden.

Silow, Pogg. Ann. 156, 389. 1875; Cohn u. Arons, Wied. Ann. 33, 13. 1888; Tereschin, ib. 36, 792. 1889; Heerwagen, ib. 48, 35. 1892; Smale, ib. 57, 215. 1896.

III. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen.

Nach Maxwell ist die D.-Konstante gleich dem Quadrate des Lichtbrechungsverhältnisses für unendlich lange Wellen. Die optische Extrapolirung des letzteren hat sich im allgemeinen als unzulässig erwiesen. Die Hertz'schen elektrischen Wellen von Meter-Länge genügen aber der Anforderung. Die Messung ihrer Brechung oder Geschwindigkeit in verschiedenen Mitteln ergibt also ebenfalls die D.-K.

Arons u. Rubens, Wied. Ann. 42, 581. 1891; 44, 206. 1891; Cohn ib. 45, 370. 1892; Cohn u. Zeemann, ib. 57, 15. 1896.

86 b. Bestimmung sehr grofser Widerstände.

Zur Messung sehr grofser Widerstände, z. B. auch der Isolationswiderstände von Kabeln oder von Isolirmaterial in Plattenform, welchem man weiche Elektroden anschmiegt, sind oft besondere Methoden notwendig. Dabei ist praktisch zu beachten, dafs die angewandten starken Batterien, falls mit den grofsen Widerständen erhebliche Kapacitäten verbunden sind, recht konstant sein müssen, wenn nicht die zur Beobachtung kommenden schwachen Ströme von Ladungs- und Entladungsströmen gestört werden sollen. Wegen der Kapacitäten darf man oft nicht mit kurzem Stromschlufs arbeiten.

1. Direkte Messung. Wenn genügend empfindliche Galvanometer, bez. starke Säulen sowie große Vergleichswiderstände zur Verfügung stehen, so können die Methoden **70** bis **71b** angewendet werden. Insbesondere die Brückenschaltung (**71b** I) kann, wenn man die Zweigleitungen etwa im Verhältnis 1:1000 nimmt, für Widerstände bis zu 10 Millionen dienen, falls man Vergleichswiderstände bis 10000 besitzt.

2. Durch Teilung einer Batterie. Dieses Verfahren ist meistens am einfachsten. Eine Batterie gebe durch den zu messenden Widerstand W und ein Galvanometer vom Widerstand γ geschlossen den Ausschlag e. Der n^{te} Teil der Batterie, durch den bekannten Widerstand R ebenso geschlossen, gebe e'. Dann ist

$$W = (nR + n\gamma + w)e'/e - (\gamma + w).$$

Teilt man die Batterie so, daſs e ungefähr $= e'$ wird, so fällt w heraus und es wird

$$W = n(R + \gamma)e'/e - \gamma.$$

γ wird meistens nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Zum Zwecke genauer Messung bestimmt man e' für alle n Teile der Batterie und nimmt das Mittel.

3. Aus Spannung und Stromstärke. Ist E die Spannung einer Säule in Volt, $\mathfrak{C}$ der Reduktionsfaktor des Ausschlages eines Spiegelgalvanometers auf Am, so zeigt der Ausschlag e des Galvanometers den Gesamtwiderstand der Leitung

$$W = 1/e \cdot E/\mathfrak{C} \text{ Ohm.}$$

4. Mit einer Abzweigung am Galvanometer. Eine Säule, durch den zu messenden Widerstand w und das Galvanometer vom Widerstande γ ohne Abzweigung geschlossen, gebe den Ausschlag e. Dieselbe Säule, durch den bekannten großen Widerstand R und das durch den Widerstand z abgezweigte Galvanometer geschlossen, gebe e'. Ist w_0 der Widerstand der Säule, so hat man genau

$$w = e'/e \cdot [(R + w_0)(z + \gamma)/z + \gamma] - \gamma - w_0.$$

Bei sehr großen Widerständen kann γ und w_0 meistens gegen R und w vernachlässigt werden. Dann ist einfach

$$w = e'/e \cdot R(z + \gamma)/z.$$

5. Mit dem Kondensator (Siemens). Widerstände von sogenannten „Nichtleitern", z. B. von verschiedenen Sorten Guttapercha u. dgl., sind unter Umständen für galvanometrische Methoden

zu grofs. Alsdann läfst sich die Ladungs- oder Entladungszeit eines Kondensators benutzen. Sinkt das Potential (**84a**) eines Kondensators von der Kapacität c (**86**) in der Zeit t von dem Werte V_1 auf V_2, so ist der Widerstand des Entladungsweges

$$W = \frac{1}{c} \frac{t}{\log V_1 - \log V_2}.$$

Findet man hiernach den Wert W, wenn der Kondensator für sich allein steht, und dann W', wenn die beiden Belegungen durch den zu bestimmenden Widerstand w mit einander verbunden sind, so beträgt der letztere allein (**63**, S. 282)

$$w = W W'/(W - W').$$

Ist c in absolutem Mafse (Farad) gegeben, so erhält man den Widerstand in ebensolchem Mafse (Ohm), wenn man natürliche Logarithmen (= 2,303·log brigg) anwendet. Das Mafs von V ist gleichgiltig.

Beweis. Dem Potentiale V entspricht die Ladungsmenge $Q = c \cdot V$ In dem Zeitelement dt geht hiervon verloren $dt \cdot V/W = -dQ$ oder $= -c dV$. Hieraus folgt durch Integration der obige Ausdruck.

Umgekehrt kann man aus bekanntem W und der Entladungsdauer die Kapacität des Kondensators bestimmen (Siemens & Halske).

Verfeinerungen der Methode und Formeln für den Verlauf der Entladung s. bei Klemenčič, Wien. Ber. 93, 470. 1886.

Zeit- und Ortsbestimmungen.

87. Einige astronomische Bezeichnungen.

1. Zur Bestimmung des Ortes eines Gestirns dienen folgende Begriffe:

Azimut A: Bogen des Horizonts vom Südpunkte des Meridians zum Vertikalkreise des Gestirns.

Höhe h: Bogen des Vertikalkreises vom Horizont zum Gestirn.

Deklinationskreise (oder Stundenkreise): Gröfste Kreise durch den Himmelspol.

Stundenwinkel t: Bogen des Himmelsäquators von dem Südpunkt des Meridians zum Deklinationskreis des Gestirns.

Deklination δ: Bogen des Deklinationskreises vom Äquator zum Gestirn.

Kulmination: Durchgang durch den Meridian eines Ortes.

Polhöhe φ: Geographische Breite eines Ortes.

Parallaktischer Winkel: Winkel zwischen Deklinationskreis und Vertikalkreis des Gestirns.

Zwischen den genannten Winkeln bestehen u. a. die Gleichungen

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cdot \cos A \quad 1$$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cdot \cos t \quad 2$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t \quad 3$$

$$\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cdot \cos t \quad 4$$

$$\sin t \operatorname{ctg} A = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta + \sin\varphi \cos t. \quad 5$$

Frühlingspunkt: Aufsteigender Knoten der Ekliptik.

Rektascension eines Gestirns α: Bogen des Äquators vom Frühlingspunkt zum Deklinationskreise des Gestirns. Der Äquator wird dabei in 24^h oder in 360^0 geteilt. Die Rektascension rechnet man der täglichen Bewegung entgegen.

Die übrigen Bögen des Aquators oder des Horizontes zählen im Sinne der täglichen Bewegung.

Die Örter einiger Hauptsterne s. in Tab. 35.

2. Zur Zeitbestimmung werden die Bezeichnungen gebraucht:

Sternzeit z: Bogen des Himmelsäquators vom Südpunkt des Meridians zum Frühlingspunkt, den ganzen Äquator zu 24 Stunden gerechnet.

Sterntag: Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Kulminationen eines Fixsterns. 1 mittl. Tag = 1,002738 Sterntag = 1 Sterntag + 235,9 mittl. Sekunden.

Der Sterntag beginnt mit dem Durchgang des Frühlingspunktes durch den Meridian. Ein Gestirn passirt also den Meridian (es kulminirt) in dem Augenblick, wann seine Rektascension gleich der Sternzeit ist.

Allgemein: Die Sternzeit ist = Stundenwinkel + Rektascension eines Gestirnes oder $t = z - \alpha$.

Wahrer oder scheinbarer Mittag: Durchgang des Sonnenmittelpunkts durch den Meridian.

Sonnenzeit: Stundenwinkel der Sonne.

Zeitgleichung: Mittlere Orts-Zeit minus Sonnenzeit.

Bei der jetzigen Rechnung nach „Einheitszeit", welche sich auf einen Meridian von der östl. geogr. Länge l_0 Grad bezieht (15° für Mitteleuropa), ist für einen Ort von der östl. geogr. Länge l Grad die mittlere Ortszeit = Einheitszeit + $4(l - l_0)$ min.

Der astronomische Sonnentag beginnt um Mittag, wird von 0 bis 24^h gezählt und führt das Datum des Tages, an welchem er beginnt.

Über Deklination der Sonne, Sternzeit und Zeitgleichung s. Tab. 31.

Ausführlichere Tafeln im Nautischen Jahrbuch, dem Berliner astr. Jahrb. oder dem Nautical Almanac; auch in Bremiker's Logarithmen. Weitere oder genauere Methoden s. u. a. Brünnow, sphär. Astronomie; Jordan, Zeit- und Ortsbestimmung; Wislicenus, geogr. Ortsbestimmungen, Leipzig 1891.

88. Theodolit oder Universalinstrument.

Zur Messung von Azimutal- und Höhen-Winkeln mufs die eine Drehungsaxe vertikal, die andere horizontal sein; auf der letzteren mufs die Visirlinie senkrecht stehen.

Um die Excentricität des Teilkreises zu eliminiren, werden stets beide um 180° verschiedene Nonien abgelesen. Bei der Rechnung bezieht man die ganzen Grade immer auf Nonius I und nimmt nur in den Unterabteilungen das Mittel aus beiden Ablesungen.

1. Vertikale Drehungsaxe. Eine Drehungsaxe steht vertikal, wenn die Luftblase in der Wasserwage bei der Drehung um diese Axe ihren Stand auf der Teilung nicht ändert: man stellt zunächst die Wasserwage parallel der Verbindungslinie zweier Fufsschrauben und bringt sie mit den Fufsschrauben zum Einspielen. Dann dreht man um 180° und berichtigt, falls die Blase jetzt eine andere Stellung zeigt, den halben Unterschied mit den Fufsschrauben. Endlich wird um 90° gedreht und mit der dritten Fufsschraube dieselbe Einstellung der Blase bewirkt, wie die soeben verlassene. Wenn dieses Verfahren zum ersten Male noch einen Fehler zurückgelassen hat, so wiederholt man dasselbe.

Dafs man zuerst die Libelle von groben Fehlern befreien mufs und dafs die Null-Stellung der Blase als die normale am bequemsten ist, versteht sich von selbst.

2. Horizontale Drehungsaxe. a) Man prüft zuerst, ob die beiden Zapfen der Fernrohraxe gleich dick sind, indem man nach Einstellung auf das Einspielen der Blase das Fernrohr umlegt (die Zapfen in ihren Lagern vertauscht) und nun die Libelle in ihrer früheren Stellung wieder aufsetzt. Die gleiche Einstellung der Blase beweist die gleiche Dicke der beiden Zapfen.

Dies vorausgesetzt wird nun die horizontale Drehungsaxe daran erkannt, dafs die auf der Axe umgesetzte Wasserwage den früheren Stand einnimmt.

Ob die Fernrohraxen rund sind, prüft man durch Drehung unter der aufgesetzten Libelle.

b) Unabhängig von der gleichen Dicke beider Zapfen prüft man die Horizontalität der Axe, indem man ein langes Senkel entfernt vor dem Theodolit aufhängt und nach verschiedenen Höhen des Senkels visirt.

c) Endlich läfst sich die senkrechte Stellung beider Theodolitenaxen zu einander auch folgendermafsen erkennen. Man sucht zunächst zwei ziemlich entfernt übereinanderliegende Objekte, welche von dem Fernrohr bei dessen Drehung um die horizontale Axe getroffen werden. Alsdann dreht man um 180° um die vertikale Axe, schlägt das Fernrohr durch und beobachtet wieder die früheren beiden Objekte. Werden die letzteren wiederum durch eine blofse Drehung um die Horizontalaxe beide getroffen, so stehen die beiden Axen senkrecht auf einander.

Eine vorherige Berichtigung mit der Libelle wird hier nicht verlangt, wohl aber wird unter b und c die Abwesenheit eines Kollimationsfehlers (vgl. Nr. 3) verausgesetzt.

3. Prüfung, ob die Sehlinie zur Drehungsaxe des Fernrohrs senkrecht steht (Kollimationsfehler). a) Man stellt auf einen nahezu in der Horizontalebene des Instrumentes gelegenen fernen Gegenstand ein, dreht den Horizontalkreis um genau 180° und stellt das Fernrohr mittels Durchschlagens wieder in seine frühere Richtung. Genaues Einstehen des

früheren Gegenstandes beweist die Abwesenheit eines Kollimationsfehlers. Findet man einen Unterschied, so ist derselbe zur Hälfte durch Verschiebung des Fadenkreuzes zu berichtigen, worauf man die Prüfung wiederholt.

b) Oder man stellt wie oben ein, legt bei feststehendem Instrument das Fernrohr in seinen Lagern um und richtet dasselbe auf denselben Gegenstand. Der letztere mufs wieder im Fadenkreuz erscheinen. Vorausgesetzt wird hier die gleiche Dicke der beiden Fernrohrzapfen.

4. Messung einer absoluten Höhe. Horizontal- und Zenith-Punkt. a) Das Instrument sei nach Nr. 1 bis 3 berichtigt. Man stellt auf den Gegenstand ein und liest den Höhenkreis ab; man dreht die Vertikalaxe um 180°, schlägt das Fernrohr durch, stellt wieder ein und liest den Höhenkreis ab. Der Unterschied (Vorzeichen!) beider Ablesungen gibt den doppelten Zenithabstand des Objekts. Der halbe Unterschied von 90° abgezogen liefert also die Höhe des Objekts über dem Horizont.

Das arithmetische Mittel beider Einstellungen gibt den Zenithpunkt des Höhenkreises, die Hinzufügung von 90° zum Zenithpunkt ergibt den Horizontalpunkt.

b) Quecksilberhorizont. Anstatt das Fernrohr durchzuschlagen, kann man vor dasselbe einen Quecksilberhorizont stellen und nun durch Messung des Höhenwinkels zwischen dem (sehr entfernten) Objekt und dessen Spiegelbild sowohl die Höhe des Objektes über dem Horizont, wie auch den Zenith- und den Horizontalpunkt des Höhenkreises, in leicht ersichtlicher Weise bestimmen.

Der Quecksilberhorizont erlaubt natürlich auch die absolute Höhenmessung mit dem Spiegelsextanten.

Auf Gestirne sind diese Verfahren um die Kulminationszeit direkt anwendbar. Für andere Zeiten bekommt man, wenn die Einstellungen rasch hinter einander ausgeführt werden, die Höhe für den mittleren Augenblick zwischen beiden Beobachtungen.

Die Beobachtung hochstehender Objekte kann man dadurch ermöglichen oder erleichtern, dafs man vor dem Okular ein kleines, total reflektirendes Prisma befestigt. Um das Fadenkreuz zu beleuchten, genügt es, vor das Objektiv

schräg einige qmm weifses Papier zu halten und seitlich zu beleuchten.

Winkel zwischen zwei Objekten. Aus deren Höhenwinkeln h und h' und dem Unterschiede A ihrer Azimutwinkel wird der Winkelabstand w zwischen beiden gefunden aus der Gleichung $\cos w = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cdot \cos A$.

Repetitions-Theodolit. Zur Erhöhung der Genauigkeit der Azimutalmessungen kann eine zweite, mit der anderen koncentrische Vertikalaxe, um welche das ganze Instrument drehbar ist, auf folgende Weise dienen. Nach der Einstellung auf das zweite Objekt dreht man das ganze Instrument (mit dem Kreise) auf das erste Objekt zurück, dann dreht man das Fernrohr allein auf das zweite und kann dies beliebig oft wiederholen. Durch die Anzahl der Drehungen des Fernrohrs dividirt man den Gesamtwinkel, um welchen man gedreht hat, d. h. den Unterschied der ersten und letzten Ablesung + sovielmal 4 Rechte, als der Index den Nullpunkt passirt hat.

89. Bestimmung der Meridianlinie eines Ortes.

I. Aus der gröfsten Ausschreitung eines Gestirns. Man beobachtet einen Circumpolarstern, am besten den Polarstern selbst, zu der Zeit seiner gröfsten östlichen oder westlichen Ausschreitung. Da zu dieser Zeit die Bewegungsrichtung des Sternes vertikal ist, so kann man bequem und scharf einstellen.

Beobachtet man die östliche und westliche Ausschreitung, so geht der Meridian durch die Halbirungslinie. Insofern die Deklination δ des Gestirns und die Polhöhe φ bekannt ist (Tab. 35), genügt auch eine einseitige Beobachtung. Es bildet nämlich der Vertikalkreis der gröfsten Ausschreitung mit der Nordrichtung den Winkel ϑ, den man erhält aus

$$\sin \vartheta = \cos \delta / \cos \varphi.$$

Denn Meridian, Vertikalkreis und Stundenkreis des Sterns bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $90 - \varphi$, der einen Kathete $90 - \delta$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel ϑ.

Der Polarstern hat seine gröfste Ausschreitung ungefähr um $7^h\ 16^{min}$ bez. $19^h\ 28^{min}$ Sternzeit (Tab. 31).

II. Ausreichend genau wird oft auch eine Beobachtung des Polarsterns zu irgend einer bekannten Zeit sein.

Aus dieser ergibt sich die Sternzeit z (Tab. 31), aus letzterer und der Rektascension α des Polarsterns (Tab. 35) dessen Stundenwinkel $t = z - \alpha$, und endlich sein Azimut A aus 87 Gl. 5, oder auch genähert $\vartheta = (90 - \delta) \sin t / \cos \varphi$.

III. Aus korrespondirenden Höhen. Man stellt den Theodoliten, dessen Drehungsaxe vertikal gemacht ist (88, 1), auf das Gestirn ein und liest den Horizontalkreis ab. Ohne an der Höheneinstellung etwas zu ändern, beobachtet man dann dasselbe Gestirn nach seiner Kulmination wieder und stellt das Fernrohr so, daſs der Stern wieder durch das Fadenkreuz geht. Die Halbirungslinie der beiden Einstellungen liegt im Meridian des Ortes. Ein Höhenkreis ist unnötig.

Für die Genauigkeit ist günstig, daſs die Ansteigung rasch geschehe; also daſs das Gestirn dem Meridian nicht zu nahe steht.

Bei Benutzung der Sonne stellt man den Vertikalfaden Vormittags auf den einen, Nachmittags auf den anderen seitlichen Rand ein, während der Horizontalfaden z. B. den oberen Rand berührt. Die Halbirungslinie der beiden Einstellungen geht aber im allgemeinen nicht genau durch den Meridian, sondern erfordert wegen der Deklinationsänderung der Sonne die folgende „Meridianverbesserung“.

Es sei τ der halbe Zeitunterschied der beiden Beobachtungen von einander in Stunden, der Stundenwinkel der Sonne in Graden also $= 15\tau$. Es sei ferner ε die Änderung der Sonnendeklination während eines Tages (Tab. 31 und Bremiker fünfstellige Logarithmen S. 141), also $\varepsilon\tau/24$ diese Änderung in der halben Zwischenzeit. Dann beträgt die Meridian-Verbesserung, wenn wieder φ die Polhöhe ist,

$$\frac{1}{\cos\varphi} \frac{\varepsilon\tau}{24} \frac{1}{\sin 15\tau}.$$

Für mittlere europäische Breiten und bei Beobachtungen, die zwischen 8 und 10^h Vm., bez. 2 und 4^h Nm. angestellt werden, genügt innerhalb einer Bogenminute Genauigkeit, die Korrektion $= 0{,}27 \cdot \varepsilon$ zu setzen.

Selbstverständlich liegt die gefundene Mittellinie im Frühjahr westlich vom Meridian, im Herbst östlich. In den Tagen der Sonnenwenden verschwindet die Korrektion.

Die Deklination der Sonne sei von dem ersten zum zweiten Durchgang durch die Höhe h um $\Delta\delta$ gewachsen und dadurch das zweite Azimut um ΔA zu grofs gefunden. Zwischen $\Delta\delta$ und ΔA wird durch Differentiation der Gleichung 1 (87) die Beziehung gefunden $\Delta\delta\cdot\cos\delta = \Delta A\cdot\cos\varphi\cos h\sin A$. Ersetzt man $\cos h\sin A$ nach Gl. 3 (S. 422) durch $\cos\delta\sin t$, so kommt $\Delta\delta = \Delta A\cdot\cos\varphi\sin t$. Um $\frac{1}{2}\Delta A = \frac{1}{2}\Delta\delta/(\cos\varphi\sin t)$ wird man das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungen korrigiren müssen. Man braucht nur noch $\frac{1}{2}\Delta\delta = \frac{1}{24}\varepsilon\tau$ und $\sin t = \sin 15\tau$ zu setzen, um den obigen Ausdruck zu erhalten.

IV. **Aus der Beobachtung der Sonne um Mittag.** Kennt man die absolute Zeit (92), so liefert die Beobachtung des Sonnenmittelpunktes um 12^h „wahrer" Sonnen-Zeit (= mittlerer Orts-Zeit minus Zeitgleichung, Tab. 31) den Meridian. Man stellt dabei den Theodoliten auf den westlichen oder den östlichen Sonnenrand ein. Dann ist das beobachtete Azimut nach Osten oder nach Westen zu berichtigen um

$$\Delta = \varrho/\sin(\varphi - \delta).$$

Hier bedeutet ϱ den Halbmesser (Tab. 33), δ die Deklination der Sonne (Tab. 31) und φ die Polhöhe.

Denn Meridian, Höhenkreis des Sonnenrandes und Halbmesser der Sonne zu ihrem Berührungspunkt mit dem Höhenkreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\varphi - \delta$, worin die Kathete ϱ dem Winkel Δ gegenüberliegt. Es ist also $\sin\Delta : 1 = \sin\varrho : \sin(\varphi - \delta)$. Für $\sin\Delta$ und $\sin\varrho$ kann man Δ und ϱ setzen.

90. Polhöhe eines Ortes.

I. Die geographische Breite oder Polhöhe eines Ortes wird am leichtesten aus der Höhe eines Gestirns bei seiner Kulmination abgeleitet. Kennt man den Meridian bereits (89), so beobachtet man den Durchgang des Gestirns durch den Meridian; andernfalls folgt man mit dem Theodoliten dem Objekt in der Nähe des Meridians und liest die höchste bez. niedrigste Einstellung des Fernrohrs ab.

Die beobachtete Höhe mufs wegen der athmosphärischen Strahlenbrechung um die aus Tab. 34 zu entnehmende „Refraktion" des Gestirns vermindert werden. Nennt man die so korrigirte Höhe h, ist ferner δ die Deklination des Gestirnes (Tab. 35), so wird die Polhöhe

$$\varphi = 90 - h + \delta \quad \text{oder} \quad \varphi = 90 + h - \delta,$$

je nachdem die Kulmination eine obere oder eine untere war.

Am Polarstern sind wegen dessen langsamer Bewegung die Messungen am bequemsten und genauesten.

Um die jeweilige Kulminationszeit eines Gestirns voraus zu kennen, zieht man die Sternzeit um Mittag von der Rektascension des Sternes (Tab. 35) ab; dann erhält man die Tageszeit der oberen Kulmination desselben, gerechnet vom Mittage ab in Sternstunden. 1 Sternstunde = 0,9973 mittl. Stunden.

Die Sternzeit um Mittag findet man aus Tab. 31. Wegen der periodischen, durch die Schaltjahre ausgeglichenen Verschiebung des Frühlingsanfangs, und ferner, weil der Sonnen-Mittag für westliche Orte später fällt als für östliche, kann die Tabelle nicht für alle Jahre und für alle Orte dieselbe sein. Wenn an einem Orte von der östlichen geogr. Länge l^0 von Greenwich die Sternzeit für die mittlere Ortszeit T gesucht wird, so hat man deswegen nicht mit T selbst, sondern mit einem, in Bruchteilen des Tages ausgedrückten, korrigirten Werte

$$T + k + \tfrac{1}{360}(15^0 - l)$$

als Argument in die Tabelle einzugehen. k hat für jedes Jahr einen anderen Wert, den man in Tab. 32 findet. Man findet l aus Tab. 30 oder aus einer Landkarte. Ist T die mitteleuropäische „Einheitszeit", so ist nur $T + k$ zu nehmen.

II. Man beobachtet mit feststehendem Horizontalkreis des Theodoliten die beiden Höhen des Polarsterns, in denen derselbe während eines Umlaufs den vertikalen Faden passirt, und nimmt das Mittel, welches, wegen der Refraktion korrigirt, die Polhöhe gibt.

III. Eine einzelne Beobachtung des Polarsterns zu genähert bekannter Zeit gibt die Polhöhe, da $(90 - \delta)\cos t$ (vgl. 89 II) meistens genügend genau als vertikale Erhebung des Sterns über dem Pole angesehen werden kann.

Über die Deklination der Sonne vgl. S. 432 und Tab. 31. Selbstverständlich mufs hier die beobachtete Einstellung, welche auf den oberen oder den unteren Rand stattfindet, um den Sonnenhalbmesser (Tab. 33) abgeändert werden.

91. Bestimmung des Ganges einer Uhr oder Festhaltung einer absoluten Zeit.

Zwei absolute Zeitbestimmungen (92) liefern natürlich den Gang der zur Beobachtung dienenden Uhr. Einfacher und häufig genauer sind aber die Beobachtungen eines Gestirns in einem bestimmten Azimut.

I. Beobachtung an Fixsternen. Zu diesem Zwecke kann man jedes mit Fadenkreuz versehene Fernrohr gebrauchen, welches eine horizontale Drehungsaxe besitzt. Das bestimmte Azimut wird gegeben, wenn man von einem bestimmten Standorte aus eine entfernte irdische Marke zum Einstellen benutzt. Am günstigsten sind Beobachtungen nahe am Meridian.

Noch einfacher und leicht auf 1^{sec} genau ist das mit blofsem Auge beobachtete Verschwinden oder Auftauchen eines Fixsterns hinter einem entfernten irdischen Objekte. Ist letzteres mindestens 100 m entfernt, so genügt als fester Punkt für das Auge der Rand eines Fensterkreuzes oder ähnliches. Geheizte Schornsteine u. dgl. sind als bedeckende Objekte ungeeignet.

Selbstverständlich wählt man am besten Sterne, welche dem Äquator nahe stehen.

Zwischen zwei Durchgängen eines Fixsterns durch denselben Punkt liegt ein Sterntag, welcher um $235{,}9^{sec} = 3{,}932^{min} = 0{,}06553^{stund} = 0{,}002730^{tag}$ kürzer ist als der mittlere Tag.

II. Beobachtungen an der Sonne. Zwei auf einander folgende Sonnendurchgänge durch den Meridian liefern, unter Berücksichtigung der täglichen Änderung der Zeitgleichung (Tab. 31 und Bremiker fünfstellige Logarithmen S. 137), die Länge des mittleren Tages. Es ist hierzu nicht erforderlich, dafs der Meridian ganz genau sei. Ein konstanter Fehler von 1^0 macht den beobachteten Tag höchstens um etwa 2^{sec} unsicher. Sowohl um die Tag- und Nachtgleichen wie um die Sonnenwenden ist diese Unsicherheit am kleinsten.

Zur Beobachtung dient ein Fernrohr mit horizontaler Drehungsaxe, an dessen Fadenkreuz man den Antritt und den Austritt der Sonne beobachtet. Für mäfsige Ansprüche genügt auch der Schatten eines Senkels oder das von einer engen

Öffnung entworfene Sonnenbildchen. Man nimmt den Zeitpunkt, in welchem dieser Schatten oder das Sonnenbild von einer auf dem Fufsboden oder auf einer gegenüberstehenden Wand angebrachten Marke halbirt wird. Auch eine gute Sonnenuhr läfst den Gang der Uhr in gröfseren Zeiträumen einigermafsen genau bestimmen.

Eine einmal gewonnene absolute Zeit läfst sich durch diese einfachen Mittel festhalten.

92. Zeitbestimmung aus Sonnenhöhen.

I. Aus einer einzelnen Höhe. Für einen Beobachtungsort von bekannter geographischer Länge und Breite bietet sich als einfachstes Mittel zur Zeitbestimmung die Beobachtung der Höhe der Sonne über dem Horizont, welche mit dem Sextant oder dem Theodolit ausgeführt werden kann. Am günstigsten für die Bestimmung sind die Zeiten, in denen die Ansteigung des Gestirns rasch und gleichmäfsig geschieht, also wann der Stand ungefähr östlich oder westlich ist. Je näher dem Mittag, desto ungenauer ist die Bestimmung. Bedeutet

φ die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes,
δ die Deklination der Sonne zur Beobachtungszeit (vgl. unten),
h die wirkliche Höhe des Sonnenmittelpunktes,

so wird der Stundenwinkel t der Sonne oder die „wahre Sonnenzeit" im Augenblicke der Beobachtung erhalten aus

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Der Stundenwinkel t wird aus den trigonometrischen Tafeln zunächst in gewöhnlichem Bogenwert erhalten. Ist derselbe in Bogengraden ausgedrückt, so mufs er durch 15 geteilt werden, um die Sonnenzeit in Stunden zu erhalten. t ist Vormittags negativ, Nachmittags positiv zu nehmen.

In dem sphärischen Dreiecke, welches vom Meridian, Höhenkreis und Deklinationskreis des Gestirns gebildet wird und die Seiten $90-\varphi$, $90-h$ und $90-\delta$ hat, während der Stundenwinkel t der Seite $90-h$ gegenüber liegt, mufs sein $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$.

Korrektion der beobachteten auf die wirkliche Höhe.

1. Der beobachtete Ort erscheint wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu hoch. Man zieht von demselben die aus Tab. 34 entnommene Refraktion ab.

2. Die Beobachtung bezieht sich nicht direkt auf den Mittelpunkt, sondern auf den oberen oder unteren Rand der Sonne. Der Ort des Mittelpunktes wird durch Verminderung oder Vermehrung der Höhe um den Halbmesser der Sonne (Tab. 33) erhalten.

Wenn übrigens der Horizontalpunkt des Höhenkreises nicht schon bekannt ist, sondern durch Umlegen oder Durchschlagen (88, 4) eliminirt werden mufs, so wird der Sonnendurchmesser dadurch eliminirt, dafs man die eine Einstellung auf den unteren, die andere auf den oberen Sonnenrand richtet. Um das Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten für die Zeit zu nehmen, in welcher der Sonnenmittelpunkt die mittlere Höhe passirt, müssen beide Beobachtungen rasch auf einander folgen, da die Erhebung der Sonne nicht gleichförmig geschieht.

Geographische Breiten finden sich in Tab. 30. Aus einer guten Karte kann man die Breite auf $0{,}01^0$ entnehmen. Die Bestimmung derselben siehe in **90**.

Deklination der Sonne. Man interpolirt dieselbe aus Tab. 31 für die Beobachtungszeit, welche man um $+k$ (Tab. 32) bez. um $+k+\frac{1}{360}(15-l)$ korrigirt hat. Vgl. hierüber S. 429. Ein Fehler von 3^{min} in der Zeit gibt höchstens einen Fehler von δ um $0{,}001^0$.

Mittlere Zeit. Zu der wahren Sonnenzeit t fügt man zur Reduktion auf mittlere Ortszeit die aus Tab. 31 zu entnehmende „Zeitgleichung" hinzu; auf mittel-europäische Einheitszeit aufserdem $+(15-l)\times 4^{min}$.

Andere Gestirne. Anstatt der Sonne mag irgend ein anderes Gestirn von bekannter Deklination und Rektascension (Tab. 35) gewählt werden, welches weder dem Horizonte noch dem Pole zu nahe steht. Dann bedeutet das aus obiger Formel (S. 431) berechnete t den Stundenwinkel des Gestirns. Fügt man zu t die Rektascension des Sternes, so erhält man die Sternzeit im Augenblicke der Beobachtung, zu welcher die mittlere Zeit aus Tab. 31 oder genauer nach den astronomischen Jahrbüchern gefunden wird.

Die hier gegebenen Vorschriften und Tabellen vernachlässigen Korrektionen, welche unter $0{,}01^0$ liegen.

II. Aus korrespondirenden Höhenbeobachtungen. Ein Gestirn passire vor und nach seiner Kulmination den Horizontalfaden eines Fernrohres, welches auf dieselbe Höhe eingestellt ist. Das arithmetische Mittel der beiden Uhrzeiten gibt diejenige Uhrzeit, für welche das Gestirn kulminirt. Die absolute Zeit der Kulmination findet sich aus den Tabellen.

Fixsterne. Mitten zwischen den beiden Augenblicken, in denen der Stern vor und nach seiner Kulmination dieselbe Höhe passirt, liegt dessen Durchgang durch den Meridian. Für diesen Augenblick gibt also die Rektascension des Sternes (Tab. 35) die Sternzeit, aus welcher man die mittlere Zeit nach Tab. 31 oder einem astronomischen Jahrbuche entnimmt.

Sonne. Nur in den Tagen der Sonnenwenden erhält man aus den Zeiten zweier Durchgänge durch die gleiche Höhe die Zeit des Durchgangs durch den Meridian, also den „wahren Mittag“ genau als das arithmetische Mittel. Im allgemeinen kommt noch wegen der täglichen Deklinationsänderung der Sonne eine Korrektion, die „Mittagsverbesserung“ hinzu, da die Sonne in der ersten Jahreshälfte erst etwas nach dem wahren Mittag, in der zweiten Hälfte etwas vorher am höchsten steht.

Es sei wieder φ die Polhöhe des Ortes, δ die Deklination der Sonne und ε deren tägliche Änderung in Bogengraden (Tab. 31 oder Bremiker 5stell. Logarithmen S. 139). Endlich sei τ der halbe Zeitunterschied zwischen den beiden Beobachtungen in Stunden (also $\pm 15\tau$ der Stundenwinkel der Sonne in Bogengraden). Die Mittagsverbesserung beträgt dann in Zeitsekunden $\quad 10\varepsilon\tau(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos 15\tau)/\sin 15\tau$.

Zur Zeit des „wahren“ Sonnen-Mittags hat die mittlere Ortszeit den durch die Zeitgleichung (Tab. 31) angegebenen Wert.

Es bedeute t den Stundenwinkel der Sonne bei der Beobachtung. Ohne Deklinationsänderung würden die absoluten Werte von t Vor- und Nachmittags gleich sein. Ist vom ersten bis zum zweiten Durchgang durch die Höhe h die Deklination um $\Delta\delta$ gewachsen, so wird im zweiten Augenblick t um eine Gröfse Δt zu grofs gefunden, für welche man durch Differentiation von Gleichung 2 (87) die Beziehung erhält

$$0 = \Delta\delta \cdot (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t) - \Delta t \cdot \cos\varphi\cos\delta\sin t.$$

Also $\Delta t = \Delta\delta(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos t)/\sin t$. An dem arithmetischen Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten ist offenbar, um dasselbe auf den Durchgang durch den Meridian zu reduciren, die Korrektion $\frac{1}{2}\Delta t$ anzu-

bringen. Beachtet man noch, dafs $t = 15\tau$ und dafs. $\frac{1}{2}\Delta\delta$ in Bogengraden $= \varepsilon\tau/24$, also in Zeitsekunden $= 86400/360 \cdot \varepsilon\tau/24 = 10\varepsilon\tau$, so kommt der obige Ausdruck für diese Korrektion.

Instrumentell ist diese Zeitbestimmung sehr einfach, denn sie bedarf aufser einer gleichmäfsig gehenden Uhr nur eines Fernrohres mit einer vertikalen Drehungsaxe (88, 1), ohne jede Kreisteilung. Auf die atmosphärische Strahlenbrechung braucht für gewöhnliche Zwecke keine Rücksicht genommen zu werden, und bei den Beobachtungen der Sonne stellt man jedesmal auf denselben unteren oder oberen Rand ein, ohne auf den Mittelpunkt umrechnen zu müssen.

Im Interesse scharfer Zeitbestimmung beobachtet man die Gestirne möglichst im Osten oder Westen.

Über die einfache Festhaltung einer einmal gewonnenen Zeit vgl. **91.**

Das absolute Mafssystem.

Als Einheit für die Messung einer Gröfse genügt jede unveränderliche Gröfse derselben Art, z. B. für Länge oder Masse ein aufbewahrtes Grundmafs; für viele Gröfsen ist aber die Aufbewahrung eines Grundmafses unmöglich. Solche Gröfsen führt man daher mittels geometrischer, kinematischer und physikalischer Beziehungen auf andere zurück, z. B. eine Geschwindigkeit auf Länge und Zeit, eine Wärmemenge auf die äquivalente Arbeit oder auf den Temperaturgrad und das Wasser, eine Elektricitätsmenge auf die von ihr auf eine andere Menge ausgeübte Kraft. In dieser Weise aufgestellte Mafse heifsen „abgeleitete" Einheiten.

Der Ersatz von Grundmafsen durch abgeleitete bietet nicht nur den Vorteil, dafs die Anzahl der willkürlichen Einheiten dadurch eingeschränkt wird, sondern er dient zugleich dazu, dem mathematischen oder physischen Gesetz, welches zu der Definition der Einheit benutzt wird, eine möglichst einfache Gestalt zu geben. Jede Ableitung einer Einheit läfst sich benutzen, um die „Konstante", welche in einem Gesetz die verschiedenen Gröfsenarten verbindet und deren Zahlenwert eben von den Einheiten abhängt, auf den bequemsten Zahlenwert zu bringen.

Der durch einen bewegten Körper zurückgelegte Weg l ist der Geschwindigkeit u und der Zeit t proportional, also $l = \text{Konst.}\, ut$, wo der Zahlenwert Konst. von den Einheiten abhängt. Würde man als Geschwindigkeits-Einheit die Fall-Geschwindigkeit g am Ende der ersten Sekunde annehmen, so wäre Konst. $= g$. Setzt man aber als Einheit die Geschwindigkeit, bei welcher in der Zeit Eins der Weg Eins zurückgelegt wird, so ist Konst. $= 1$, und das Gesetz erhält die einfachste Gestalt $l = ut$.

Das System der abgeleiteten Einheiten ist zuerst für die elektrischen und magnetischen Gröfsen entwickelt worden, weil für die meisten von diesen die Aufbewahrung von Grundmafsen

unmöglich ist. Gauſs und Weber führten diese Gröſsen auf Länge, Masse und Zeit zurück. In dieser Weise abgeleitete Einheiten nennt man speciell absolute Maſse.[1])

Die Wahl der Grundmaſse für Länge, Masse und Zeit ist zunächst willkürlich. Wenn aber als Dichtigkeits-Einheit diejenige des Wassers genommen wird, so enthält die Volum-Einheit des Wassers die Massen-Einheit. Dann gehören also notwendig zusammen: mm, mg; cm, g; dm, kg; m, Tonne.[2])

In dem absoluten oder „dynamischen" Maſssystem wird die Masse von 1 cm^3 Wasser als Gramm bezeichnet, während der populäre Sprachgebrauch unter Gramm u. s. w. meistens Gewichte versteht. Z. B. also ist das Trägheitsmoment eines kleinen Körpers von m mg oder gr im Abstande a mm oder cm von einer Drehungsaxe im absoluten Maſssystem $= a^2 m$ und nicht etwa $= a^2 m/g$ zu setzen. Dagegen ist das Gewicht dieses Körpers $= gm$ und also das Drehungsmoment, welches er durch die Schwere im Horizontalabstande a von der Drehungsaxe ausübt, $= agm$; unter g die Schwerbeschleunigung verstanden. Um Zweideutigkeit zu vermeiden, sollte in dem „statischen" Maſssystem, welches das Gramm als Kraft nimmt, der Ausdruck Gramm-Gewicht gebraucht werden.

Eine auf cm, gr als Masseneinheit und sec zurückgeführte Einheit wird kurz als [cm-g-sec]- oder [C-G-S]-Einheit bezeichnet.

Gauſs hatte in seinem ersten diesbezüglichen Aufsatz (Erdmagnetismus und Magnetometer, Schumacher's Jahrbuch 1836; Gauſs' Werke Bd. 5, S. 329) den Magnetismus mittels des Grammes als Kraft-Einheit definirt und ist erst später zu der Auffassung des Grammes als Masse übergegangen. Zweifellos war dieser für die Physik und Technik so bedeutsam gewordene Schritt gerechtfertigt.

Denn da das Gewicht eines Körpers schlechthin ganz unbestimmt und selbst an der Erdoberfläche um $^1/_2$ Procent veränderlich ist, so kann man nicht das Gewicht irgend eines Körpers als Gewichtseinheit auf-

---

1) Der Name „absolut" stammt von der erdmagnetischen Intensität. Im Gegensatze zu der früher üblichen nur relativen Messung gab Gauſs in seiner *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* eine auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte absolute Einheit für die Intensität.

2) Das gesetzlich festgelegte Kilogramm ist nach Mendeléeff gleich der Masse von 1000,15 ccm Wasser von 4°.

stellen. Es wäre auch verkehrt, als Gewichtseinheit das Gewicht von 1 cm^3 Wasser unter 45° Breite zu wählen, denn dann müfsten die Gewichtsätze für jede geographische Breite besonders angefertigt werden. Was man mit dem Namen „Gewichtsatz" bezeichnet, ist eben nichts anderes als ein Massensatz; und eine Wägung mit der gewöhnlichen Wage ist keine Gewichts-, sondern eine Massenbestimmung. Diese bildet auch in der That fast immer den Zweck der Wägung. Dem Chemiker, dem Kaufmann, dem Arzte ist es nicht um den Druck der Körper auf ihre Unterlage zu thun, sondern um deren Masse, denn durch diese wird die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder der Nahrungswert u. s. w. bedingt.

Innerhalb der Physik ist die Auffassung des Grammes etc. als Masse jetzt gröfstenteils durchgeführt. Der an einzelnen Punkten (Elasticität, Kapillarität etc.) noch bestehende alte Sprachgebrauch, der allerdings praktisch bequem ist, wird nach und nach verschwinden. Was die Ausdrücke specifisches Gewicht und Dichtigkeit betrifft, so gehört der erstere in das statische, der letztere in das dynamische Mafssystem. Zahlenmäfsig führen beide Begriffe auf das nämliche hinaus, denn beide Systeme nehmen das Wasser als Einheit.

Dimensionen. Die Gröfsen stellen sich im absoluten Mafssystem als Funktionen von Länge $[l]$, Masse $[m]$ und Zeit $[t]$ dar, z. B. eine Geschwindigkeit als Länge: Zeit, ein Volumen als Länge^3, eine Kraft als Länge $\times$ Masse: Zeit^2. Diese Ausdrücke sollen in steilen Klammern angegeben werden, also für Geschwindigkeit $[lt^{-1}]$, für Volumen $[l^3]$, für Kraft $[lmt^{-2}]$ etc. Der Exponent von l, m oder t heifst die „Dimension" der Gröfsenart bezüglich Länge, Masse oder Zeit. Siehe Tab. 28.

Der Begriff der „Dimension", welchen bereits Fourier aufgestellt hat, dessen sehr nützliche Einführung in das Mefswesen sich an Maxwell und Jenkin anschliefst, rechtfertigt sich durch folgende Erwägung. Eine Gleichung sagt aus, dafs ihre linke und rechte Seite nicht nur ihrem Zahlenwerte, sondern auch ihrer Gröfsenart nach gleich sind. Man kann nicht 1 Glas Wasser = 1 Glas Wein setzen; bei der Anwendung des = Zeichens müssen nicht nur die Gläser gleich grofs sein, sondern es müssen entweder beide Wasser oder beide Wein enthalten.

Drückt man nun z. B. das Galilei'sche Gesetz so aus: empfängt eine Masse m in einer Zeit t eine Geschwindigkeit u, so wirkt auf die Masse eine Kraft $k = m \cdot u/t$, so heifst dies nicht nur, dafs k und mu/t numerisch gleich sind, sondern dafs k Krafteinheiten gleich sind m Masseneinheiten, mal u Geschwindigkeitseinheiten, durch t Zeiteinheiten, und die Forderung der Gleichheit bezieht sich auch auf die Faktoren, welche zu den Zahlenwerten links und rechts als Benennung hinzutreten; es mufs also sein

$$\text{Krafteinheit} = \frac{\text{Masseneinheit} \times \text{Geschwindigkeitseinheit}}{\text{Zeiteinheit.}}.$$

Ebenso hat man bei der Zurückführung der Geschwindigkeit auf Länge und Zeit erhalten

$$\text{Geschwindigkeitseinheit} = \text{Längeneinheit} : \text{Zeiteinheit},$$

so daſs man anstatt des obigen auch sagen kann

$$\text{Krafteinheit} = \frac{\text{Masseneinheit} \times \text{Längeneinheit}}{(\text{Zeiteinheit})^2},$$

oder, die Einheiten durch geklammerte Buchstaben bezeichnet,

$$[k] = [m]\cdot[l]\cdot[t]^{-2} = [m]^1\cdot[l]^1\cdot[t]^{-2}.$$

In ohne weiteres verständlichen Worten drückt man dies so aus: Die Krafteinheit hat bezüglich der Massen- und Längeneinheit die Dimension 1, bezüglich der Zeiteinheit die Dimension -2.

Es steht auch frei, zu sagen, eine Kraft hat bezüglich Länge, Masse und Zeit die Dimensionen 1, 1 und -2, oder in einer Gleichung ausgedrückt, wobei die Klammern andeuten sollen, daſs man nur die Gröſsenarten in's Auge faſst, $[k] = [lmt^{-2}]$.

Es ist zu beachten, daſs dieselbe Gröſsenart verschiedene Dimensionen erhält, je nachdem man ihre Einheit von dem einen oder dem anderen Naturgesetz ableitet, also z. B. die Elektricitätseinheit aus dem Coulombschen Gesetz im elektrostatischen, oder aus der Wechselwirkung zwischen Elektricität und Magnetismus im elektromagnetischen Maſssystem. Die Vergleichung der Dimensionen führt in diesem Falle zu einer Rechtfertigung des Begriffs der „kritischen Geschwindigkeit", eines Fundamentes der elektromagnetischen Lichttheorie.

Die Berechtigung und den groſsen Nutzen der „Dimensionen" zu leugnen ist nicht statthaft.

Die Dimension ist ein sehr brauchbares Prüfungsmittel von Formeln auf eine Eigenschaft, welche bei einer richtigen Formel immer vorhanden sein muſs, nämlich auf ihre Homogenität. Wenn man nämlich die in der Formel vorkommenden Gröſsenarten durch ihre Dimensionen aus einem bestimmten Maſssystem ersetzt, so muſs links und rechts dasselbe entstehen.

Z. B. ist die von einem elektrischen Strome i, dessen Potentialdifferenz in einem Leiter $= E$ ist, in der Zeit t verrichtete Arbeit $Q = Eit$. Die Dimensionen (Tab. 28) aus dem elektromagn. System eingesetzt, erhält man $Eit = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]\cdot[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]\cdot[t] = [l^2 m t^{-2}]$; aus dem elektrostatischen System $[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]\cdot[l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]\cdot[t] = [l^2 m t^{-2}]$, also in beiden Fällen die Dimension einer Arbeit (vgl. Nr. 7). — Ferner hängt die Schwingungsdauer t einer Masse vom Trägheitsmoment K mit der Direktionskraft D durch die Gleichung zusammen $t^2 : \pi^2 = K : D$. Setzt man nach 10 $K = [l^2 m]$ und nach 9 $D = [l^2 m t^{-2}]$ ein, so entsteht rechts $[l^2 m] : [l^2 m t^{-2}] = [t^2]$, wie es sein muſs, da π eine reine Zahl ist.

Die Dimension ermöglicht ferner den einfachen Übergang von einer Gruppe von Grundeinheiten, etwa mm, mg, zu einer

anderen, etwa cm, gr. Denn wenn eine Grundgröſse in der abgeleiteten Gröſse auf der p^{ten} Potenz vorkommt, so ändert sich der Wert der abgeleiteten Einheit im Verhältnis n^p, sobald die Grundeinheit im Verhältnis n geändert wird. Der Zahlenwert der Gröſse ändert sich hierdurch also im Verhältnis n^{-p}.

Die Zahl, welche eine Geschwindigkeit l/t darstellt, wird bei dem Übergang von mm zu cm im Verhältnis 10^{-1} geändert, beim Übergang von Sekunde zu Minute im Verhältnis 60^{+1}. Die Zahl für eine Kraft $[lm/t^2]$, wenn wir von mm-mg zu cm-gr übergehen, ändert sich im Verhältnis $10^{-1} \cdot 1000^{-1} = 1/10000$ (Tab. 28).

Auch für das von der British Association ausgegangene „praktische" elektromagnetische Maſssystem, welches mit den Benennungen Ohm, Ampere, Volt, Farad etc. Einheiten für Widerstand, Stromstärke, Spannung, Kapacität etc. enthält, gibt es ein System von Grundeinheiten, nämlich, auſser der Sekunde als Zeiteinheit, den Erdquadranten $= 10^9$ cm als Längeneinheit und 10^{-11} g als Masseneinheit. Stellt eine abgeleitete Gröſsenart sich dar als $[l^\lambda \cdot m^\mu \cdot t^\tau]$, so ist also die Einheit im „praktischen" Maſssystem im Verhältnis $10^{9\lambda} \cdot 10^{-11\mu}$ gröſser als im [C-G-S]-System.

Z. B. ist eine Stromstärke $= [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$; also die Einheit Ampere $= 10^{9/2} \cdot 10^{-11/2} = 10^{-1}$ [C-G-S]-Stromeinheiten (vgl. Nr. 19). Die Arbeitseinheit 1 Volt-Ampere-Sek. oder Watt-Sek. $= [l^2 m t^{-2}]$ ist gleich $10^{18} \cdot 10^{-11} = 10^7$ [C-G-S]-Arbeitseinheiten.

Die Vorsätze Mega- oder Mikro- (z. B. Megohm oder Mikrofarad) bedeuten 10^6mal gröſsere oder kleinere Einheiten.

Maſse aus Raum und Zeit.

1. **Fläche** $f = [l^2]$. Einheit ist das Quadrat über der Längeneinheit.

2. **Raum** $v = [l^3]$. Einheit ist der Würfel über der Längeneinheit.

3. **Winkel** φ. Ein Winkel wird in der Mechanik gleich dem zugehörigen Kreisbogen, geteilt durch den Halbmesser, gesetzt. Ein kleiner Winkel ist also seinem Sinus oder seiner Tangente numerisch gleich; derjenige Winkel ist gleich Eins, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist. Dimension $= l/l = 1$ (d. h. von den Grundeinheiten unabhängig).

4. **Geschwindigkeit** $u = [lt^{-1}]$. Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg, geteilt durch die zum Zurücklegen gebrauchte

Zeit. Die Geschwindigkeit Eins besitzt ein Punkt, der in der Zeiteinheit die Länge Eins zurücklegt.

Die **Winkelgeschwindigkeit** bei einer Drehung wird ebenso aus dem von einem Radius in der Zeiteinheit zurückgelegten Winkel erhalten. Dim $= [t^{-1}]$.

5. **Beschleunigung** $b = [l t^{-2}]$. Wächst die Geschwindigkeit in der Zeit t um die Gröfse u, so besitzt das bewegte Ding eine Beschleunigung $b = u/t$. Einheit ist diejenige Beschleunigung, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um Eins wächst.

Die Fallbeschleunigung beträgt 980,6 cm/sec² oder 9,806 m/sec² oder $9{,}806 \cdot 60^2 = 35302$ m/min².

Mechanische Mafse.

5a. **Dichtigkeit** $s = [l^{-3} m]$. Die Einheit besitzt ein Körper, der im Volumen Eins die Masse Eins hat.

6. **Kraft** $k = [l m t^{-2}]$. Das Grundgesetz der Mechanik sagt, dafs eine Kraft k, welche einer Masse m in der Zeit t eine Geschwindigkeit u erteilt, mit den Gröfsen m und u im direkten, aber mit t im umgekehrten Verhältnis steht; also $k = C \cdot um/t$. Soll die Konstante $C = 1$ werden, so mufs für u, t und $m = 1$ auch $k = 1$ sein: **Einheit der Kraft** ist diejenige Kraft, welche der Masse Eins in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit Eins mitteilt.

Die durch die Anziehung der Erde auf 1 mg ausgeübte Kraft beträgt hiernach 9806 mm·mg·sec⁻² oder 0,9806 cm·g·sec⁻². Die [C-G-S]-Krafteinheit oder „Dyne" (Clausius) ist also ein wenig gröfser als die Anziehung der Erde auf 1 mg.

6a. **Druck** $d = [l^{-1} m t^{-2}]$. Sind Kräfte gleichmäfsig über eine Fläche verteilt, so nennt man Druck die auf die Flächeneinheit (senkrecht) wirkende Kraft. Eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit s übt in der Tiefe h cm unter der ebenen Oberfläche den Druck ghs cm⁻¹ g sec⁻² oder Dyne/cm² aus, wo für 45° Breite $g = 980{,}6$ ist.

Der Druck von 1 cm Quecksilber ist $= 13{,}596 \cdot 980{,}6 = 13332$ und 1 Atm $= 76 \cdot 13332 = 1013200$ Dyne/cm².

7. **Arbeit, Energie, Lebendige Kraft, Wärmemenge** $Q = [l^2 m t^{-2}]$. Wenn der Angriffspunkt einer Kraft sich in ihrer Richtung verschiebt, so ist die von der Kraft geleistete Arbeit gleich Kraft × Weg,

$Q = k \cdot l$. Sind Weg und Kraft um den Winkel φ gegeneinander geneigt, so ist $Q = k \cdot l \cdot \cos\varphi$.

Arbeitsfähigkeit oder Potentialenergie eines Körpers oder eines Systemes ist die Summe von Arbeiten, welche der Körper oder das System durch Verschiebung unter dem Einfluſs der wirkenden Kräfte leisten kann.

Gleichwertig mit Arbeit ist die lebendige Kraft, Bewegungs- oder kinetische Energie $\frac{1}{2}mu^2$ einer Masse m, welche eine Geschwindigkeit u besitzt.

Wärmemenge Eins ist diejenige Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist.

[C-G-S]-Einheit der Arbeit ist die cm-Dyne oder das „Erg" (nach Clausius), geleistet durch die Verschiebung um 1 cm des Angriffspunktes einer Dyne in ihrer Richtung. — Durch Hebung von 1 kg um 1 m (Kilogr.-meter der Technik) wird die Arbeit $1000 \cdot 980{,}6 \cdot 100 = 98060000$ Erg geleistet. — Die Wasser-gr-Calorie, welche der Hubarbeit 427 gr-Gew. $\times$ m äquivalent ist, ist $= 427 \cdot 980{,}6 \cdot 100 = 41900000$ cm^2 g sec^{-2}. — Eine Volumvermehrung v cm^3 unter dem konstanten Druck von p cm Quecksilber leistet die Arbeit $v \cdot p \cdot 13332$ (vgl. unter 6a); wenn $p = 1$ Atm ist, $v \cdot 1013200$ Erg.

Arbeit bei der Wärmeausdehnung eines Gases. Ein Gasvolumen v werde bei konstantem Druck d von der absoluten Temperatur T auf $T+1$ erwärmt. Die Ausdehnung ist $= v/T$, die äuſsere Arbeit also $= d \cdot v/T$, nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze für eine gegebene Gasmenge eine konstante Gröſse, die man für 1 g eines Gases mit R und mit dem Namen Konstante des Gases bezeichnet. Es ist also $R = d/(s\,T)$, wenn s die Dichtigkeit des Gases (Tab. 1) ist, für Luft z. B. $R = 1013200/(0{,}001293 \cdot 273) = 2870000$ cm^{2}g/sec^2.

Arbeit bei der Vergasung. 1 gr-Molekel jedes vollkommenen Gases oder Dampfes (z. B. 32 g Sauerstoff oder 2,01 g Wasserstoff) hat bei 0° und 1 Atm das Volumen 22400 cm^3, bei der abs. Temp. T und dem Drucke d [C-G-S] also $22400 \cdot 1013200/d \cdot T/273 = 83100000\,T/d$ cm^3 (Avogadro'sches Gesetz). Die bei der Vergasung unter konstantem Druck bei der Temperatur T geleistete äuſsere Arbeit beträgt also $831 \cdot 10^5 \cdot T$ Erg, und die hierzu bei der Temperatur T verbrauchte äuſsere Wärmemenge ist also $831 \cdot 10^5\,T/(419 \cdot 10^5) = 1{,}98 \cdot T$ also nahe $2 \cdot T$ Wasser-g-Cal.

Zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie (Clausius). Ein Körper oder ein System von Körpern durchlaufe einen vollkommenen (umkehrbaren) thermodynamischen Kreisproceſs. Er nehme dabei die in Arbeitsmaſs ausgedrückte Wärmemenge Q bei der abs. Temperatur T auf und gebe Q' bei T' ab. Dann ist erstens $Q - Q'$ die geleistete äuſsere Arbeit oder die, in Arbeitsmaſs ausgedrückte, in Arbeit umgesetzte Wärmemenge; zweitens gilt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} \quad \text{oder} \quad \frac{Q-Q'}{Q} = \frac{T-T'}{T} \text{ (Carnot'scher Satz).}$$

Lösungen. Die moderne Lösungstheorie beruht auf der Annahme (van't Hoff), dafs der osmotische Druck des gelösten Körpers (z. B. auf eine nur für das Lösungsmittel durchlässige Wand) dem Avogadro'schen Gesetze folgt. Hieraus ergibt sich z. B. das Gesetz der Gefrierpunkts-Erniedrigung einer Lösung etwa folgendermafsen. Der Gefrierpunkt des Lösungsmittels sei $= T$, derjenige einer (verdünnten) Lösung von m gr-Mol. in 1 g des Lösungsmittels $= T'$. Man kann sich einen Kreisprocefs denken, bei welchem 1 g Lösungsmittel durch Zufuhr der Wärmemenge $\varkappa$ (Schmelzwärme) bei T geschmolzen und dann die obige Menge m des Körpers gelöst wird, wobei durch den osmotischen Druck die Arbeit $m \cdot 831 \cdot 10^5 T$ Erg geleistet d. h. die Wärmemenge $m \cdot 1{,}98\ T$ gr-Cal. in äufsere Arbeit umgesetzt werden kann. Das Lösungsmittel läfst man dann bei der Temperatur T' wieder ausfrieren, wobei der Körper herausfällt. Hierauf den zweiten Hauptsatz angewandt, erhält man $m \cdot 1{,}98\, T/\varkappa = (T - T')/T$, oder die Erniedrigung $T - T' = m \cdot 1{,}98\, T^2/\varkappa$ (vgl. S. 122, wo aber 1000 g anstatt 1 g Lösungsmittel eingesetzt sind und infolge dessen 0,00198 kommt).

Ähnlich wird die Siedepunktserhöhung verdünnter Lösungen abgeleitet.

7a. Leistung $[l^2 m t^{-3}]$ gleich Arbeit in der Zeiteinheit.

1 Erg/sec $= 1020 \cdot 10^{-11}$ Kg-Gew. m/sec $= 136 \cdot 10^{-12}$ Pferdestärke.

8. Drehmoment $P = [l^2 m t^{-2}]$. Dasselbe ist gleich dem Produkt aus einer Kraft k in ihren Hebelarm l, $P = k \cdot l$.

9. Direktionskraft $D = [l^2 m t^{-2}]$. Dieselbe mifst die Stabilität der Gleichgewichtslage eines um eine Axe drehbaren Körpers. Ablenkung des Körpers um den kleinen Winkel φ erzeugt ein mit φ proportionales Drehmoment P. Das konstante Verhältnis $P/\varphi = D$ heifst die auf den Körper ausgeübte Direktionskraft.

Die Direktionskraft eines Pendels mit der Masse $m = 1$ kg in einem Abstande $l = 1$ m von der Drehungsaxe beträgt $100 \cdot 1000 \cdot 980{,}6 = 98060000$ cm$^2 \cdot$g$\cdot$sec^{-2}, denn das Drehmoment für einen kleinen Ablenkungswinkel φ ist $= lmg \cdot \varphi$.

Die von der Schwere ausgeübte Direktionskraft einer bifilaren Aufhängung (54) von dem Fadenabstande 10 cm, der Fadenlänge 200 cm, der Masse 1000 g ist $\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 10/200 \cdot 1000 \cdot 980{,}6 = 122600$ cm^{2}g sec^{-2}.

10. Trägheitsmoment $K = [l^2 m]$. Das T.-M. einer Masse m im Abstand l von einer Drehungsaxe ist $K = l^2 m$. Vgl. 54.

Das T.-M. des obigen Pendels ist also $100^2 \cdot 1000 = 10^7$ cm$^2 \cdot$g. Ein rechteckiger 50 g schwerer Stab von 1 dm Länge, 1 cm Breite hat das auf seinen Mittelpunkt bezogene T.-M. $\frac{1}{12}(10^2 + 1^2) \cdot 50 = 421$ cm$^2 \cdot$g.

T.-M. K, Direktionskraft D und Schwingungsdauer t hängen durch die Gleichung $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

10a. Elasticitätsmodul $\eta = [l^{-1} m t^{-2}]$. Setzt man die Verlängerung λ, welche ein Stab von der Länge L und vom Quer-

schnitte l^2 durch eine Zugkraft k erfährt, $\lambda = 1/\eta \cdot kL/l^2$, so ist η der Elasticitätsmodul. $\sqrt{\eta/s}$ gibt die Schallgeschwindigkeit.

Die praktisch gebrauchten Elasticitätsmoduln kg-gewicht/mm² sind mit $1000 \cdot 981 \cdot 100 = 98100000$ zu multipliciren, um für das [C-G-S] System zu gelten. Vgl. S. 149.

Elektrostatische Mafse.

11. Elektricitätsmenge $\varepsilon = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Zwei punktförmige E.-M. ε und ε' im Abstande l stofsen sich mit einer Kraft $k = \text{Konst.} \times \varepsilon\varepsilon'/l^2$ ab. Der Faktor Konst. hängt von den Einheiten ab. Damit Konst. = 1, also $k = \varepsilon\varepsilon'/l^2$ wird, nehmen wir unter dem Namen „mechanische" oder „elektrostatische" Einheit der E.-M. diejenige Menge, welche eine ihr gleiche Menge aus der Entfernung Eins mit der Kraft Eins abstöfst.

Das Quadrat einer E.-M. ist im elektrostat. System gegeben als eine Kraft $[lmt^{-2}]$ multiplicirt mit dem Quadrat einer Länge; also ist die Dimension einer E.-M. $= \sqrt{l^3 m t^{-2}} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$.

Elektrische Feldstärke $F = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die an einem Orte auf die El.-Menge Eins ausgeübte Kraft heifst die el. Feldstärke daselbst. Die Einheit derselben findet sich also im Abstande Eins von der El.-Menge Eins.

Kraftlinien (Faraday). Die Kraftwirkung von Elektricitäts-Mengen kann man darstellen durch Linien. Von jeder Elektricitäts-Einheit gehen 4π Kraftlinien aus. Die Richtung der Linien gibt die Kraftrichtung, ihre Dichtigkeit, d. h. ihre Anzahl in einem Bündel vom senkrechten Querschnitt 1, gibt die Feldstärke an dem betr. Orte.

Im Abstande l von der El.-Menge ε ist die Feldstärke $= \varepsilon/l^2$. Die $4\pi\varepsilon$ Kraftlinien sind daselbst über die Kugelfläche $4\pi l^2$ gleichmäfsig verteilt, ihre Dichtigkeit ist also $4\pi\varepsilon/(4\pi l^2) = \varepsilon/l^2$, q. e. d.

12. Elektrostatisches Potential oder Spannung $V = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Wenn Massen vorhanden sind, welche anziehende oder abstofsende Kräfte nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung ausüben, so nennt man Potentialfunktion oder auch Potential dieser Massen auf einen in der Nachbarschaft befindlichen Punkt denjenigen Ausdruck, dessen Gefälle nach irgend einer Richtung die auf eine Masse Eins an dem Punkte nach dieser Richtung ausgeübte Kraft, bei El.-Mengen also die Feldstärke ergibt. Gefälle ist die Gröfse, um welche der Ausdruck abnimmt, wenn

man von dem betrachteten zu einem nahe benachbarten Punkte übergeht, geteilt durch den Abstand beider Punkte; oder kurz der negative Differentialquotient des Ausdrucks nach der betrachteten Richtung. Danach ist das Potential der El.-Menge ε auf einen Punkt im Abstande l gleich ε/l; mehrere El.-Mengen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$, z. B. die Teile der el. Ladung eines Körpers, geben auf einen Punkt, welcher um l_1, $l_2 \ldots$ von ihnen entfernt ist, das Potential $\varepsilon_1/l_1 + \varepsilon_2/l_2 + \cdots$

Einheit des elektrostatischen Potentials ist demnach das Potential der El.-Menge Eins auf einen Punkt im Abstande Eins.

Das Potential hat die fernere wichtige Bedeutung, daß es die Arbeit angibt, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn jene El.-Menge Eins von ihrem Orte zu einem sehr großen Abstand von den wirkenden Mengen übergeführt wird.

13. **Elektrische Kapacität**, elektrostatisch gemessen, $c = [l]$. Damit eine El.-Menge ε auf einem Leiter im Gleichgewicht sei, muß sie sich so verteilen, daß das Potential V im Leiter konstant ist. Wenn die Umgebung keine elektrischen Ladungen enthält (außer den etwa von dem Körper selbst influenzirten Ladungen), so sind Potential (Spannung) und El.-Menge einander proportional; $\varepsilon = c \cdot V$. Das Verhältnis $c = \varepsilon/V$ nennt man elektrostatische Kapacität des Leiters.

Die Einheit der Kapacität hat ein Leiter, welcher durch die Einheit der El.-Menge zum Potential Eins geladen wird, also z. B. eine Kugel vom Halbmesser 1.

Die Kapacität einer einzelnen Kugel ist gleich ihrem Halbmesser, denn die El.-Menge ε, über eine Kugeloberfläche vom Halbmesser r verteilt, übt auf den Mittelpunkt, folglich auf jeden Punkt der Kugel das Potential ε/r aus. Andere Beispiele s. 86 I.

Das Potential eines geladenen Leiters ist also identisch mit der El.-Menge, die in einer mit ihm durch einen sehr dünnen Draht verbundenen entfernten Kugel vom Halbmesser Eins bei dieser Ladung des Körpers enthalten wäre.

13a. **Dielektricitätskonstante** $D = [l^0 m^0 t^0]$. Ein Kondensator, welcher mit Luft als Dielektricum die Kapacität c besitzt, hat, wenn die Luft überall da, wo merklich Kraftlinien hindurchgehen, durch ein Dielektricum von der D.-K. D ersetzt wird, die Kapacität $D \cdot c$.

Ersetzt man in derselben Weise die Luft durch eine die Elektricität leitende Flüssigkeit vom Leitvermögen Eins, so hat der Raum zwischen den Belegungen den Leitungswiderstand $1/(4\pi c)$ (vgl. 13c). Z. B. gilt für zwei Flächen f im relativ kleinen Abstande l von einander die Kapacität $f/(4\pi l)$ und der Widerstand l/f.

13b. El. Stromstärke $i = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]$, el.-statisch gemessen, ist die durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeit Eins flieſsende El.-Menge (11). Stromeinheit ist also der Strom, bei welchem diese Menge $= 1$ ist.

13c. El. Widerstand $w = [l^{-1} t]$, el.-statisch gemessen, ist die Potentialdifferenz (12), welche zwischen den Enden des Leiters bestehen muſs, um den Strom Eins (13b) hervorzubringen.

1 Ohm hat $1{,}111 \cdot 10^{-12}$, ein Quecksilberwürfel von 1 cm Seite bei 0° hat $1{,}0453 \cdot 10^{-16}$ el.-stat. [cm^{-1}sec] Widerstandseinheiten.

Elektrisches Leitvermögen einer Substanz ist der reciproke Widerstand eines cm-Würfels zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten.

Magnetische Maſse.

14. Freier Magnetismus, oder Stärke eines Magnetpoles $\mu = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Schreibt man das Gesetz, nach welchem zwei hypothetische Mengen μ und μ' freien Magnetismus (oder zwei punktförmige Magnetpole von der Stärke μ und μ') sich aus dem Abstande l mit der Kraft k abstoſsen, $k = \mu\mu'/l^2$, so ist Einheit des freien Magnetismus (oder der Stärke des Magnetpoles) diejenige Menge (oder derjenige Magnetpol), welche auf eine gleiche aus dem Abstande Eins die Krafteinheit ausübt.

15. Stabmagnetismus oder magnetisches Moment $M = [l^{5/2} m^{1/2} t^{-1}]$ Jeder Magnet hat gleich viel positiven und negativen Magnetismus. Der einfachste Magnetstab würde aus zwei gleich starken punktförmigen Polen bestehen. Ein Magnet aus zwei Polen von der Stärke $\pm\mu$ im gegenseitigen Abstande l hat das magnetische Moment $M = l\mu$. Mit M sind die Wirkungen in die Ferne proportional. Das magn. Moment Eins würde durch zwei Pole $\mu = \pm 1$ im Abstande Eins gegeben sein.

Die Einheit [cm, g] ist 10000mal gröſser als [mm, mg].

Specifischer Magnetismus oder Magnetisirung heiſst das Verhältnis des Stabmagnetismus zum Volumen oder auch wohl zu der Masse des Magnets. 1 g Stahl hat bei guten, sehr dünnen Stahlmagneten höchstens etwa 100 cm$^{5/2}$·g$^{-1/2}$·sec^{-1}.

Fernwirkung eines Magnets. Erste Hauptlage. L sei der Abstand des Magnetpols μ' von der Mitte des Magnets $\mu\mathfrak{l}$. Die gesamte Kraft auf μ' ist die Differenz der von den beiden Polen ausgeübten Kräfte, also

$+\mu \quad -\mu \qquad \mu'$; $\mathfrak{l}$

$$k = \mu\mu'[1/(L-\tfrac{1}{2}\mathfrak{l})^2 - 1/(L+\tfrac{1}{2}\mathfrak{l})^2] = \mu\mu' \cdot 2L\mathfrak{l}/(L^2-\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2.$$

$\mathfrak{l}\mu$ ist der Stabmagnetismus $= M$.[1] Also wird

$$k = 2M\mu' L/(L^2-\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2 = 2M\mu'/L^3 \cdot (1-\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^{-2} \qquad 1.$$

oder durch Reihenentwickelung (vgl. S. 9, Gl. 1)

$$k = 2M\mu'/L^3 \cdot (1+\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{3}{16}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots)$$

Man sucht aus so grofsen Entfernungen zu arbeiten, dafs das dritte Glied zu vernachlässigen ist. Ist L so grofs gegen $\mathfrak{l}$, dafs man auch $\frac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2$ gegen 1 vernachlässigen kann, so wird einfach $k = 2M\mu'/L^3$.

Zweite Hauptlage. μ' sei wieder im Abstande L von der Mitte des Magnets gelegen. Der ungleichartige Pol übt eine Anziehungskraft $= \mu\mu'/(L^2+\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)$, der gleichartige eine gleich grofse Abstofsungskraft aus. Beide Kräfte setzen sich nach dem Parallelogramm in eine der Stabaxe parallele Kraft

$-\mu$; $\mathfrak{l}$; μ' ; $+\mu$

$$k = \mu\mu'/(L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2)\cdot\mathfrak{l}/\sqrt{L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2} = M\mu'/L^3\cdot(1+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad 2.$$

zusammen, wofür geschrieben werden kann

$$k = M\mu'/L^3\cdot(1-\tfrac{3}{8}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{15}{128}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots)$$

Bei sehr grofser Entfernung L wird $k = M\mu'/L^3$.

Ersetzen wir den Pol μ' durch eine auf der Kraftrichtung senkrechte kurze Magnetnadel von der Länge $\mathfrak{l}'$ mit den Polen $\pm\mu'$, so erfährt die Nadel ein Drehmoment $2k\cdot\mathfrak{l}'/2 = k\mathfrak{l}'$. Da $\mu'\mathfrak{l}'$ das magn. Moment der Nadel $= M'$, so beträgt das Drehmoment P aus grofser Entfernung L

in der 1. Hauptlage $P = 2MM'/L^3$;

in der 2. Hauptlage $P = MM'/L^3$,

wozu wegen der Magnetlänge nötigenfalls die oben in den Klammern gegebenen Korrektionsfaktoren kommen.

Man kann also auch definiren: Die **Einheit des Stabmagnetismus** hat ein Magnet, welcher auf einen gleichen aus der grofsen Entfernung L in 1. Hauptlage das Drehmoment $2/L^3$, oder in 2. Hauptlage $1/L^3$ ausübt.

Ist die Nadel nicht so kurz, dafs man $\mathfrak{l}'^2$ gegen L^2 vernachlässigen kann, so kommt zu dem Ausdruck für k noch der Faktor hinzu:

in der 1. H.-L. $1-\frac{3}{4}\mathfrak{l}'^2/L^2$,

in der 2. H.-L. $1+\frac{3}{2}\mathfrak{l}'^2/L^2$.

Bildet die kurze Nadel mit der Kraftrichtung den Winkel φ, so ist obiges Drehmoment mit $\sin\varphi$ zu multipliciren.

Die Ausdrücke für ideale Magnete mit Punkt-Polen gelten nahe auch für wirkliche Magnete von gestreckter Form. Für Fernwirkungen gibt es zwei „Pole", in denen der positive und der negative Magnetismus koncentrirt gedacht werden können. Bei den gewöhnlichen Magneten beträgt

der Polabstand (die reducirte Länge) etwa $^5/_6$ der Stablänge. Über die empirische Bestimmung s. **62 b**.

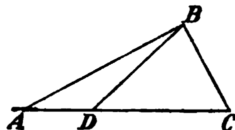
Genauer als die Reihenentwickelung mit einem Korrektionsgliede rechnen die nicht gekürzten Formeln 1 und 2 v. S. Nach diesen sind die Ausdrücke für M/H S. 263 gebildet.

Zerlegung eines Magnets in Komponenten. Einen Magnet M, welcher mit der Verbindungslinie L den Winkel α bildet, darf man für Fernwirkungen in zwei Stäbe von der Stärke $M\cos\alpha$, bez. $M\sin\alpha$ zerlegen, welche aus der 1., bez. der 2. Hauptlage wirken.

16. Magnetische Intensität eines Ortes oder magnetische Feldstärke $H = [l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Der Ort eines Magnetpols übt im allgemeinen (durch Erdmagnetismus oder benachbarte Magnete oder elektrische Ströme) eine mit μ proportionale Kraft k auf den Pol μ aus $k = \mu \cdot H$. Die Gröſse H, welche also die Kraft auf einen Einheitspol gibt, heiſst Intensität der magnetischen Kraft, oder magnetische Intensität, oder Stärke des magnetischen Feldes.

Angaben in mm, mg sind durch 10 zu teilen, um in cm, g verwandelt zu werden.

Die von einem Magnet M von A aus an dem Orte B bewirkte Intensität erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC. Es sei $AD = \frac{1}{3}AC$. Dann ist BD die Richtung und $M \cdot AB^{-3} \cdot BD/AD$ die Intensität der Kraft in B (Gauſs). Beweis leicht durch Zerlegung von M nach Nr. 15 am Schluſs.



Das Drehmoment auf einen zur Kraftrichtung senkrechten Magnet mit zwei Polen $\pm\mu$ vom Abstande $\mathfrak{l}$, also vom magn. Moment $M = \mu \cdot \mathfrak{l}$, ist $2\mu H \cdot \frac{1}{2}\mathfrak{l} = \mu\mathfrak{l}H = MH$, bez. $MH\sin\varphi$, wenn der Magnet im Winkel φ gegen die Kraftrichtung liegt. Also MH ist die Direktionskraft. Für die Schwingungsdauer t, wenn K das Trägheitsmoment ist (vgl. Nr. 10), gilt also $t^2/\pi^2 = K/(MH)$. Für horizontal drehbare Magnete ist H die Horizontalkomponente der Feldstärke.

Z. B. sei $H = 0{,}2\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Ein dünner Magnet wiege 20 g und habe 10 cm Länge, also $K = 20 \cdot 10^2/12 = 167\,\mathrm{cm}^2\mathrm{g}$. Der Magnetismus des Stabes sei $M = 400\,\mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Dann ist $t = 3{,}14\sqrt{167/(400 \cdot 0{,}2)} = 4{,}5$ sec.

Ablenkung einer kurzen Nadel durch einen Magnet. Ein Magnet M befinde sich in 1. Hauptlage zu einer Nadel vom Moment M' im Abstand L. Wenn φ der Ablenkungswinkel, so müssen für diesen Winkel die Drehmomente $2MM'/L^3 \cdot (1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2)\cos\varphi$ vom Magnet und $M'H\sin\varphi$ vom Erdmagnetismus gleich sein. Also ist

$$\operatorname{tg}\varphi = 2/L^3 \cdot M/H \cdot (1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2).$$

In der 2. Hauptlage fällt der Faktor 2 weg, und anstatt $\frac{1}{2}\mathfrak{l}^2$ kommt $-\frac{3}{8}\mathfrak{l}^2$. Die S. 262 mit η bezeichnete Gröfse hat also die Bedeutung, dafs bei kurzer Nadel in erster H.-L. $\sqrt{2\eta}$, in zweiter $\sqrt{-\frac{8}{3}\eta}$ den Pol-Abstand des Magnets darstellt.

Kraftlinien (Faraday). Kraft-Richtung und Stärke des magn. Feldes an irgend einem Orte werden gegeben durch Richtung und Dichte der Kraftlinien; unter Dichte deren Anzahl auf die senkrecht zu der Richtung gelegte Flächeneinheit verstanden. Die Anzahl, welche durch eine anders gerichtete Flächeneinheit geht, gibt die Feld-Komponente senkrecht zu dieser Flächeneinheit. Von einem Magnetpol $+\mu$ oder $-\mu$ treten $4\pi\mu$ positive oder negative Kraftlinien in den umgebenden Raum aus.

17. **Magnetisirungs-Koefficient** $\varkappa$ einer Substanz (oder „Susceptibilität“) ist das Verhältnis der „Magnetisirung“ (des specifischen Magnetismus pro Volumeinheit) eines Körperelementes zu der gesamten magnetisirenden Intensität $\mathfrak{H}$, die sich aus den äufseren Kräften und den von der magnetischen Nachbarschaft herrührenden zusammensetzt; vgl. **81c**. $\varkappa$ ist nur für diamagnetische und schwach magnetische Körper konstant. Über Eisen s. **81c** und Tab. 24a. Zugleich ist für Eisen bekanntlich $\varkappa$ bei ansteigender Magnetisirung kleiner als bei absinkender („Hysterese“). $1+4\pi\varkappa$ nennt man „Permeabilität“; den reciproken Wert „Widerstandskoefficient“. $(1+4\pi\varkappa)\cdot\mathfrak{H}=\mathfrak{B}$ heifst „Induktion“ (vgl. **81c** II). Es besteht also die Beziehung $4\pi\varkappa\mathfrak{H}=\mathfrak{B}-\mathfrak{H}$. $\varkappa$ hat die Dimension Null.

Ein langer Stab vom Querschnitt f, der sich in einem magnetischen Felde H, parallel den Kraftlinien gelegt, zum Betrage $\varkappa H$ per Volumeinheit magnetisirt, hat Pole von der Stärke $f\cdot\varkappa H$ und vereinigt in dieser Eigenschaft $4\pi f\varkappa H$ Kraftlinien. Hierzu die Kraftlinienzahl fH wegen des Feldes selbst addirt, gibt $fH(1+4\pi\varkappa)$ als die Zahl im Innern des Stabes. Sieht man also fH als einen Flufs von Kraftlinien in der Luft an, $fH(1+4\pi\varkappa)$ ebenso im Stabe, so verhalten sich die beiden Flüsse so, wie z. B. elektrische oder Wärme-Ströme, die durch dieselbe el. Kraft oder dasselbe Temperaturgefälle in zwei Leitern vom Leitvermögen 1 und $1+4\pi\varkappa$ erzeugt werden.

Chemisches Mafs der Elektricität.

18. **Stromstärke, chemische Einheit.** Die Einheit hat der Strom, welcher in der Zeit Eins die Einheit der chemischen Wirkung ausübt. Kennte man die absolute Anzahl der Atome, so wäre die El.-Menge Eins diejenige Menge, welche mit einem einwertigen Atom wandert. Solange

man die Atomzahlen nicht kennt und sich auf ausgeschiedene Massen bezieht, ist das chemische Strommafs ein willkürliches Mafs, weil die durch den Strom ausgeschiedene Menge eines Elektrolytes von der Substanz abhängt. Im Anschlufs an die in der Chemie gebräuchlichen Zahlen ist für eine chemische Stromeinheit der Strom, welcher in 1 sec 1 gr-Äquivalent eines Elektrolytes zersetzt oder 1 gr-Äqu. eines Ions (z. B. nahe 1 g Wasserstoff; vgl. Tab. 29) ausscheidet, am bequemsten. Diese Einheit ist gleich 9650 elektromagnetischen (19) und gleich $290 \cdot 10^{12}$ elektrostatischen [C-G-S]-Einheiten (13b).

Elektromagnetische Mafse.

19. Stromstärke, elektromagnetisch gemessen $i = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$; Weber'sche Einheit. Die (transversale) Kraft zwischen einem Stückchen von der Länge l eines Stromes i und einem Magnetpol μ, welcher sich in der Senkrechten auf l in einem Abstande L befindet, setzen wir $k = li\mu/L^2$, wodurch die elektromagnetische Stromeinheit definirt ist als der kreisförmige Strom vom Halbmesser 1, dessen Längeneinheit auf einen Magnetpol 1 im Mittelpunkte die Kraft 1 ausübt.

Der ganze Kreisstrom i vom Halbmesser R übt also auf einen Pol μ im Mittelpunkt die Kraft $k = \mu i \cdot 2\pi R/R^2 = \mu i \cdot 2\pi/R$ aus.

Die [cm-g]-Stromeinheit ist 100mal gröfser als die [mm-mg]-Einheit.

Elektrodynamische Stromeinheit. Dieselbe ist mit der elektromagnetischen identisch, wenn man das Ampere'sche Gesetz so ausspricht: Zwei gleichgerichtete Ströme i und i' in den geradlinigen Leitern l und l' in dem (relativ grofsen) gegenseitigen Abstand L ziehen sich mit der Kraft $2li \cdot l'i'/L^2$ an, wenn sie zur Verbindungslinie senkrecht stehen; sie stofsen sich mit der Kraft $li \cdot l'i'/L^2$ ab, wenn sie mit der Verbindungslinie zusammenfallen. In einer anderen gegenseitigen Lage zerlegt man sie parallelepipedisch in Komponenten, welche eine der obigen Stellungen haben oder auf einander senkrecht stehen. Die letzteren Teile wirken nicht auf einander.

Magnetisches Moment eines geschlossenen Stromes. Ein ebener, geschlossener, wie oben gemessener Strom i von der umflossenen Fläche f wirkt in dieFerne wie ein senkrecht durch f gesteckter Magnet $M = fi$. Man kann also auch sagen: Strom Eins ist der Strom, welcher die Flächeneinheit umfliefsend in die Ferne wirkt wie ein Magnet Eins.

Beweis für einen Kreisstrom vom Halbmesser r, welcher auf einen in seiner Axe im Abstande L gelegenen Magnetpol μ wirkt. Jedes Stückchen λ übt die Kraft aus $k = \lambda i\mu/(L^2 + r^2)$. Die Komponente dieser Kraft nach der Axe ist $= k \cdot r/\sqrt{L^2 + r^2} = \lambda \cdot ri\mu/(L^2 + r^2)^{3/2}$. Die Summe aller dieser Komponenten ist $2\pi r \cdot ri\mu/(L^2 + r^2)^{3/2}$ oder für ein grofses L

gleich $2 \cdot \pi r^2 \cdot i \cdot \mu / L^3$. Die anderen Kraftkomponenten heben sich auf. Der Strom wirkt also wie ein Magnet vom Moment $\pi r^2 \cdot i$ q. e. d.

Drehmoment auf einen geschlossenen Strom. Die Windungsfläche f einer vom Strome i durchflossenen drehbaren Spule in einem Magnetfelde, dessen Stärke senkrecht zur Drehaxe $= H$ ist, bilde den Winkel φ mit der Richtung von H. Dann ist das Drehmoment $= f i H \cos\varphi$.

Magnet. Feld einer Stromspule. Eine gleichmäſsig mit n Windungen auf jeder Längeneinheit bewickelte cylindrische Spule mit dem Strom i wirkt nach auſsen genau wie die Belegungen der beiden Endflächen mit freiem Magnetismus von der Flächendichte ni. Im Innern einer im Verhältnis zum Durchmesser langen Spule entsteht ein magnetisches Feld von der Stärke $= 4\pi n i$. Näheres s. 81 b I.

Ein langer geradliniger Strom i bewirkt in einem Punkte, welcher den Abstand a vom Drahte und einen gegen a sehr groſsen Abstand von den Drahtenden hat, die transversale Feldstärke $i \cdot 2/a$.

Elektrochemisches Äquivalent (Faraday, Weber). Der Strom 1 [C-G-S] zersetzt in 1 sec 0,000933 g Wasser oder scheidet 0,01118 g Silber aus. Allgemein scheidet er von einem Körper vom Äquivalentgewicht A (Sauerstoff = 16) die Menge $A \cdot 0{,}0001036$ g/sec ab.

Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Stromeinheit (Weber u. R. Kohlrausch). $300 \cdot 10^8$ statische sind gleich einer magnetischen [C-G-S]-Einheit. Die Dimensionen stehen im Verhältnis $v = (l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}) : (l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}) = l/t$. Nach Maxwell ist dieses Verhältnis v gleich der Lichtgeschwindigkeit. Vgl. 13b.

„Praktische“ Einheit.[1]) 1 Ampere $= 0{,}1$ $\mathrm{cm}^{1/2} \mathrm{g}^{1/2} \mathrm{sec}^{-1}$ $= 300 \cdot 10^7$ elektrostatischen [C-G-S] oder 0,0933 mg/sec Wasser oder 1,118 mg/sec Silber.

19a. Strommenge, Elektricitätsmenge, elektromagnetisch gemessen $\varepsilon = [l^{1/2} m^{1/2}]$. Die von dem Strome Eins in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Leitung beförderte Menge ist die Elektricitätsmenge oder Quantität Eins nach dem betreffenden Strommaſse.

---

1) Daſs es ein Fehler war, die [C-G-S]-Einheit durch 10 geteilt in die Praxis einzuführen, so daſs sie bei allen elektromagnetischen Beziehungen mit 10 zurück multiplicirt werden muſs, ist zu spät erkannt worden. Es gibt keinen anderen zweckmäſsigen Ausweg, als den von der Technik adoptirten, daſs man im Elektromagnetismus nicht nach Ampere, sondern mit der Weber'schen [C-G-S]-Einheit rechnet.

„Praktische“ Einheit. Die Elektricitätsmenge, welche bei der Stromstärke 1 Am in 1 sec durch den Querschnitt der Leitung flieſst, heiſst 1 Coulomb $= 0{,}1\ \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}$. Dieselbe enthält also $300 \cdot 10^7$ elektrostatische Einheiten, sie scheidet 1,118 mg Silber aus (19).

20. Elektromotorische Kraft oder Potentialunterschied, elektromagnetisch gemessen $e = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]$. Das absolute Maſs für diese Gröſse ist von Weber aus den Erscheinungen der Magnet-Induktion abgeleitet worden. Das Gesetz lautet in dem einfachsten Falle: In einem magnetischen Felde H (16) werde ein gerader, zur Richtung von H senkrechter Leiter von der Länge l senkrecht zu sich selbst und zu H mit der Geschwindigkeit u verschoben. Die hierdurch in dem Leiter inducirte el. Kraft e ist proportional l, H und u. Wir setzen $e = lHu$. Dann gilt als Einheit der elektromotorischen Kraft diejenige, welche in der Längeneinheit inducirt wird, wenn dieselbe im Felde 1 unter obigen normalen Verhältnissen mit der Geschwindigkeit 1 bewegt wird.

Die el. Kraft stellt sich also dar als Länge $\times$ magnetische Intensität $\times$ Geschwindigkeit $= l \cdot l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \cdot l t^{-1} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}$.

Bewegt man z. B. an einem Orte des mittleren Deutschlands, wo die gesamte erdmagnetische Intensität $= 0{,}45\ \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ ist, einen senkrecht zur Inklinationsrichtung gehaltenen geraden Draht von 1 m Länge mit der Geschwindigkeit 1 m/sec senkrecht zu sich und zu H, so wird die el. Kraft $= 100 \cdot 0{,}45 \cdot 100 = 4500\ \mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-2}$ inducirt.

Gesetz der Magnet-Induktion nach Neumann. Dieselbe absolute Einheit der el. Kraft liegt dem Induktionsgesetz in folgender Form zu Grunde. Ein beliebig gestalteter Leitungsdraht werde in der Nähe von Magneten mit der Geschwindigkeit u bewegt. Um die in dem Leiter inducirte el. Kraft zu erhalten, denken wir ihn von dem Strome 1 Weber durchflossen. Dann würden von den Magneten auf den Strom Eins Kräfte ausgeübt werden, und p sei in irgend einem Augenblick deren Komponenten-Summe nach der Richtung der wirklich ausgeführten Bewegung. Die in diesem Augenblick inducirte el. Kraft ist alsdann $e = -pu$. Im Falle drehender Bewegung ist für p das Drehmoment in der Drehungsebene und für u die Winkelgeschwindigkeit zu setzen.

Dämpfung. Ein Magnet, welcher sich in einem Multiplikator, oder ein Multiplikator, welcher sich in einem magnetischen Felde dreht, erzeugt oder erfährt eine el. Kraft, gleich der Winkelgeschwindigkeit, multiplicirt mit dem Drehmoment, welches ein Strom Eins im Multiplikator in der augenblicklichen Stellung bewirken würde. Ist der Multiplikator geschlossen, so bewirkt der entstehende Strom eine Dämpfung. Vgl. 78 und S. 301.

Kraftlinien. Für viele Fälle übersichtlich ist das Induktionsgesetz in folgender Form: Wird ein Leiter in einem magnetischen Felde bewegt (oder auch ein Magnet in der Nähe eines Leiters), so ist die el. Kraft gleich der in der Zeiteinheit von dem Leiter geschnittenen (Vorzeichen!) Anzahl von Kraftlinien (vgl. 16).

Magnetismus, der in der Nähe eines Leiters entsteht (bez. verschwindet), erzeugt denselben Integralwert el. Kraft, wie wenn er aus grofser Entfernung auf irgend einem Wege an seinen Ort bewegt würde (und umgekehrt). Für einen geschlossenen Leiter ist dieser Integralwert gleich dem Zuwachs (bez. der Abnahme) an der Zahl der Kraftlinien, welche die Fläche durchsetzen. Bei mehrfachen Windungen sind alle Windungsflächen zu rechnen (immer die Vorzeichen beachten!).

Die el. Kraft 1 $cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-2}$ ist $= 1000\, mm^{3/2} mg^{1/2} sec^{-2}$ $= \frac{1}{300} \cdot 10^{-8}$ elektrostatischer [C-G-S]-Potentialeinheiten oder etwa $= \frac{1}{11} \cdot 10^{-7}$ Daniell $= \frac{1}{19} \cdot 10^{-7}$ Bunsen $= \frac{1}{20} \cdot 10^{-7}$ Akkumulator.

Erdinduktor (80. 82). Wir denken uns die Windungen auf eine zur Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene projicirt. Die Summe der Flächenprojektionen ändere in irgend einem Augenblick ihre Gröfse um die kleine Gröfse df in der kleinen Zeit dt. Dann ist die in diesem Augenblick inducirte el. Kraft e gleich der erdmagnetischen Intensität H multiplicirt mit der Geschwindigkeit df/dt der Flächenänderung; $e = H \cdot df/dt$. Wird der Multiplikator aus einer Anfangsstellung senkrecht zur Richtung von H um 180° gedreht, so beträgt der Integralwert der el. Kraft dieses Induktionsstofses $\int e\, dt = 2fH$. Die Sätze gelten auch, wenn die Drehaxe nicht zur Feldrichtung senkrecht steht, falls man als H die gröfste Feldkomponente in der Drehungsebene nimmt, also für eine vertikale Axe die Horizontalkomponente des Feldes.

Die Sätze sind in dem allgemeineren Satz enthalten: Ein geschlossener ebener Leiter von der Windungsfläche f werde in einem magnetischen Felde bewegt (welches nicht homogen zu sein braucht). H_1 und H_2 seien die Komponenten der Feldstärke senkrecht zur Windungsfläche Vorzeichen!) zu Anfang und zum Schlufs der Bewegung. Dann ist der Integralwert der inzwischen inducirten el. Kraft $\int e\, dt = f(H_1 - H_2)$. Wird

also z. B. der Induktor aus einer Stellung senkrecht zur Intensität H eines Feldes aus diesem herausgezogen, so ist $\int e dt = fH$. Alle diese Sätze ergeben sich leicht aus dem Neumann'schen Induktionsgesetz oder aus dem Satz von den Kraftlinien.

Magnetinduktor (81). In eine gegen ihren Durchmesser lange Spule werde aus gröfserer Entfernung ein Magnet vom Moment M eingeschoben, so dafs er sich schliefslich der Spulenaxe parallel in der Spule hinreichend weit von ihren Enden (81 b I) befindet (bez. er werde aus dieser Lage herausgezogen). Oder auch es entstehe (bez. verschwinde) innerhalb der Spule der Magnet M. Der Integralwert der dabei inducirten el. Kraft ist $= 4\pi n M$. n bedeutet die Windungszahl auf der Längeneinheit der Spulenaxe. Vgl. auch 20b.

„Praktische" Einheit. Es ist 1 Volt $= 10^8$ [C-G-S]. Also 1 elektrostatische [C-G-S]-Potentialeinheit = 300 Volt; 1 Daniell etwa = 1,1 Volt (bis 1,2 Volt); 1 Bunsen etwa = 1,9 Volt. 1 Akkumulator = 2,0 Volt; 1 „legales" Volt = 0,9972 Volt.

Potentialdifferenz oder Spannung. Die el. Kraft einer Säule ist proportional dem Potentialunterschiede der offenen Säule an den Polen. Indem man die beiden Gröfsen identificirt, erhält man also auch im elektromagnetischen Mafssystem den Begriff Potential, welcher mit dem Begriff el. Kraft gleichartig ist.

Man kann den Begriff auch so definiren. Potential auf einem vom Strome durchflossenen Leiter ist die Gröfse, deren Gefälle oder negativer Differentialquotient die auf die Elektricitätsmenge Eins ausgeübte Kraft ergibt.

20a. Kapacität, elektromagnetisch gemessen, $c = [l^{-1} t^2]$. Kapacität eines Leiters heifst auch hier die El.-Menge (19a), welche derselbe enthält, wenn er zum Potential Eins oder von der el. Kraft (20) Eins geladen ist, während die Leiter der Umgebung das Potential Null haben. Vgl. auch 13 u. 13a.

Da im statischen [C-G-S]-System die Einheit für die Elektricitätsmenge $3 \cdot 10^{10}$ mal kleiner, diejenige des Potentials $3 \cdot 10^{10}$ mal gröfser ist als im magnetischen Mafssystem, so ist die Einheit der Kapacität dort $9 \cdot 10^{20}$ mal kleiner.

„Praktische" Einheit. Die Kapacität eines Kondensators, welcher zum Potential 1 Volt geladen die Elektricitätsmenge 1 Am·sec oder Coulomb hält, ist 1 Farad $= 10^{-9}$[cm^{-1}sec^2] el.-magn. oder $= 9 \cdot 10^{11}$ [cm] el.-stat. (vgl. 13). Das Mikrofarad ist der millionte Teil des Farad.

Ein Luftkondensator von der Fläche f cm² und dem kleinen Abstand l cm hat eine Kapacität $= f/4\pi l$[cm] elektrostatisch (13 und 13a), also $f/(4\pi l \cdot 9 \cdot 10^5)$ Mikrofar. Z. B. für $f = 100$ cm², $l = 0{,}1$ cm ist die Kapacität $= 100/(4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 \cdot 9 \cdot 10^5) = 0{,}000088$ Mikrofar.

20b. Induktions-Koefficient oder elektrodynamisches Potential, $\Pi = [l]$. Π ist der Faktor, mit welchem die zeitliche Änderung di/dt eines Stromes zu multipliciren ist, um die Gröfse der durch diese Änderung zur Zeit t inducirten el. Kraft e zu erhalten.

Selbstinduktions-Koefficient oder Selbst-Potential eines Leiters. Die inducirte el. Kraft ist der Stromrichtung stets entgegengerichtet $e = -\Pi \cdot di/dt$. Vgl. 88a. Für eine gestreckte Spule von dem gegen die Länge l kleinen Halbmesser r mit N Windungen gilt nahe $\Pi = 4\pi^2 N^2 (\sqrt{l^2+r^2} - r) \cdot r^2/l^2$, also wenn r sehr klein gegen l, $\Pi = 4\pi^2 N^2 r^2/l$.

Wird eine el. Kraft E durch einen Leiter vom Widerstande w und vom Selbstpotential Π zur Zeit Null geschlossen, so ist zur Zeit t die Stromstärke $i = E/w \cdot (1 - e^{-w/\Pi \cdot t})$ (Helmholtz). Π/w heifst wohl Relaxationszeit.

Wechselströme mit Selbstinduktion. In einer Leitung vom Widerstande w und vom Selbstpotentiale Π wirke eine sinusförmige el. Kraft $A \cdot \sin(\pi/\tau \cdot t)$ oder $A \cdot \sin(\pi\nu\tau)$, wo τ die halbe Dauer der Periode oder $\nu = 1/\tau$ die Wechselzahl ist. Dann gilt für die Stromstärke i die Gleichung $A \cdot \sin(\pi\nu t) = wi + \Pi \cdot di/dt$. Hieraus findet man, wenn die Stromstärke ebenfalls periodisch geworden ist (also die ersten Augenblicke nach dem Anlaufen ausgeschlossen), $i = \dfrac{A \cdot \sin \pi\nu(t - \Theta)}{\sqrt{w^2 + \pi^2\nu^2\Pi^2}} = \dfrac{A \cdot \sin(\pi\nu t - \varphi)}{\sqrt{w^2+\pi^2\nu^2\Pi^2}}$, wo der konstante Wert Θ die in Zeit ausgedrückte, $\varphi = \pi\nu\Theta$ die in „Winkel" ausgedrückte Phasenverzögerung des Stromes gegen die el. Kraft darstellt. φ ist gegeben durch $\operatorname{tg}\varphi = \pi\nu\,\Pi/w$.

$\sqrt{w^2+\pi^2\nu^2\Pi^2}$ ist der scheinbare Widerstand („Impedanz"). w und Π sind in [C-G-S] oder in Ohm und Quadrant (s. Nr. 20a u. 21) auszudrücken.

Über die Bezeichnungen „effektive" Stromstärke oder el. Kraft s. S. 358.

Bei sehr grofser Wechselzahl wird auch für einen geradlinigen dicken guten Leiter der scheinbare Widerstand gröfser als der Ohm'sche, nämlich im Verhältnis $\left(1 + \dfrac{\pi^2}{12}\dfrac{\nu^2}{\gamma^2} - \dfrac{\pi^4}{180}\dfrac{\nu^4}{\gamma^4} \cdots\right) : 1$, wenn γ den Widerstand von 1 cm in [C-G-S] bedeutet (Nr. 21). Falls das Leitmaterial magnetisch ist, hat man μ/γ statt $1/\gamma$ einzuführen, wo $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$; vgl. Nr. 17 (Rayleigh, Phil. Mag. 21, 387. 1886).

Gegenseitiger Induktions-Koefficient. Derselbe kann auch definirt werden als das el. Kraft-Integral $\int e\,dt$, welches in dem einen Leiter auftritt, während im anderen der Strom Eins entsteht oder verschwindet.

Über eine im Verhältnis zu ihrem Halbmesser r lange Spule von je n Windungen auf jeder Längeneinheit sei eine im Verhältnis zu jener

Länge kurze und enge Spule von der Gesamtwindungszahl N geschoben. In einer der Spulen entstehe oder verschwinde der Strom i. Dabei entsteht in der anderen $\int e dt = 4\pi^2 nNr^2 \cdot i$. Also $\Pi = 4\pi^2 nNr^2$.

Liegt die kurze Spule innerhalb der langen, so ist $\int e dt = 4\pi n f \cdot i$, wo f die gesamte Windungsfläche der kurzen Spule bedeutet. fi entspricht dem M in Nr. 20 bei „Magnetinduktor".

Ist die lange Spule die primäre und wird durch den Strom zugleich ein durch beide Spulen gehender, gegen die sekundäre Spule langer Eisenstab magnetisirt, bedeutet hierbei m das entstehende magnetische Moment der Längeneinheit in der Nähe der kleinen Spule, so kommt zu den obigen $\int e dt$ hinzu $4\pi m \cdot N$.

Für zwei beliebige geschlossene Leiter ist der gegenseitige Ind.-Koefficient gleich $\int\int \frac{1}{r} \cos(dl_1, dl_2) \cdot dl_1 \cdot dl_2$, wenn dl_1 und dl_2 die in einer bestimmten Richtung herum gezählten Längenelemente der Leiter bedeuten und r den gegenseitigen Abstand von dl_1 und dl_2 (Neumann).

In der Sprache der Kraftlinien kann man Π gleich der Summe der magnetischen Kraftlinien setzen, welche bei der Entstehung der Stromeinheit in der inducirenden Leitung durch die sämtlichen Windungen der inducirten Spule neu hindurchtreten (Vorzeichen!).

Die dem Ohm-Ampere-Volt-System entsprechende Einheit ist der Quadrant („Henry") $= 10^9$[cm].

21. Leitungswiderstand, elektromagn. gemessen, $w = [lt^{-1}]$. Um in dem Weber'schen Mafssystem, nach Feststellung der Einheiten für Strom und el. Kraft, die Widerstandseinheit zu erhalten, benutzt man das Ohm'sche Gesetz. Der Widerstand desjenigen Leiters ist Eins, in welchem die elektromotorische Kraft Eins den Strom Eins erzeugt.

Widerstand = El. Kraft/Strom $= [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]/[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] = [l/t]$.

Der Widerstand erscheint also gleichbedeutend mit einer Geschwindigkeit und läfst sich in der That durch eine solche darstellen. Z. B. ist der Widerstand eines geradlinigen Drahtes von der Längeneinheit gegeben durch diejenige Geschwindigkeit, mit welcher man ihn in einem magnetischen Felde Eins unter den S. 451 beschriebenen Verhältnissen bewegen mufs, damit in ihm der Strom Eins entstände, wenn die Enden durch einen widerstandslosen Leiter (auf welchen natürlich keine Induktion stattfände) mit einander verbunden wären.

1 cm³-Quecksilber-Würfel von 0° hat den Widerstand 94080 cm/sec.

1 el. stat. Widerstandseinheit cm^{-1} sec $= 900 \cdot 10^{18}$ cm/sec el. magn.

„Praktische" Einheit. 1 Ohm $= 10^9$ cm/sec $=$ 1 Volt/Am

= 1,063 Siem.-E. oder = 1,063 m/mm² Hg 0° = $\frac{1}{900} \cdot 10^{-9}$ elektrostat. [C-G-S]-Widerstands-Einheiten.[1])

Das frühere „legale“ Ohm ist = 1,060 m/mm² Hg 0° = 0,9972 richtige Ohm.

Specifischer Widerstand [$l^2 t^{-1}$]. Den spec. Widerstand Eins hat ein Leiter, welcher als Säule von der Länge und dem Querschnitt 1 den Widerstand 1 ergibt.

Im el. magn. [C-G-S]-System ist also der spec. Widerstand des Quecksilbers, nämlich der Widerstand eines cm-Würfels Quecksilber, bei 0° = 94080 cm²/sec. — Rechnet man aber den Widerstand in Ohm, die Länge in m, den Querschnitt in mm², so ist der spec. Widerstand Hg 0° gleich 0,9408 zu setzen. Der reciproke spec. Widerstand heiſst Leitvermögen des Körpers.

22. Stromarbeit, Stromwärme. Die innere Stromarbeit, welche sich z. B. in der Erwärmung eines Leiters äuſsert, ist, auſser der Zeit, dem Quadrate der Stromstärke und dem Widerstande, oder, was dasselbe bedeutet, der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke proportional (Joule). Die Bedeutung der absoluten Maſse zeigt sich darin, daſs ihre Einführung auch hier die Proportionalität in Gleichheit verwandelt. Die Stromarbeit Q ist also $Q = i^2 w t = e i t$. Dieser Satz gilt sowohl für das elektrostatische wie das elektromagnetische System. Daſs das Produkt el. Kraft (Potential) mal Stromstärke mal Zeit in beiden Fällen die Dimension $l^2 m t^{-2}$, d. h. diejenige einer Arbeit hat, ist S. 438 gezeigt worden. Nennt man diejenige Wärmemenge Eins, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist, so ist Q auch die entwickelte Stromwärme (Clausius, Thomson).

„Praktische“ Einheit für die Stromleistung d. h. für die Stromarbeit in 1 sec: 1 Watt = 1 Volt × Am; s. auch S. 458.

Ableitung. Der obige Satz bedarf für das elektrostatische System keines Beweises. Für das elektromagnetische folgt er aus den Gesetzen der Magnet-Induktion in einem bewegten Leiter (S. 451) und der Erhaltung der Energie. In einem geschlossenen Leiter, der unter dem Einfluſs eines Magnetes bewegt wird, wird ein Strom inducirt, auf welchen nun durch den Magnet eine mechanische („ponderomotorische“) Kraft ausgeübt wird, welche stets der wirklich ausgeführten Bewegung entgegenwirkt. Man verrichtet also durch diese Bewegung eine Arbeit; deren Gröſse ist gleich

---

1) Gesetzlich ist die Reihenfolge der Definitionen der praktischen Einheiten: 1 Ohm = 1,063 m/mm² Hg 0°; 1 Am = 1,118 mg Silber/sec; 1 Volt = Ohm × Ampere.

dem Produkt aus dem Weg in die widerstehende Kraft. Der Weg ist = Geschwindigkeit × Bewegungsdauer $= u \cdot t$; die Kraft ist jedenfalls der Stärke i des inducirten Stromes proportional. Wir können also die Kraft $= p \cdot i$ setzen und die verrichtete Arbeit $= p \cdot iut$.

Der Faktor p bedeutet offenbar diejenige Kraft, welche unter den gegebenen Verhältnissen von dem Magnet auf einen Strom Eins im Leiter ausgeübt werden würde. Dann aber sagt das Induktionsgesetz (S. 451), dafs $p \cdot u$ die inducirte el. Kraft e nach absolutem Mafse darstellt; wir haben also die verrichtete Arbeit $p \cdot iut = eit$. Dies heifst: wenn wir einen Leiter so bewegen, dafs durch Magnet-Induktion in ihm die el. Kraft e und der Strom i entsteht, so verrichten wir während der Zeit t die Arbeit eit oder i^2wt.

Da nun nach ausgeführter Bewegung als Wirkung dieser Arbeit in einem metallischen Leiter (bei der Elektrolyse wäre noch die chemische Arbeit zu berücksichtigen) nur die durch den Strom in dem Leiter entwickelte Wärmemenge vorhanden ist, so folgt aus dem Gesetz der Gleichheit von Wärme und Arbeit, dafs eit (oder i^2wt) eben diese Wärmemenge darstellt, in welche diese mechanische Arbeit durch Vermittelung des Stromes umgesetzt worden ist; natürlich diejenige Wärmemenge als Einheit angenommen, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist.

Unmittelbar aber ist die in dem Leiter entwickelte Wärme doch nur eine innere Wirkung des Stromes, und so haben wir in i^2wt oder eit die durch einen Strom i, wenn er einen Leiter vom Widerstande w durchfliefst, oder wenn er von der el. Kraft e hervorgebracht wird, erzeugte Wärmemenge, oder mit anderen Worten die von ihm verrichtete innere Arbeit.

Galvanische Elemente. Der Verbrauch von 1 gr-Äqu. im Element gibt (vgl. Nr. 19) die Strommenge 1/0,0001036 [C-G-S], also bei der el. Kraft e die el. Arbeit (einschliefslich etwaiger Stromwärme im Element) $e/0{,}0001036$ Erg, entsprechend $e/(0{,}0001036 \cdot 41900000) = e/4340$ gr-Cal. Würde die Wärmeentwickelung S, welche dem chemischen Procefs im Element pro gr-Äquivalent entspricht, ganz in elektrische Energie umgesetzt, so würde die el. Kraft $e = 4340 \cdot S$ [C-G-S] $= 0{,}0000434 \cdot S$ Volt sein. Vgl. auch folg. S.

Einflufs der Temperatur auf die el. Kraft. Ein in beiden Richtungen unpolarisirbares Element (bei welchem die Stromumkehr den chemischen Vorgang umkehrt, z. B. Daniell mit $ZnSO_4$ statt H_2SO_4; Clark) habe die el. Kraft e bei der Temperatur T, e' bei der etwas verschiedenen Temperatur T'. Dasselbe liefere bei T Strom bis zum Verbrauch von 1 gr-Äqu., also die elektrische Arbeit e/c, wo $c = 0{,}0001036$.

Q sei die in Arbeitsmafs ausgedrückte Wärmetönung, welche der Summe der Processe entspricht, so mufs, um das Element auf T zu erhalten, ihm die Wärmemenge $e/c - Q$ zugeführt (bez. $Q - e/c$ entzogen) werden. Der chemische Procefs werde bei der Temp. T' durch einen Gegenstrom rückgängig gemacht. Die hierauf von aufsen zu verwendende

Arbeit (z. B. durch eine Dynamomaschine) beträgt e'/c. Die gesamte während des Kreisprocesses vom Element nach aufsen geleistete Arbeit ist also $(e-e')/c$.

Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik (s. Nr. 7) mufs also sein $(e-e')/c : (e/c-Q) = (T-T') : T$, oder der Temp.-Koefficient der el. Kraft $\frac{e-e'}{T-T'} = \left(\frac{e}{c}-Q\right)\frac{c}{T} = \frac{e-0{,}0001036 \cdot Q}{T}$ (Helmholtz).

e ist also von der Temperatur unabhängig, wenn die el. Kraft genau „der chemischen Wärmetönung entspricht“, wenn die chemische Energie sich durch den Strom gerade in elektrische umsetzt, was z. B. bei dem Daniell-Element nahe der Fall ist. Denn die gleichzeitige Auflösung von 1 gr-Äqu. Zn zu $ZnSO_4$ und Abscheidung von Cu aus $CuSO_4$ gibt die Wärmetönung $S = 25060$ gr-Kal., also $Q = 25060 \cdot 41900000 = 1050 \cdot 10^9$ Erg. Eine solche el. Arbeit würde beim Verbrauch vom 1 gr-Äqu. im Element von der el. Kraft $e = 0{,}0001036 \cdot 1050 \cdot 10^9 = 1{,}09 \cdot 10^8$[C-G-S] $= 1{,}09$ Volt geleistet werden. Dies ist aber nahe die el. Kraft Daniell. Ist aber, wie gewöhnlich, z. B. bei dem Clark-Element, die el. Kraft kleiner, als die so berechnete, so nimmt dieselbe mit wachsender Temperatur ab.

Stromwärme. Der Strom $1\,cm^{1/2}\,g^{1/2}\,sec^{-1}$ im Widerstande 1 Ohm $= 10^9\,cm\,sec^{-1}$ verrichtet in der Sekunde die Arbeit $10^9\,cm^2\,g\,sec^{-2}$. Da nun 41900000 solcher Arbeitseinheiten der Wasser-gr-Kalorie (vgl. Nr. 7) entsprechen, so beträgt die von dem Strome 1 [C-G-S] in 1 Ohm entwickelte Wärmemenge $10^9/41900000 = 23{,}9$ gr-Kalorien. Nach dem Ausdruck $Q = i^2wt$, und da 1 Am $= 0{,}1$ [cm, g] ist, entwickelt also der Strom i Am in w Ohm während t sec die Wärmemenge $0{,}239 \cdot i^2wt$ gr-Kalorien.

Statt dessen kann man z. B. auch so sagen: Die elektrom. Kraft 1 Volt $= 10^8\,cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sec^{-2}$ bringe den Strom 1 Am $= 0{,}1\,cm^{1/2}\,g^{1/2}\,sec^{-1}$ hervor. In einer Sekunde wird dadurch die Arbeit 1 Volt·Am·sec $= 10^7\,cm^2\,g\,sec^{-2}$ geleistet. Wollen wir dies in technische Hub-kg-meter umrechnen, so ist (Nr. 7) 1 kg-Gew. $\times$ meter $= 98060000\,cm^2\,g\,sec^{-2}$. Durch Division findet man die Arbeit 1 Volt·Am·sec $= 0{,}102$ kg-Gew. $\times$ meter. In Wärme umgerechnet gibt dies, wie oben, $102/428 = 0{,}239$ gr-Kal.

Setzt man eine Pferdekraft $= 75$ kg-Gew. $\times$ meter/sec, so ist also die Stromleistung in 1 sec, nämlich 1 Watt $=$ 1 Volt·Am $= 10^7$ Erg/sec $=$ 0,102 kg-Gew. meter/sec $= 0{,}00136$ Pf.

Die Weber'schen Einheiten lassen sich also, nach Feststellung der Stromeinheit, auch folgendermafsen definiren. Die Einheit der elektromotorischen Kraft ist diejenige el. Kraft, welche dadurch, dafs sie den Strom Eins hervorbringt, in der Zeit Eins die Arbeitseinheit verrichtet.

Oder auch: Widerstandseinheit ist der Widerstand desjenigen Leiters, in welchem der Strom Eins in der Zeiteinheit die Einheit der Arbeit verrichtet.

Tabellen.

1. Dichtigkeit.

Aluminium	2,6	Natrium	0,98	Flüssigkeiten bei 15°	
Blei	11,3	Neusilber	8,5	CO_2 0,84; NH_3 0,61; SO_2	1,39
Braunstein	5,0	Nickel	8,9	Äther $C_4H_{10}O$	0,720
Bronce	8,7	Platin	21,5	Äthylacetat $C_4H_8O_2$	0,90
Eisen, Schmiede-	7,8	Quarz	2,65	Alkohol C_2H_6O	0,7937
Gufs-	7,1—7,7	Schwefel	2,0	Ameisensäure CH_2O_2	1,22
Draht	7,7	Silber	10,5	Amylalkohol $C_5H_{12}O$	0,81
Gufsstahl	7,8	Wachs	0,96	Anilin C_6H_7N	1,03
Elfenbein	1,9	Wismut	9,9	Benzol C_6H_6	0,884
Glas (vgl. 7,5)	2,4—2,6	Zink	7,1	Bromoform $CHBr_3$	2,86
Flintglas	3,0—5,9	Zinn	7,3	Chloroform $CHCl_3$	1,499
Gold	19,3	Eis	0,9167	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1,053
Gyps	2,32	KCl 1,98; KNO_3	2,09	Glycerin $C_3H_8O_3$	1,260
Holz, Eben-	1,2	K_2SO_4 2,65; KOH	2,0	Jodmethylen CH_2J_2	3,3
Buchen-	0,7	NaCl 2,15; $NaNO_3$	2,24	Methylacetat $C_3H_6O_2$	0,93
Eichen-	0,7	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	1,46	Methylalkohol CH_4O	0,80
Tannen-	0,5	$Na_2CO_3 + 10\,H_2O$	1,46	Nitrobenzol $C_6H_5O_2N$	1,20
Kalium	0,87	$BaCl_2$ 3,85; $SrCl_2$	3,05	Olivenöl	0,91
Kalkspat	2,71	NH_4Cl 1,52; AgCl	5,55	Phenol C_6H_6O	1,08
Konstantan	8,9	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	1,68	Schwef.kohlstoff CS_2	1,270
Kork	0,2	$ZnSO_4 + 7\,H_2O$	2,01	Terpentinöl	0,87
Kupfer	8,5—8,9	$CuSO_4 + 5\,H_2O$	2,27	Toluol C_7H_8	0,89
Magnesium	1,7	Naphtalin $C_{10}H_8$	1,14	Xylol C_8H_{10}	0,87
Manganin	8,4	Weinsäure $C_4H_6O_6$	1,76	Quecksilber ... 15°	13,559
Messing	8,1—8,6	Zucker $C_{12}H_{22}O_{11}$	1,59	" ... 0°	13,5957

Nach Regnault, Jolly, Leduc, Rayleigh zusammengestellt von Rayleigh u. Ramsay	Wasser = 1 Bei 0° u. 760 mm unter 45° Breite	Luft = 1 bei gleicher Temperatur und gleichem Druck	Sauerstoff = 16 bei gleicher Temperatur und gleichem Druck
Luft	0,0012930	1,0000	14,477
Sauerstoff	0,0014291	1,1052	16,000
Stickstoff („atmosph." 0,0012571)	0,0012507	0,9672	14,002
Wasserstoff	0,00008988	0,06951	1,0063
Kohlensäure	0,001965	1,520	22,00
Knallgas	0,0005363	0,4148	6,00
Wasserdampf	(0,000804)	0,622	9,00

2. Araeometerskalen.

Dichtigkeit	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00			
Baumé	58,4	46,3	35,6	26,1	17,7	10,0°			
Beck	56,7	42,5	30,0	18,9	8,9	0,0			
Dichtigkeit	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Baumé	0,0	13,2	24,3	33,7	41,8	48,8	54,9	60	65°
Beck	0,0	15,4	28,3	39,2	48,6	56,7	63,7	70	76°

3. Specifisches Gewicht wässriger Lösungen bei 15°, bezogen auf Wasser von 4°.

Gröfstenteils nach Gerlach (Z.S. f. anal. Chem. 8, 279. 1869) und Kohlrausch (Pogg. Ann. 159, 257. 1876; Wied. Ann. 6, 38. 1879); auch nach Carius, Lunge, Mendeléeff, Schiff.

Der Procentgehalt bedeutet überall die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthaltenen Gewichtsteile der überschriebenen Verbindung. Die Salze sind wasserfrei. Specifische Gewichte, aufser Zucker, für 15°.

%	KOH	KCl	KBr	KJ	KNO_3	K_2SO_4	K_2CO_3	$K_2Cr_2O_7$	%
0	0,999	0,9991	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0
5	1,045	1,0316	1,035	1,037	1,031	1,040	1,045	1,036	5
10	1,092	1,0649	1,074	1,077	1,064	(1,083)	1,092	1,078	10
15	1,141	1,0994	1,115	1,120	1,099		1,141	1,110	15
20	1,191	1,1351	1,158	1,168	1,135		1,192		20
25	1,242	(1,172)	1,205	1,218			1,245		25
30	1,295		1,355	1,273			1,300		30
35	1,349		1,308	1,333			1,358		35
40	1,406		1,367	1,399			1,417		40
45	1,466		1,431	1,470			1,479		45
50	1,53			1,547			1,543		50
55	1,59			1,633					55
60	1,66			1,733					60

%	NH_3	NH_4Cl	NaOH	NaCl	$NaNO_3$	Na$\bar{A}$	Na_2SO_4	Na_2CO_3	%
0	0,999	0,9991	0,999	0,9991	0,999	0,999	0,999	0,999	0
5	0,978	1,0149	1,057	1,0354	1,033	1,026	1,045	1,052	5
10	0,958	1,0299	1,113	1,0724	1,069	1,052	1,092	1,105	10
15	0,941	1,0443	1,169	1,1105	1,106	1,079	1,143	1,160	15
20	0,924	1,0584	1,226	1,1501	1,146	1,106			20
25	0,910	1,0721	1,281	1,1913	1,185	1,133			25
30	0,896		1,335		1,228	1,161			30
35	0,883		1,389		1,271				35
40			1,440		1,316				40
45			1,49		1,367				45
50			1,54		1,42				50

%	$LiCl$	$BaCl_2$	$SrCl_2$	$CaCl_2$	$MgCl_2$	$MgSO_4$	$ZnSO_4$	$CuSO_4$	%
0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,9991	0,999	0,999	0
5	1,028	1,045	1,044	1,042	1,041	1,0507	1,052	1,051	5
10	1,057	1,094	1,092	1,086	1,085	1,1044	1,108	1,106	10
15	1,086	1,148	1,143	1,133	1,130	1,1612	1,168	1,166	15
20	1,117	1,205	1,198	1,181	1,177	1,2211	1,236	(1,23)	20
25	1,148	1,269	1,257	1,232	1,226	1,2837	1,307	-	25
30	1,182		1,321	1,286	1,278		1,382		30
35	1.218			1,343	1,333				35
40	1,256			1,402					40

%	$AgNO_3$	$Pb\bar{A}_2$	HCl	HNO_3	H_2SO_4	H_3PO_4	Alkohol	Zucker 17,5°	%
0	0,999	0,999	0,9991	0,999	0,9991	0,999	0,9991	0,9987	0
5	1,043	1,037	1,0242	1,028	1,0334	1,027	0,9904	1,0184	5
10	1,090	1,076	1,0492	1,057	1,0687	1,055	0,9831	1,0388	10
15	1,141	1,119	1,0744	1,088	1,1051	1,084	0,9769	1,0600	15
20	1,197	1,164	1,1001	1,120	1,1430	1,115	0,9708	1,0819	20
25	1,257	1,213	1,1262	1,153	1,1816	1,147	0,9644	1,1047	25
30	1,323	1,266	1,1524	1,186	1,223	1,181	0,9569	1,1282	30
35	1,396	1,324	1,1775	1,219	1,264	1,216	0,9485	1,1526	35
40	1,479	1,388	1,203	1,252	1,307	1,253	0,9390	1,1780	40
45	1,572			1,285	1,352	1,292	0,9287	1,2041	45
50	1,677			1,318	1,399	1,333	0,9179	1,2313	50
55	1,792			1,348	1,449	1,376	0,9068	1,2593	55
60	1,919			1,375	1,503	1,421	0,8954	1,2883	60
65				1,400	1,559	1,467	0,8838	1,3183	65
70				1,422	1,616	1,515	0,8720	1,3494	70
75				1,442	1,675	1,566	0,8601	1,3813	75
80				1,461	1,733	1,619	0,8479		80
85				1,478	1,785	1,676	0,8354		85
90				1,494	1,819	1,700	0,8224		90
95				1,51	1,839		0,8086		95
100				1,53	1,8384		0,7937		100

Tab. 3a. Wässrige Normallösungen bei 18°; Gehalt, Dichtigkeit, elektrisches Leitvermögen und Wanderung der Ionen.

1 Grammäquivalent im Liter.

A Äquivalentgewicht (O = 16,00) oder Koncentration in gr/liter.
p Procentgehalt, in 100 Gewichtsteilen der Lösung.
$s_{18/4}$ Specifisches Gewicht der Lösung.
Δs_{18} Abnahme von s auf + 1° um 18° (Gerlach, Forch).
k_{18} Elektrisches Leitvermögen, bezogen auf Quecksilber von 0°.
$\Delta k/k_{18}$ Relatives Wachstum von k auf + 1° in der Nähe von 18°.
n Elektrische Überführungszahl des Anions (Hittorf; Kuschel).

s, k und Δk meist nach F. K., Wied. Ann. 6, 148. 1879; 26, 174 u. 195. 1885.

	A	p	$s_{18/4}$	Δs_{18}	$10^8 \cdot k_{18}$	$\Delta k/k_{18}$	n
KOH	56,14	5,357	1,0479	0,00030	1719	0,0186	0,74
KCl	74,59	7,188	0450	28	918	193	0,51
KBr	119,1	11,01	0814	29	960	190	0,52
KJ	166,00	14,841	1185	33	970	190	0,51
KNO_3	101,18	9,543	0602	33	752	200	0,49
$KC_2H_3O_2$	98,14	9,375	0468		594	215	0,33
$\frac{1}{2}K_2SO_4$	87,17	8,177	0660	29	672	205	0,50
$\frac{1}{2}K_2CO_3$	69,14	6,537	0577	27	662	215	0,43
NH_4Cl	53,49	5,268	0153	24	906	194	0,51
NaOH	40,05	3,843	0422	31	1490	197	0,83
NaCl	58,50	5,629	0392	28	695	212	0,63
$NaNO_3$	85,09	8,070	0544	35	617	215	0,61
$NaC_2H_3O_2$	82,05	7,897	040	22	386	250	0,42
$\frac{1}{2}Na_2SO_4$	71,08	6,703	0604	31	477	236	0,64
$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	53,05	5,044	0515	29	426	246	0,55
LiOH	24,02	2,342	0258		1253	196	0,88
LiCl	42,47	4,156	0228	22	591	220	0,74
$\frac{1}{2}Li_2SO_4$	55,05	5,270	0446	25	387	231	(0,7)
$\frac{1}{2}BaCl_2$	104,0	9,550	0890	31	658	202	0,64
$\frac{1}{2}SrCl_2$	79,25	7,425	0674	28	640	207	0,65
$\frac{1}{2}CaCl_2$	55,45	5,313	0436	25	633	207	0,69
$\frac{1}{2}MgCl_2$	47,60	4,586	0379	23	593	217	0,71
$\frac{1}{2}MgSO_4$	60,18	5,692	0572	27	271	225	0,66
$\frac{1}{2}ZnCl_2$	68,1	6,435	0583		514	22	(0,7)
$\frac{1}{2}ZnSO_4$	80,7	7,480	0789	27	248	22	0,68
$\frac{1}{2}CuSO_4$	79,7	7,397	0775	28	241	22	0,70
$AgNO_3$	170,0	14,91	140		634	210	0,50
HCl	36,45	3,587	0165		2820	159	0,17
HNO_3	63,04	6,109	0325	31	2810	150	0,17
$\frac{1}{2}H_2SO_4$	49,03	4,762	0307	30	1850	120	0,17
$C_2H_4O_2$	60,01	5,957	0074				
Zucker	342,1	30,29	1,1294	34			

4. Dichtigkeit des Wassers

nach Marek, Thiesen und Scheel, für die Temperatur t des Wasserstoff-Thermometers berechnet von Scheel

und

Volumen V eines Glasgefässes bei 15°,

welches bei t^0 mit Messinggewichten in Luft von der Dichtigkeit 0,00120 gewogen, scheinbar 1 g Wasser fafst, in ccm. (Vgl. S. 84.)

t	Dichtigkeit	Differenz	Glas-Volumen V	Differenz
0°	0,999874		1,00156	
1	0,999930	+ 56	1,00148	— 8
2	0,999970	+ 40	1,00142	— 6
3	0,999993	+ 23	1,00137	— 5
4	1,000000	+ 07	1,00134	— 3
5	0,999992	— 08	1,00132	— 2
6	0,999969	— 23	1,00132	
7	0,999931	— 38	1,00133	+ 1
8	0,999878	— 53	1,00135	+ 2
9	9,999812	— 66	1,00139	+ 4
10	0,999731	— 81	1,00145	+ 6
11	0,99964	— 9	1,00152	+ 7
12	0,99953	—11	1,00161	+ 9
13	0.99941	—12	1,00170	+ 9
14	0,99928	—13	1,00181	+11
15	0,99913	—15	1,00193	+12
16	0,99898	—15	1,00206	+13
17	0,99881	—17	1,00221	+15
18	0,99863	—18	1,00236	+15
19	0,99844	—19	1,00252	+16
20	0,99824	—20	1,00270	+18
21	0,99802	—22	1,00289	+19
22	0,99780	—22	1,00309	+20
23	0,99757	—23	1,00330	+21
24	0,99733	—24	1,00352	+22
25	0,99707	—26	1,00375	+23
26	0,99681	—26	1,00399	+24
27	0,99654	—27	1,00423	+24
28	0,99626	—28	1,00449	+26
29	0,99597	—29	1,00476	+27
30	0,99567	—30	1,00504	+28

5. Specifisches Volumen des Wassers, d. h. Volumen eines Grammes Wasser in Cubikcentimetern zwischen 0 und 100°.

Temp.	Volumen	Zunahme auf 1°
0°	1,00012	
4	1,00000	
10	1,00027	
15	1,00087	0,00012
20	1,00176	18
25	1,00294	23
30	1,00435	28
35	1,0059	32
40	1,0077	36
45	1,0097	40
50	1,0120	46
55	1,0144	48
60	1,0170	52
65	1,0197	54
70	1,0226	58
75	1,0257	62
80	1,0289	64
85	1,0322	66
90	1,0357	70
95	1,0394	74
99	1,04247	77
100	1,04327	0,00080

6. Dichtigkeit der trockenen atmosphärischen Luft,

bezogen auf Wasser von 4°,

bei der Temperatur t und dem Drucke H mm Quecksilber von 0° für 45° Breite berechnet als (15)

$$\frac{0{,}0012930}{1+0{,}00367\,t}\;\frac{H}{760}.$$

t	Druck H=700	710	720	730	740	750	760	770	P. P.	
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	17	
0°	1191	1208	1225	1242	1259	1276	1293	1310	mm 1	2
1	1187	1204	1221	1237	1254	1271	1288	1305	2	3
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1301	3	5
3	1178	1195	1212	1228	1245	1262	1279	1296	4	7
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291	5	8
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1286	6	10
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282	7	12
7	1161	1178	1194	1211	1227	1244	1261	1277	8	14
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273	9	15
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268	16	
10	1149	1165	1181	1198	1214	1231	1247	1264	mm	
11	1145	1161	1177	1194	1210	1227	1243	1259	1	2
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1238	1255	2	3
13	1137	1153	1169	1185	1202	1218	1234	1250	3	5
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246	4	6
15	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1226	1242	5	8
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1237	6	10
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233	7	11
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229	8	13
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225	9	14
20	1110	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1220	15	
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1200	1216	mm	
22	1102	1118	1133	1149	1165	1181	1196	1212	1	1
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1192	1208	2	3
24	1095	1110	1126	1141	1157	1173	1188	1204	3	4
25	1091	1106	1122	1138	1153	1169	1184	1200	4	6
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1180	1196	5	7
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1176	1192	6	9
28	1080	1095	1111	1126	1142	1157	1173	1188	7	10
29	1076	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184	8	12
30	1073	1088	1103	1119	1134	1149	1165	1180	9	13

7. Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm.

Volumen und Dichtigkeit eines Gases, bei der Temperatur t und dem Quecksilber-Drucke H als v und s gemessen, werden für 0° und 760 mm, wenn $\alpha = 0{,}00367$ ist,

$$v_0 = \frac{v}{1+\alpha t}\frac{H}{760} \quad \text{und} \quad s_0 = s\,(1+\alpha t)\,\frac{760}{H}\,.$$

t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$
0°	1,0000	40°	1,1468	80°	1,2936
1	1,0037	41	1,1505	81	1,2973
2	1,0073	42	1,1541	82	1,3009
3	1,0110	43	1,1578	83	1,3046
4	1,0147	44	1,1615	84	1,3083
5	1,0183	45	1,1651	85	1,3119
6	1,0220	46	1,1688	86	1,3156
7	1,0257	47	1,1725	87	1,3193
8	1,0294	48	1,1762	88	1,3230
9	1,0330	49	1,1798	89	1,3266
10	1,0367	50	1,1835	90	1,3303
11	1,0404	51	1,1872	91	1,3340
12	1,0440	52	1,1908	92	1,3376
13	1,0477	53	1,1945	93	1,3413
14	1,0514	54	1,1982	94	1,3450
15	1,0550	55	1,2018	95	1,3486
16	1,0587	56	1,2055	96	1,3523
17	1,0624	57	1,2092	97	1,3560
18	1,0661	58	1,2129	98	1,3597
19	1,0697	59	1,2165	99	1,3633
20	1,0734	60	1,2202	100	1,3670
21	1,0771	61	1,2239	101	1,3707
22	1,0807	62	1,2275	102	1,3743
23	1,0844	63	1,2312	103	1,3780
24	1,0881	64	1,2349	104	1,3817
25	1,0917	65	1,2385	105	1,3853
26	1,0954	66	1,2422	106	1,3890
27	1,0991	67	1,2459	107	1,3927
28	1,1028	68	1,2496	108	1,3964
29	1,1064	69	1,2532	109	1,4000
30	1,1101	70	1,2569	110	1,4037
31	1,1138	71	1,2606	111	1,4074
32	1,1174	72	1,2642	112	1,4110
33	1,1211	73	1,2679	113	1,4147
34	1,1248	74	1,2716	114	1,4184
35	1,1284	75	1,2752	115	1,4220
36	1,1321	76	1,2789	116	1,4257
37	1,1358	77	1,2826	117	1,4294
38	1,1395	78	1,2863	118	1,4331
39	1,1431	79	1,2899	119	1,4367
40	1,1468	80	1,2936	120	1,4404

H	$H/760$	H	$H/760$
mm		mm	
700	0,9211	740	0,9737
701	0,9224	741	0,9750
702	0,9237	742	0,9763
703	0,9250	743	0,9776
704	0,9263	744	0,9789
705	0,9276	745	0,9803
706	0,9289	746	0,9816
707	0,9303	747	0,9829
708	0,9316	748	0,9842
709	0,9329	749	0,9855
710	0,9342	750	0,9868
711	0,9355	751	0,9882
712	0,9368	752	0,9895
713	0,9382	753	0,9908
714	0,9395	754	0,9921
715	0,9408	755	0,9934
716	0,9421	756	0,9947
717	0,9434	757	0,9961
718	0,9447	758	0,9974
719	0,9461	759	0,9987
720	0,9474	760	1,0000
721	0,9487	761	1,0013
722	0,9500	762	1,0026
723	0,9513	763	1,0039
724	0,9526	764	1,0053
725	0,9539	765	1,0066
726	0,9553	766	1,0079
727	0,9566	767	1,0092
728	0,9579	768	1,0105
729	0,9592	769	1,0118
730	0,9605	770	1,0132
731	0,9618	771	1,0145
732	0,9632	772	1,0158
733	0,9645	773	1,0171
734	0,9658	774	1,0184
735	0,9671	775	1,0197
736	0,9684	776	1,0211
737	0,9697	777	1,0224
738	0,9711	778	1,0237
739	0,9724	779	1,0250
740	0,9737	780	1,0263

8. Reduktion einer mit Messinggewichten ausgeführten Wägung auf den leeren Raum.

s	k	s	k	s	k
0,7	+ 1,57	2,0	+ 0,458	8	+ 0,007
0,8	1,36	2,5	0,337	9	— 0,009
0,9	1,19	3,0	0,257	10	— 0,023
1,0	1,06	3,5	0,200	11	— 0,034
1,1	0,95	4,0	0,157	12	— 0,043
1,2	0,86	4,5	0,124	13	— 0,050
1,3	0,78	5,0	0,097	14	— 0,057
1,4	0,71	5,5	0,075	15	— 0,063
1,5	0,66	6,0	0,057	16	— 0,068
1,6	0,61	6,5	0,042	17	— 0,072
1,7	0,56	7,0	0,029	18	— 0,076
1,8	0,52	7,5	0,017	19	— 0,080
1,9	0,49	8,0	+ 0,007	20	— 0,083
2,0	+ 0,46			21	— 0,086

$$k = 1{,}20\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{8{,}4}\right).$$

Wiegt ein Körper von der Dichtigkeit s in der Luft m Gramm, so sind mk Milligramm hinzuzufügen, um die Wägung auf den leeren Raum zu reduciren. Vgl. 11 II.

8a. Schwere g und Länge l des Sekundenpendels unter der geogr. Breite φ (19b).

Es ist unter 45° Breite $g_{45} = 980{,}62$ cm/sec².

φ	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
g	978,1	978,2	978,7	979,3	980,2	981,1	981,9	982,6	983,0	983,2 $\frac{cm}{sec^2}$
$\frac{g}{g_{45}}$	0,9974	0,9976	0,9980	0,9987	0,9995	1,0005	1,0013	1,0020	1,0024	1,0026
l	99,10	99,12	99,15	99,23	99,31	99,40	99,49	99,56	99,60	99,62 cm

9. Wärme-Ausdehnungskoefficient für 1° C.

β = linearer, α = kubischer Ausd.-Koefficient.

	β = 0,0000		β = 0,0000	um 15°	α
Aluminium	23	Platin-Iridium	09	Äther	0,00158
Blei	29	Porzellan	10	Alkohol	0,00107
Eisen	12	Quarz parall. z. Axe	072	Amylalkohol	0,00091
Glas s. 7, 5	08	„ senkr. „ „	133	Benzol	0,00121
Gold	15	Quecksilber s. S. 113		Chloroform	0,00123
Hartgummi	80	Silber	19	Glycerin	0,00050
Kupfer	17	Zink	29	Petroleum	0,00094
Messing	19	Zinn	23	Schwef.-Kohlenst.	0,00119
Neusilber	18	Hölzer, längs der Faser	08 bis 09	Terpentin	0,00095
Nickel	13			Toluol	0,00108
Platin	09			Xylol	0,00100

Um 15° ist der Ausd.-Koefficient α einer p-proc. Lösung etwa gleich: Starker Weingeist $0{,}0003 + 0{,}000009 \cdot p$; Zucker $0{,}00016 + 0{,}000004 \cdot p$; Kochsalz, verdünnte Schwefelsäure $0{,}00016 + 0{,}000010 \cdot p$. Vgl. auch Tab. 8a; Forch, Wied. Ann. 55, 119. 1895; Gerlach, Salzlösungen, Freiberg 1859.

10. Wärmeleitvermögen.

Durch einen cm-Würfel von 1° Temperaturdifferenz gegenüberliegender Seiten wandern in 1 sec Gramm-Kalorien:

Blei	0,08	Platin	0,1
Eisen	0,15 bis 0,18	Silber	1,0
Stahl	0,06 „ 0,12	Wismut	0,01
Kupfer, rein	0,92	Zink	0,29
Kupfer, käuflich	0,5 „ 0,9	Zinn	0,15
Messing	0,15 „ 0,30	Glas (vgl 7, 5)	etwa 0,002
Neusilber	etwa 0,08		

10a. Löslichkeit in Wasser

aus der Tabelle von Landolt-Rimbach. In 100 Gewichtsteilen Wasser sind gelöst Gewichtsteile wasserfreien Salzes:

bei der Temp.:	0°	20°	100°
KCl	28	35	57
KJ	128	144	209
$KClO_3$	3	7	56
KNO_3	13	31	250
K_2SO_4	8	11	26
$K_2Cr_2O_7$	5	12	94
K_2CO_3	89	112	156
NH_4Cl	28	37	73
NaCl	35,5	36,0	39,6
$NaNO_3$	73	87	180
Na_2CO_3 kryst.	7	21	45
LiCl „	64	81	130
$BaCl_2$ „	31	36	59
BaO_2H_2 „	1,8	3,5	91
$BaSO_4$ „	0,00017	0,00023	—
$SrCl_2$ „	44	54	102
$CaCl_2$ „	50	74	155
$CaSO_4$ „	0,19	0,21	0,17
$MgSO_4$ „	27	36	74?
$ZnSO_4$ „	43	53	95?
$CdSO_4$ „	41	48	—
$CuSO_4$ „	18	24	75?
$NiSO_4$ „	29	40	—
$AgNO_3$	122	240	900
AgCl	0,00007	0,00017	—
H_3BO_3	2,0	4,0	34
Oxalsäure	5	14	—
Weinsäure	115	140	340
Rohrzucker	179	204	490

10b. Absorption von Gasen in Wasser

bei 1 Atm. Druck (grofsenteils nach Bunsen). 1 Liter gesättigt enthält:

bei d. Temp.:	0°	20°
	g	g
Luft	0,032	0,022
Sauerstoff	0,059	0,041
Stickstoff	0,026	0,018
Wasserstoff	0,002	0,002
Chlor		6,8
Kohlensäure	3,5	1,8
Schwefelwasserstoff	6,6	4,4
Schweflige Säure	228	113
Ammoniak	800	500

11. Reduktion des Barometerstandes auf 0°

wegen der Temperatur des Quecksilbers und des Mafsstabes. (Vgl. **20.**)

Ein bei der Temperatur t abgelesener Barometerstand h wird auf 0° reducirt, indem man $(0{,}000181 - \beta)\,ht$ abzieht. β ist der Ausdehnungskoefficient des Mafsstabes, in der Tabelle für Messing $= 0{,}000019$ angenommen.

Für einen Glas-Mafsstab sind die Zahlen der Tabelle um $0{,}008 \cdot t$ zu vergröfsern. S. die letzte Spalte.

	Abgelesener Stand in mm										
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	$0{,}008t$
t	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1°	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,02
4	0,44	0,45	0,45	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62	0,04
6	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,05
7	0,77	0,78	0,79	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,06
8	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,06
9	0,99	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	0,07
10	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	0,08
11	1,21	1,23	1,25	1,27	1,28	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	0,09
12	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	0,10
13	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	0,10
14	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	0,11
15	1,65	1,68	1,70	1,73	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,87	0,12
16	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	0,13
17	1,87	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,04	2,07	2,09	2,12	0,14
18	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	0,14
19	2,09	2,12	2,15	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	0,15
20	2,20	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,46	2,49	0,16
21	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55	2,59	2,62	0,17
22	2,42	2,46	2,49	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	2,71	2,74	0,18
23	2,53	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,87	0,18
24	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,95	2,99	0,19
25	2,75	2,79	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	0,20
26	2,86	2,91	2,95	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,24	0,21
27	2,97	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,24	3,28	3,32	3,37	0,22
28	3,08	3,13	3,18	3,22	3,27	3,31	3,36	3,40	3,45	3,49	0,22
29	3,19	3,24	3,29	3,34	3,38	3,43	3,48	3,52	3,57	3,62	0,23
30	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,69	3,74	0,24

12. Mittlerer Barometerstand *b* in der Höhe *H* über dem Meeresspiegel.

Unter Annahme der Lufttemperatur 10°. Vgl. 21.

H		b
Meter	Par. Fuſs	mm
0	0	760
100	308	751
200	616	742
300	924	733
400	1231	724
500	1539	716
600	1847	707
700	2155	699
800	2463	690
900	2771	682
1000	3078	674
1100	3386	666
1200	3694	658
1300	4002	650
1400	4310	642
1500	4618	635
1600	4926	627
1700	5233	620
1800	5541	612
1900	5849	605
2000	6157	598

13. Gesättigter Wasserdampf.

Spannkraft *e* in mm Quecksilber und Masse *f* von 1 cbm in Grammen von 0 bis 30° nach Magnus und Regnault. Spannkraft von 31 bis 75° nach Regnault-Broch, von 76 bis 89° nach Wiebe.

t	e	f	t	e	f	t	e
	mm	g/cbm		mm	g/cbm		mm
—10°	2,0	2,2	20°	17,4	17,2	55°	117,5
— 9	2,2	2,3	21	18,5	18,2	56	123,3
— 8	2,3	2,5	22	19,6	19,2	57	129,3
— 7	2,5	2,7	23	20,9	20,4	58	135,6
— 6	2,8	3,0	24	22,2	21,6	59	142,1
— 5	3,0	3,3	25	23,5	22,8	60	148,9
— 4	3,3	3,6	26	25,0	24,2	61	155,9
— 3	3,6	3,9	27	26,5	25,6	62	163,3
— 2	3,9	4,2	28	28,1	27,0	63	170,9
— 1	4,2	4,5	29	29,7	28,5	64	178,8
0	4,6	4,9	30	31,5	30,1	65	187,1
+ 1	4,9	5,2	31	33,4		66	195,7
2	5,3	5,6	32	35,3		67	204,6
3	5,7	6,0	33	37,4		68	213,8
4	6,1	6,4	34	39,5		69	223,4
5	6,5	6,8	35	41,8		70	233,3
6	7,0	7,3	36	44,2		71	243,6
7	7,5	7,8	37	46,6		72	254,3
8	8,0	8,2	38	49,3		73	265,4
9	8,5	8,7	39	52,0		74	276,9
10	9,1	9,3	40	54,9		75	288,8
11	9,8	10,0	41	57,9		76	301,6
12	10,4	10,6	42	61,0		77	314,4
13	11,1	11,2	43	64,3		78	327,6
14	11,9	12,0	44	67,8		79	341,3
15	12,7	12,8	45	71,4		80	355,4
16	13,5	13,5	46	75,1		81	370,0
17	14,4	14,4	47	79,1		82	385,2
18	15,3	15,2	48	83,2		83	400,8
19	16,3	16,2	49	87,5		84	417,0
20	17,4	17,2	50	92,0		85	433,7
			51	96,7		86	451,0
			52	101,6		87	468,8
			53	106,7		88	487,3
			54	112,0		89	506,3

13a. Spannkraft des Wasserdampfes

in mm Quecksilber von 0° zwischen 90° und 100° (Tabelle von Wiebe).

	90°	91°	92°	93°	94°	95°	96°	97°	98°	99°	100°
,0	525,9	546,2	567,1	588,7	611,0	634,0	657,7	682,1	707,3	733,2	760,0
,1	27,9	48,3	69,3	90,9	13,3	36,3	60,1	84,6	09,8	35,9	62,7
,2	29,9	50,3	71,4	93,1	15,5	38,6	62,5	87,1	12,4	38,5	65,4
,3	32,0	52,4	73,5	95,3	17,8	41,0	64,9	89,6	15,0	41,2	68,2
,4	34,0	54,5	75,7	97,6	20,1	43,4	67,3	92,1	17,6	43,8	70,9
,5	36,0	56,6	77,8	599,8	22,4	45,7	69,8	94,6	20,2	46,5	73,7
,6	38,0	58,7	80,0	602,0	24,7	48,1	72,2	97,1	22,8	49,2	76,4
,7	40,1	60,8	82,2	04,2	27,0	50,5	74,7	699,6	25,4	51,9	79,2
,8	42,1	62,9	84,4	06,5	29,3	52,9	77,1	702,2	28,0	54,6	82,0
,9	544,2	565,0	586,5	608,7	631,6	655,3	679,6	704,7	730,6	757,3	784,8

13b. Siedetemperatur des Wassers *t*

bei dem Barometerstand *b* (Tabelle von Wiebe, Braunschweig 1894).

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0
680	96,92	700	97,71	720	98,49	740	99,25	760	100,00	780	100,73
81	96,96	01	,75	21	,53	41	,29	61	,04	81	,76
82	97,00	02	,79	22	,57	42	,33	62	,07	82	,80
83	,04	03	,83	23	,61	43	,37	63	,11	83	,84
84	,08	04	,87	24	,65	44	,41	64	,15	84	,87
85	,12	05	,91	25	,69	45	,44	65	,18	85	,91
86	,16	06	,95	26	,72	46	,48	66	,22	86	,94
87	,20	07	97,99	27	,76	47	,52	67	,26	87	100,98
88	,24	08	98,03	28	,80	48	,55	68	,29	88	101,01
89	,28	09	,07	29	,84	49	,59	69	,33	89	,05
690	,32	710	,11	730	,88	750	,63	770	,37	790	,09
91	,36	11	,14	31	,91	51	,67	71	,40	91	,12
92	,40	12	,18	32	,95	52	,70	72	,44	92	,16
93	,44	13	,22	33	98,99	53	,74	73	,47	93	,19
94	,48	14	,26	34	99,03	54	,78	74	,51	94	,23
95	,52	15	,30	35	,07	55	,81	75	,55	95	,26
96	,56	16	,34	36	,10	56	,85	76	,58	96	,30
97	,60	17	,38	37	,14	57	,89	77	,62	97	,33
98	,64	18	,42	38	,18	58	,93	78	,66	98	,37
699	,67	19	,45	39	,22	59	,96	79	,69	799	,41
700	97,71	720	98,49	740	99,25	760	100,00	780	100,73	800	101,44

14. Sättigungsdruck einiger Gase und Dämpfe

in Atmosphären oder mm Quecksilber (Hertz, Ramsay, Young u. Regnault)

und kritische Daten.

	CO_2	NH_3	SO_2	Äthyl-Äther	Schwefl.-Kohlenst.	Chloroform	Methyl-Alkoh.	Äthyl-Alkoh.	Benzol	Wasser	Quecksilber
	Atm.	Atm.	Atm.	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
— 80°	1,0										
— 60	3,9										
— 40	10,2										
— 20	19,1	1,8	0,6	66	47		6,3	3,3	6	1,02	
0°	35,5	4,2	1,5	185	128		28	12,5	26	4,56	
+ 20	58	8,4	3,3	440	298	160	91	44,1	75	17,4	0,001
+ 40	(90)	15,3	6,2	910	618	369	250	133,6	182	54,9	0,01
60		26	10,9	1730	1160	755	600	351	389	148,9	0,03
80		41	18,1	3000	2030	1408	1240	812	753	355,4	0,09
100		61	28	4900	3320	2430	2400	1690	1342	760	0,28
120			42	7600	5150	3930	4300	3220	2240	1490	0,75
140				11100	7600	6000	7300	5670	3520	2720	1,8
160				15800		8700		9400	5280	4650	4,2
180				21800				14800	7620	7550	8,9
200								22200	10660	11700	17,6
220								32100	14530	17400	33,4
240								45500	19400		57
260									25400		97
280									32800		156
300											244
320											371
340											548
360											791
Siedepunkt	—79°	—35	—10	34,9	46,0	61,2	66	78,3	80	100	358°
Krit.: Temp.	32°	130	157	192	275	260		240	291	365°	
Druck	75 At.	114	80	37	76	55		64	52	196 At.	
Dichte	0,5		0,50	0,25				0,29	0,35	0,43	

15. Kapillardepression des Quecksilbers.

Interpolirt nach Mendeléeff und Gutkowsky.

Durchmesser	Höhe des Meniscus in mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

16. Specifische Wärme.

Zwischen 15 und 100°	
Aluminium ...	0,22
Antimon......	0,050
Blei..........	0.082
Cadmium.....	0,056
Eisen	0,113
Glas (s. 7, 5)	(0,19)
Gold	0,032
Kalkspat	0,206
Kobalt	0,107
Kupfer	0,093
Magnesium ...	0,25
Messing	0,093
Neusilber.....	0,095
Nickel	0,11
Platin........	0,032
Quarz	0,190
Silber	0,056
Steinsalz	0,214
Wismut	0,030
Zink	0,094
Zinn	0,055
Quecksilber:	
bei 15°....	0,0332
„ 50°....	0,0330
„ 100°....	0,0326
„ 150°....	0,0320
Bei 17°:	
Alkohol	0,58
Anilin	0,49
Schwefelkohlst.	0,24
Terpentinöl...	0,43
Toluol	0,40
Wasser s. S. 138	

16a. Schmelzpunkt t_0, Siedepunkt t_1. Ihre Erniedrigung $-\Delta t_0$ bez. Erhöhung $+\Delta t_1$

durch Auflösung von 1 Gramm-Molekül in 1000 g des Lösungsmittels.
(Δt_1 grofsenteils nach Beckmann.)

Schmelzwärme $\varkappa$; Verdampfungswärme λ

bei dem atmosphärischen Siedepunkt.

	t_0	$-\Delta t_0$	$\varkappa$	t_1	$+\Delta t_1$	λ
	°	°	Calor.	°	°	Calor.
Äther	−118			34,9	2,1	90
Äthylacetat...				77	2,7	90
Äthylbenzoat .				213		
Äthylbromid ..				38	2,8	60
Äthyljodid....				73	5,2	47
Alkohol	−110?			78,3	1,16	210
Ameisensäure .	+ 8,6	2,8	57	101		112
Amylacetat ...				140		
Amylbenzoat..				260		
Amylalkohol ..				130	3,2	121
Anilin........	− 8			184	2,4	93
Benzol	+ 5,3	5,1	30	80,2	2,7	94
Chloroform ...	− 70			61,2	3,6	58
Essigsäure....	16,5	3,8	46	118		97
Kohlensäure ..	− 57			−79		
Methylacetat .				57	2,1	97
Methylalkohol.				66		266
Methylbenzoat				199		
Methyljodid...				43	4,3	
Naphthalin ...	79		36	218		
Nitrobenzol ...	3	7,1	22	210		
Phenol	40		25	183	3,0	
Schwefelkohlst.	−113			46,0	2,4	90
Stearinsäure ..	69,5			370		
Toluol	−102			110		85
Wasser	0	1,83	79,9	100	0,52	536
Xylol	15		39	140		
Aluminium ...	625					
Blei..........	328		6			
Gold	1070					
Kupfer	1080					
Nickel........	1480					
Palladium	1500					
Platin........	1780		27			
Quecksilber ...	− 39,5		2,8	357		62
Schwefel......	114		9	447		362
Silber	970		21			
Zink	420		28	940		
Zinn	232		13			
Rose's Metall..	95					
Wood's Metall.	68					
KNO_3	339		49			
$NaNO_3$	310		65			
KNO_3+NaNO_3	225					

	t_0
KCl	770
NaCl	790
K_2SO_4	1060
Na_2SO_4	870

17. Elasticitätsmodul E in kg-Gew./mm², Schallgeschwindigkeit u in m/sec und Tragfähigkeit p in kg-Gew./mm² von Metallen im ausgezogenen Zustande.

Nur als Annäherungen zu benutzen.

	E	Dicht.	u	p
Aluminium	6500	2,6	5000	
Blei	1700	11,3	1300	2
Cadmium .	7000	8,6	2800	
Eisen	19000	7,6	5000	25 bis 60
Stahl	21000	7,8	5100	70
Glas (s 7,5)	6500	2,5	5000	
Gold	8000	19,3	2100	25
Holzfaser .	500 bis 1200		3000 bis 4000	1,5 bis 5
Kupfer....	12000	8,7	3700	40
Magnesium	4000	1,7	4800	
Messing ..	9000	8,3	3200	60
Neusilber .	12000	8,5	3700	
Nickel ...	20000	8,9	4700	
Platin	17000	21,5	2800	30
Silber	7800	10,5	2700	29
Zink	9000	7,1	3600	13
Zinn	4500	7,3	2500	2

17a. Zusammendrückbarkeit ζ durch 1 Atm. und innerer Reibungskoefficient $[\eta]$ in [C-G-S]-Einheiten

bei 18° und Änderung dieser Gröfsen auf 1° Temperaturzunahme um 18°.

	ζ	$10^6 \frac{d\zeta}{dt}$	$[\eta]$	$10^4 \frac{d\eta}{dt}$
Äther	0,000186	+2	0,0026	—0,25
Alkohol	0,000110	+0,7	0,0130	—2,5
Amylalkoh...	0,000091	+0,6	0,05	—10
Benzol	0,000090	+0,8	0,0066	—1,1
Methylalkoh.	0,000120	+0,9	0,0064	—0,9
Quecksilber .	0,0000039		0,0159	—0,5
Schwefelkohl.	0,000089	+0,7	0,0038	—0,25
Wasser	0,000046	—0,2	0,0106	—2,7

18. Tonhöhe und Schwingungszahl in 1 Sekunde.

(Für gleichschwebende Stimmung: $a_1 = 435$. Vgl. 37a.)

	C_{-2}	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
C	16,17	32,33	64,66	129,3	258,7	517,3	1035	2069
Cis	17,13	34,25	68,51	137,0	274,0	548,1	1096	2192
D	18,15	36,29	72,58	145,2	290,3	580,7	1161	2323
Dis	19,22	38,45	76,90	153,8	307,6	615,2	1230	2461
E	20,37	40,74	81,47	162,9	325,9	651,8	1304	2607
F	21,58	43,16	86,31	172,6	345,3	690,5	1381	2762
Fis	22,86	45,72	91,45	182,9	365,8	731,6	1463	2926
G	24,22	48,44	96,89	193,8	387,5	775,1	1550	3100
Gis	25,66	51,32	102,65	205,3	410,6	821,2	1642	3285
A	27,19	54,37	108,75	217,5	**435,0**	870,0	1740	3480
Ais	28,80	57,61	115,22	230,4	460,9	921,7	1843	3687
H	30,52	61,03	122,07	244,1	488,3	976,5	1953	3906

19. Spektrallinien der wichtigsten leichten Metalle im Flammenspektrum.

Skale von Bunsen-Kirchhoff; Natriumlinie auf 50; Spaltbreite = 1 Sk.-T.

Die obere Zahl bedeutet die Mittellage, die untere die ungefähre Breite des Streifens. Wo nichts angegeben, beträgt die Breite etwa 1 Skalenteil.

Die römische Ziffer bezeichnet die Helligkeit; für Ca, Sr, Ba bei dauerndem Spektrum. Als Chloride geben diese Körper Anfangs hellere Linien.

S bedeutet ganz scharf begrenzt, *s* mäſsig scharf. Die übrigen Linien erscheinen mehr oder weniger verwaschen.

Die für die Analyse wichtigsten Linien sind fett gedruckt.

Die Lage der Fraunhofer'sehen Linien s. Tab. 19a.

Die Farbe des Spektrums ist (ungefähr): Rot bis 48, Gelb bis 52, Grün bis 80, Blau bis 120, Violett von 120 an.

K	**17,5** II *S*	Schwaches Spektrum von 55 bis 120.									**153,0** IV *S*
Li	**32,0** I *S*	45,2 IV *s*									
Ca	33,1 IV 2	36,7 IV	**41,7** I 1,5	46,8 III 2	49,0 III	52,8 IV	54,9 IV	**60,8** I 1,5	68,0 IV 2		**185,0** IV *S*
Sr	29,8 III	**32,1** II	**33,8** II	36,3 II	39,0 III	41,8 III	**45,8** I				**105,0** III *S*
Ba	35,2 IV 2	41,5 III 3	45,6 III 1,5	52,1 IV	56,0 III 2	**60,8** II *s*	66,5 III 3	**71,4** III 3	**76,8** III 2	82,7 IV 4	**89,8** III 2

19a. Wellenlänge λ in der Luft in Milliontel mm

für Linien des Sonnenspektrums und Linien chemischer Elemente im Flammen- oder Funken- oder Bogenlicht-Spektrum, nebst ihrer Lage *p* auf der Bunsen-Kirchhoff'schen Skale.

Größtenteils nach Kayser und Runge, Rowland, Cornu.

		λ	*p*			λ	*p*	Ultraviolett	λ		λ
Y		899,0	Ultrarot	b_1	Mg	518,4	74	*L* Fe	382,1	Cd 17	276,4
X_3		866,3		b_2	Mg	517,3	75	*M* Fe	372,7	Cd 18	257,3
X_1		849,8		b_3	Mg, Fe	516,9	75	Cd 9	361,1	Cd 22	232,9
Z		822,8			Cd 4	508,6	79	*N* Fe	358,1	Cd 23	231,3
	K α	768,0	17,5	*F*	H β	486,1	90	Cd 10	346,6	Cd 24	226,8
A		759,4	18,5		Cd 5	480,0	93	*O* Fe	344,1	Cd 25	219,5
a	O	718,6	24		Cd 6	467,8	101	Cd 11	340,4	Cd 26	214,4
B	O	686,7	28,2		Sr δ	460,8	105	*P* Fe	336,1	Zn 27	209,9
	Li α	670,8	32,0		Cd 7	441,3	120	Cd 12	328,8	Zn	207,4
C	H α	656,3	29		Hg	435,8	124	*Q* Fe	328,7	Zn 28	206,1
	Hg	615,2	44	*G'*	H γ	434,0	125	*R* Ca	318,0	Zn 29	202,5
D_1	Na	589,62	50,0	*G*	Fe, Ca	430,8	128	*r* Fe	314,5	Al 30	198,8
D_2	Na	589,02		*h*	H δ	410,2	147	*S* „	310,0	Al 31	193,4
	Hg	579,0	52,8		Hg	407,8	150	*s* „	304,8	Al	192,9
	Hg	576,9	53,5		K β	404,6	153	*T* „	302,1	Al 32	186,1
	Hg	546,0	63		Cd 8	398,2	160	*t* „	299,5		
	Tl	535,1	67,5	*H*	Ca	396,9	162	*U* „	294,8		
E	Fe, Ca	527,0	71,3	*K*	Ca	393,4	166				

20. Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper und Drehungsvermögen des Quarzes bei 1 mm Dicke.

Das Brechungsverhältnis nimmt auf + 1° ab: in mittlerer Temperatur für Schwefelkohlenstoff um 0,0008 für D, um 0,0009 für H; für Alkohol um 0,0004; für Wasser bei 5° um 0,00002, bei 10° um 0,00005, bei 15° um 0,00007, bei 20° um 0,00009, bei 25° um 0,00010.

Bei den zweiaxigen Krystallen gelten die Zahlen, wenn nicht anderes bemerkt ist, für den mittleren Strahl.

Wellenlänge $\lambda \cdot 10^6 =$ mm	A 759,4	B 686,7	C 656,3	D 589,3	E 527,0	F 486,1	G 430,8	H 396,9
Wasser ... 18°	1,3293	,3308	,3317	,3334	,3356	,3377	,3411	,3440
Alkohol... 15,0°	,3598	,3611	,3618	,3635	,3658	,3679	,3716	,3748
Schwefelkohlenstoff 16,0°	,6118	,6181	,6214	,6308	,6438	,6555	,6800	,7032
Cassiaöl .. 17°	,586	,592	,596	,605	,619	,634	,665	,701
Kronglas leicht	1,5100	,5118	,5127	,5153	,5186	,5214	,5267	,5312
Kronglas schwer	,6097	,6117	,6126	,6152	,6185	,6213	,6265	,6308
Flintglas leicht	,5986	,6020	,6038	,6085	,6145	,6200	,6308	,6404
Flintglas schwer	,7350	,7405	,7434	,7515	,7623	,7723	,7922	,811
Kalkspat.. ord.	1,6500	,6530	,6545	,6585	,6635	,6679	,6762	,6833
Kalkspat.. extr.	,4827	,4840	,4847	,4864	,4888	,4908	,4946	,4978
Quarz .... ord.	,5390	,5409	,5418	,5442	,5471	,5497	,5543	,5582
Quarz .... extr.	,5481	,5500	,5509	,5533	,5563	,5589	,5637	,5677
Gyps ..... mitt.	1,517	,519	,520	,523	,525	,528	,532	
Arragonit.. mitt.	,672	,676	,678	,682	,686	,691	,698	,705
Topas(sibir.) mitt.	,608	,610	,611	,614	,617	,619	,624	,627
Steinsalz	,5367	,5392	,5405	,5442	,5490	,5532	,5613	,5688
Flufsspat	,4310	,4320	,4325	,4339	,4355	,4371	,4398	,4420
Drehung in Quarz bei 20°	12,7°	15,7°	17,3°	21,72°	27,5°	32,8°	42,6°	51,2°

Äther 1,36
Arsenbromür 1,78
Benzol................. 1,503
Beryll 1,57
Canadabalsam 1,54
Chloroform............ 1,45
Eis.................... 1,31
Feldspat 1,52
Flintglas, schwerstes 1,9
Methylenjodid 1,74
Bromnaphthalin.......... 1,66
Phosphor in CS_2......... 1,97
Rüböl.................. 1,47
Salpeter................ 1,50
Sylvin 1,49
Terpentinöl 1,48
Turmalin 1,64
Zucker 1,56

Luft 0° $1{,}0002879 + 0{,}0_6132/\lambda^2 + 0{,}0_7 32/\lambda^4$. Kayser und Runge, Wied. Ann. 50, 312. (λ in 1000tel mm.)

Die drei Hauptbrechungsverhältnisse des Natronlichtes betragen für

Gyps	1,529	1,523	1,520
Ostindischen Glimmer..	1,599	1,594	1,561
Arragonit	1,686	1,682	1,530
Baryt................	1,648	1,637	1,636

20a. Farben Newton'scher Ringe,

welche im reflektirten und durchgehenden weifsen Lichte für senkrecht auffallende Strahlen eine Luftschicht von der Dicke *d* zeigt.

(Quincke, Pogg. Ann. 129, 180. 1866.)

d	Reflektirt	Durchgehend
$\frac{mm}{10^6}$	**1. Ordnung.**	
0	Schwarz	Weifs
20	Eisengrau	Weifs
48	Lavendelgrau	Gelblich Weifs
79	Graublau	Bräunl. Weifs
109	Klareres Grau	Gelbbraun
117	Grünl. Weifs	Braun
129	Fast Weifs	Klares Rot
133	Gelblich Weifs	Karminrot
137	Blafs Strohgelb	Dunkel Rotbraun
140	Strohgelb	Dunkel Violett
153	Klares Gelb	Indigo
166	Lebhaft. Gelb	Blau
215	Braungelb	Graublau
252	Rötlich Orange	Bläulich Grün
268	Warmes Rot	Blafs Grün
275	Tieferes Rot	Gelblich Grün
	2. Ordnung.	
282	Purpur	Helleres Grün
287	Violett	Grünlich Gelb
294	Indigo	Goldgelb
332	Himmelblau	Orange
364	Grünlich Blau	Bräunl. Orange
374	Grün	Hell Karminrot
413	Helleres Grün	Purpur
421	Gelblich Grün	Violett-Purpur
433	Grünlich Gelb	Violett
455	Reines Gelb	Indigo
474	Orange	Dunkel Blau
499	Lebhaft rötlich Orange	Grünlich Blau
550	Dunkel Violettrot	Grün
$\frac{mm}{10^6}$	**3. Ordnung.**	
564	Hell bläulich Violett	Gelblich Grün
575	Indigo	Unrein Gelb
629	Blau (grünl.)	Fleischfarben
667	Meergrün	Braunrot
688	Glänzend Grün	Violett
713	Grünlich Gelb	Graublau
747	Fleischfarbe	Meergrün
767	Karminrot	Schön Grün
810	Matt Purpur	Matt Meergrün
826	Violett Grau	Gelblich Grün
	4. Ordnung.	
841	Graublau	Grünlich Gelb
855	Matt Meergrün	Gelbgrau
872	Bläulich Grün	Malv. Graurot
905	Schön Hellgrün	Karminrot
963	Hell Graugrün	Graurot
1003	Grau, fast Weifs	Graublau
1024	Fleischrot	Grün
	5. Ordnung.	
1169	Matt Blaugrün	Matt Fleischrot
1334	Matt Fleischrot	Matt Blaugrün

21. Zur Reduktion einer Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen.

Wenn die Schwingungsdauer eines Magnets oder eines Pendels $= t$ beobachtet wurde bei einem ganzen Schwingungsbogen von α Graden, so ist, um die Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen zu reduciren, von dem beobachteten Werte abzuziehen $k \cdot t$ (52)

α	k		α	k		α	k		α	k	
0°	0,00000	0	10°	0,00048	10	20°	0,00190	20	30°	0,00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	35
7	023	7	17	138	16	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	37
9	039	9	19	172	18	29	400	28	39	723	38
10	0,00048		20	0,00190		30	0,00428		40	0,00761	

21a. Reduktion des an einer Skale beobachteten Ausschlages e,

wenn der Abstand vom Spiegel A Skalenteile beträgt (49).

Durch Subtraktion der Zahlen wird der beobachtete Skalenausschlag e dem Ablenkungswinkel proportional. Die Korrektionen auf die Tangente betragen $^{3}/_{4}$, auf den Sinus $^{9}/_{8}$ der Zahlen.

A	$e = 50$	100	150	200	250	300	350	400	450	500
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02	8,54	13,33	19,5	27,1	36,3
1200	0,03	0,23	0,77	1,82	3,53	6,03	9,45	13,9	19,5	26,2
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61	4,47	7,03	10,4	14,6	19,7
1600	0,02	0,13	0,44	1,03	2,00	3,44	5,43	8,0	11,3	15,4
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59	2,73	4,30	6,4	9,0	12,3
2000	0,01	0,08	0,28	0,66	1,29	2,22	3,51	5,21	7,37	10,05
2200	0,01	0,07	0,23	0,55	1,07	1,83	2,91	4,32	6,12	8,35
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90	1,54	2,45	3,64	5,16	7,05
2600	0,01	0,05	0,16	0,39	0,77	1,32	2,09	3,11	4,42	6,03
2800	0,01	0,04	0,14	0,34	0,66	1,14	1,81	2,69	3,82	5,21
3000	0,00	0,04	0,12	0,29	0,58	0,99	1,58	2,35	3,33	4,55
3200	0,00	0,03	0,11	0,26	0,51	0,87	1,38	2,07	2,93	4,01
3400	0,00	0,03	0,10	0,23	0,45	0,77	1,23	1,83	2,60	3,56
3600	0,00	0,03	0,09	0,21	0,40	0,69	1,10	1,64	2,32	3,18
3800	0,00	0,02	0,08	0,18	0,36	0,62	0,98	1,47	2,09	2,86
4000	0,00	0,02	0,07	0,17	0,32	0,56	0,89	1,33	1,88	2,58

21b. Zur Rechnung an gedämpften Schwingungen. (Vgl. 51 u. 78.)

T und α_1 = Schwingungsdauer u. Ausschlag bei dem Dämpfungsverhältnis k,
τ und α = entsprechende Schwingungsdauer u. Ausschlag ohne Dämpfung.

$$T/\tau = \sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2}; \qquad \alpha/\alpha_1 = k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}.$$

$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lgnat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\Lambda}}$	$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lgnat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\Lambda}}$
0.00	0.0000	1,000	1,0000	1,0000	0.44	1.0131	2,754	1,0507	1,5008
.01	.0230	1,023	,0000	,0115	.46	.0592	2,884	,0553	,5219
.02	.0461	1,047	,0001	,0231	.48	.1052	3,020	,0601	,5428
.03	.0691	1,072	,0002	,0347	.50	.1513	3,162	,0650	,5635
.04	.0921	1,096	,0004	,0463	.52	.1973	3,311	,0702	,5839
.05	.1151	1,122	,0007	,0578	.54	.2434	3,467	,0755	,6041
.06	.1382	1,148	,0010	,0694	.56	.2894	3,631	,0810	,6240
.07	.1612	1,175	,0013	,0811	.58	.3355	3,802	,0866	,6437
.08	.1842	1,202	,0017	,0927	.60	.3816	3,981	,0924	,6630
.09	.2072	1,230	,0022	,1044	.62	.4276	4,169	,0984	,6820
.10	.2303	1,259	,0027	,1160	.64	.4737	4,365	,1046	,7008
.11	.2533	1,288	,0032	,1277	.66	.5197	4,571	,1109	,7193
.12	.2763	1,318	,0039	,1393	.68	.5658	4,786	,1173	,7375
.13	.2993	1,349	,0045	,1510	.70	.6118	5,012	,1239	,7554
.14	.3224	1,380	,0052	,1626	.72	.6579	5,248	,1307	,7730
.15	.3454	1,413	,0060	,1743	.74	.7039	5,495	,1376	,7904
.16	.3684	1,445	,0069	,1859	.76	.7500	5,754	,1447	,8074
.17	.3914	1,479	,0077	,1975	.78	.7960	6,026	,1519	,8241
.18	.4145	1,514	,0087	,2091	.80	.8421	6,310	,1592	,8406
.19	.4375	1,549	,0097	,2208	.82	.8881	6,607	,1667	,8567
.20	.4605	1,585	,0107	,2324	.84	.9342	6,918	,1743	,8726
.21	.4835	1,622	,0118	,2440	.86	1.9802	7,244	,1821	,8882
.22	.5066	1,660	,0130	,2555	.88	2.0263	7,586	,1900	,9035
.23	.5296	1,698	,0142	,2670	.90	.0723	7,943	,1980	,9185
.24	.5526	1,738	,0155	,2785	.92	.1184	8,318	,2061	,9332
.25	.5756	1,778	,0167	,2900	.94	.1644	8,710	,2144	,9476
.26	.5987	1,820	,0180	,3014	.96	.2105	9,120	,2228	,9617
.27	.6217	1,862	,0194	,3128	.98	.2565	9,550	,2312	,9756
.28	.6447	1,905	,0208	,3242	1.00	2.3026	10,00	1,2396	1,9892
.29	.6677	1,950	,0223	,3356					
.30	.6908	1,995	,0239	,3469					
.31	.7138	2,042	,0255	,3582					
.32	.7368	2,089	,0271	,3694					
.33	.7599	2,138	,0288	,3806					
.34	.7829	2,188	,0306	,3918					
.35	.8059	2,239	,0324	,4029					
.36	.8289	2,291	,0342	,4140					
.37	.8520	2,344	,0361	,4250					
.38	.8750	2,399	,0381	,4360					
.39	.8980	2,455	,0401	,4469					
.40	.9210	2,512	,0421	,4578					
.41	.9441	2,570	,0442	,4686					
.42	.9671	2,630	,0463	,4794					
.43	0.9901	2,692	,0485	,4901					
.44	1.0131	2,754	1,0507	1,5008					

Erdmagnetismus im mittleren Europa für 1897,0.

Nach einer neuen Aufstellung der Seewarte.

Mittlere jährliche Änderung: Horizontal-Intensität im Mittel für das Gebiet + 0,00015 [C-G-S]; Deklination — 0,1° und Inklination — 0,8′ für die Mitte des Gebietes.

22. Horizontal-Intensität in [C-G-S]-Einheiten.

Nördl. Breite	Länge östlich von Greenwich 2°	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
45°	0,213	0,214	0,216	0,217	0,218	0,219	0,220	0,222	0,223	0,225	0,226
46	208	210	211	212	214	215	216	217	219	220	222
47	204	206	207	208	209	210	211	213	215	216	217
48	200	201	202	203	204	206	207	208	210	212	213
49	195	197	198	199	200	201	203	204	206	207	209
50°	191	193	194	195	196	198	199	200	202	203	205
51	187	188	190	191	192	194	195	196	197	199	200
52	183	184	185	186	188	189	190	192	193	194	196
53	178	180	181	183	184	185	186	187	188	190	191
54	174	176	178	179	180	180	182	183	184	185	187
55	170	172	173	174	176	176	177	178	179	180	182

23. Westliche Deklination.

Nördl. Breite	Länge östlich von Greenwich 5°	6	7	8	9	10	11	12	13
45°	13,3°	12,9	12,6	12,1	11,7	11,3	10,9	10,5	10,1
50	14,0	13,5	13,0	12,6	12,1	11,6	11,2	10,7	10,2
55	14,6	14,1	13,6	13,1	12,6	12,0	11,4	10,8	10,3
	14°	15	16	17	18	19	20	21	22
45°	9,7°	9,4	9,0	8,5	8,0	7,6	7,2	6,7	6,2
50	9,7	9,2	8,7	8,2	7,7	7,1	6,6	6,1	5,6
55	9,7	9,1	8,5	7,9	7,3	6,7	6,1	5,5	5,0

24. Inklination.

Nördl. Breite	Länge östlich von Greenwich 5°	10°	15°	20°
45°	61,8°	61,1°	60,6°	60,1°
46	2,6	2,0	1,4	1,0
47	3,4	2,8	2,3	1,8
48	4,2	3,7	3,1	2,6
49	5,0	4,4	3,9	3,4
50°	5,8	5,2	4,6	4,2
51	6,6	6,0	5,4	4,9
52	7,2	6,7	6,2	5,8
53	7,8	7,3	6.9	6,6
54	8,4	8,0	7,6	7,3
55	9,0	8,6	8,3	8,0

24a. Magnetisirungs-Koefficienten $\varkappa$ einiger Eisensorten.

Für die magnetisirende Intensität $\mathfrak{H}$. (Vgl. 81 c.)

Nach Beobachtungen der Physik.-Techn. Reichsanstalt.

$\mathfrak{H}$	Schwed. Schmiedeeisen	Schwed. Eisen	Weicher Stahlguſs	Siemens-Martin Stahlguſs	Stahlguſs	Schmiedeeisen	Stahlguſs
	$\varkappa$ =						
1	294	136	91	67	46	26	26
1,5	315	236	159	119	70	41	27
2	292	276	197	157	92	60	29
2,5	256	266	202	170	105	81	33
3	235	245	196	172	112	96	40
3,5	216	228	188	168	115	106	48
4	200	215	181	161	116	112	57
5	174	186	166	147	112	114	73
6	155	162	151	134	106	109	78
7	140	144	136	123	101	103	78
8	128	130	122	114	96	98	77
9	117	118	112	105	91	93	75
10	108	109	103	98	86	89	72
	$\varkappa \cdot \mathfrak{H}$ =						
10	1080	1085	1027	984	853	893	715
15	1150	1133	1117	1087	1010	1018	884
20	1191	1165	1165	1143	1090	1088	978
30	1234	1205	1219	1210	1176	1163	1087
50	1292	1253	1282	1277	1260	1240	1198
100	1374	1332	1375	1374	1361	1334	1328
150	1435	1387	1435	1434	1420	1400	1400
Koerc.-kraft =	0,8	1,2	1,6	1,8	2,5	2,9	4,4

24b. Dielektricitäts-Konstanten.

Die Angaben für feste Körper stimmen teilweise wenig überein.

Äther	4	Paraffin	1,7 bis 2,3
Alkohol	26	Petroleum	2,0 bis 2,4
Amylalkohol	16	Porzellan	4,4
Anilin	7,5	Quarz	4,5
Benzol	2,3	Ricinusöl	4,7
Chloroform	5	Schellack	2,8 bis 3,7
Glas gewöhnl.	4 bis 7	Schwefel	2 bis 4
Optische Gläser	bis 10	Schwefelkohlenstoff	2,4
Glimmer	4 bis 8	Terpentinöl	2,2
Guttapercha	2,5	Toluol	2,3
Hartkautschuk	2 bis 3	Wasser	80
Kautschuk	2,2 bis 2,7	Xylol	2,3
Kalkspat	8 bis 8,5	Luft, bezogen auf leeren Raum	1,0006

25. Elektricitätsleitung einiger Metalle.

Die meisten Zahlen sind nur Annäherungen.

Der Widerstand steigt in mittlerer Temperatur auf 1° Zunahme
bei dem Quecksilber (s. S. 331) um 0,00088 des Ganzen,
bei den reinen, festen Metallen um etwa 0,004 des Ganzen; Eisen und Nickel 0,005.

Bei Neusilbersorten liegt der Temperaturkoefficient zwischen + 0,0006 und 0,00023 letzteres für „Nickelin".

Der Widerstand des „Manganins" (84 Cu, 4 Ni, 12 Mn) hat um 20 bis 40° ein Maximum und ist demzufolge in mittlerer Temperatur von der letzteren wenig abhängig. (Feufsner und Lindeck). „Konstantan" (60 Cu und 40 Ni) hat den Temperaturkoefficient — 0,00003 bis + 0,00005; 25% Nickel-Kupfer („Patentnickel") + 0,0002; 20% Platin-Silber + 0,00033.

Bei der Kohle nimmt der Widerstand mit der Temperatur ab. Der Temperaturkoefficient liegt zwischen — 0,0002 und — 0,0008.

Der Widerstand eines Drahtes von l m Länge und q qmm Querschnitt berechnet sich $= \sigma \cdot l/q$ Ohm oder $= s \cdot l/q$ Siem. E. Es ist $s = 1{,}06 \cdot \sigma$ und $k = 1/s$. — Der Widerstand eines cm-Würfels beträgt $100 \cdot \sigma$ Mikrohm $= \sigma/10000$ Ohm $= \sigma \cdot 10^5$ cm/sec.

Die Zahlen gelten im allgemeinen für reine weiche Metalle. Härte und besonders Verunreinigungen drücken das Leitvermögen herab.

Bei 18°	Specifischer Widerstand. Ein m/mm²-Draht hat den Widerstand in Ohm	in Siem. E	Leitvermögen, bezogen auf Quecksilber von 0°
Silber	$\sigma = 0{,}016$	$s = 0{,}017$	$k = 59$
Kupfer	0,0172	0,0182	55
Gold	0,023	0,024	41
Zink	0,063	0,067	15
Eisen	0,09 bis 0,15	0,10 bis 0,16	6 bis 10
Stahl	0,15 bis 0,5	0,16 bis 0,53	2 bis 6
Platin	0,14	0,15	6,5
Blei	0,21	0,22	4,6
Antimon	0,45	0,48	2,1
Quecksilber	0,958	1,016	0,984
Wismut	1,2	1,2	0,8
Gaskohle ..... etwa	50	50	0,02
Messing	0,07 bis 0,09	0,07 bis 0,10	10 bis 14
20% Platin-Silber	0,20	0,21	4,8
Neusilber	0,16 bis 0,40	0,17 bis 0,42	2,4 bis 6
Nickelin	0,42	0,44	2,3
Konstantan	0,50	0,53	1,9
Manganin	0,43	0,46	2,2
30% Mangan-Kupfer	1,08	1,14	0,9
Patentnickel	0,33	0,35	2,9

26. Elektrisches Leitvermögen wässriger Lösungen bei 18°.

Die Procente bedeuten Gewichtsteile des gelösten Körpers in 100 Gewichtsteilen der Lösung. Die Salze sind wasserfrei gerechnet.

k ist das auf Quecksilber von 0° bezogene Leitvermögen bei 18°; $1{,}063 \cdot k$ gibt das Leitvermögen auf Ohm bezogen.

Δk bedeutet die Zunahme von k auf 1° in Procenten von k_{18}.

Lösung	KCl		NH_4Cl		NaCl		K_2SO_4		Na_2SO_4		$MgSO_4$		$CuSO_4$	
	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk
5%	64	2,0	86	2,0	63	2,2	43	2,2	38	2,4	24	2,3	18	2,2
10	127	1,9	166	1,9	113	2,1	81	2,0	64	2,5	39	2,4	30	2,2
15	189	1,8	242	1,7	153	2,1			83	2,6	45	2,5	39	2,3
20	250	1,7	315	1,6	183	2,2					45	2,7		
25			376	1,5	200	2,3					39	2,9		

Lösung	$ZnSO_4$		KJ		$AgNO_3$		KOH		HCl		H_2SO_4		HNO_3	
	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk	10^7k	Δk
5%	18	2,3	32	2,1	24	2,2	161	1,9	369	1,59	195	1,21	241	1,50
10	30	2,3	64	2,0	44	2,2	295	1,9	590	1,57	366	1,28	431	1,45
15	39	2,3	98	1,9	64	2,2	399	1,9	698	1,56	508	1,36	573	1,40
20	43	2,4	136	1,8	81	2,1	468	2,0	713	1,55	611	1,45	665	1,38
25	44	2,6	175	1,8	99	2,1	506	2,1	677	1,54	671	1,54	720	1,38
30	41	3,0	215	1,7	116	2,1	508	2,3	620	1,53	691	1,62	734	1,39
35	33	4,0	257	1,6	131	2,1	477	2,4	553	1,52	678	1,70	719	1,43
40			296	1,5	146	2,1	422	2,7	483		636	1,78	686	1,49
50			367	1,4	173	2,1					505	1,93	590	1,6
60			416	1,4	196	2,1					349	2,13	480	1,6
70											202	2,56	370	1,5
80											103	3,49	250	1,3
Max.=	44,2						510		717		692		734	
bei	23,5%						28%		18,3%		30,4%		29,7%	

27. Elektrochemische Äquivalente.

Der Strom 1 Ampere = 0,1 [C-G-S] = 10 [Mm-Mg-S] zersetzt oder scheidet aus

	mg Silber	mg Kupfer	mg-Äquivalente	mg Wasser	ccm Knallgas v. 0° u. 760 mm
in 1 sec	1,118	0,3284	0,01036	0,0933	0,1740
in 1 min	67,08	19,70	0,6215	5,60	10,44
in 1 h	4025	1182	37,29	335,9	626

27a. Äquivalent-Leitvermögen k/m einiger Elektrolyte bei 18° in wässriger Lösung.

(Nach F. Kohlrausch.)

m bedeutet den Gehalt von 1 Liter an Grammäquivalenten; vgl. Tab. 3a.

k ist das auf Quecksilber von 0° bezogene Leitvermögen der Lösung.

Die Grenzwerte und die geklammerten Werte für die Säuren sind graphisch extrapolirt; die letzteren unter der Annahme, dafs die ersten beobachteten Leitvermögen durch Unreinigkeit des Wassers herabgedrückt werden.

	KCl	NaCl	HCl	$\frac{1}{2}K_2SO_4$	$\frac{1}{2}MgSO_4$	$\frac{1}{2}H_2SO_4$
	$10^8\frac{k}{m}$	$10^8\frac{k}{m}$	$10^8\frac{k}{m}$	$10^8\frac{k}{m}$	$10^8\frac{k}{m}$	$10^8\frac{k}{m}$
Grenzwert etwa =	1230	1040	(3600)	1270	(1090)	(3700)
m=0,0001	1213	1025	(3540)	1250	1034	(3600)
0,0002	1209	1022	(3540)	1240	1015	(3540)
0,0005	1201	1016	(3530)	1224	976	(3460)
0,001	1193	1008	3520	1207	935	(3400)
0,002	1185	998	3510	1181	881	3300
0,005	1165	981	3500	1140	790	3090
0,01	1147	962	3470	1098	715	2900
0,02	1123	938	3440	1044	632	2690
0,05	1083	897	3380	959	532	2370
0,1	1047	865	3290	897	467	2120
0,2	1009	826	3200	832	408	1990
0,5	958	757	3060	736	330	1930
1	918	695	2820	672	271	1850
2	864	604	2370		202	1710
5		398	1420		82	1270
10			600			655
20						145
30						30

27b. Grenzwerte elektrolytischer Beweglichkeiten von Ionen in verdünnter wässriger Lösung bei 18°.

$u\cdot10^7$		$v\cdot10^7$	
H	300	OH	165
K	60	Cl	63
Na	41	Br	62
Li	33	J	62
NH_4	60	NO_3	58
Ag	52	ClO_3	52
$\frac{1}{2}$Ba	(52)	CHO_2	44
$\frac{1}{2}$Sr	(50)	$C_2H_3O_2$	33
$\frac{1}{2}$Ca	(46)	$\frac{1}{2}SO_4$	(66)
$\frac{1}{2}$Mg	(46)		
$\frac{1}{2}$Zn	(46)		
$\frac{1}{2}$Cu	(48)		

27c. Elektrostatisches Potential V in [C-G-S] und Schlagweite S

in Luft zwischen Kugeln vom Radius R cm (nach Baille, Quincke, Bichot und Blondlot, Paschen, Freyberg).

300 V gibt das Potential in Volt.

R	S = 0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0 cm
0,5 cm	V = 5,2	8,2	11,0	13,5	16	28	38	48	57	65	72	78	82	85
1,0	5,1	8,1	10,8	13,3	16	28	38	48	57	66	75	83	91	97
3,0					15	26	36	45	55	65	75	87	98	109

28. Einheiten des absoluten Mafssystems.

Grundgröfsen: Länge l, Masse m, Zeit t. Die übrigen Gröfsen drücken sich hierdurch in der Form aus:

$$l^\lambda \cdot m^\mu \cdot t^\tau.$$

λ, μ, τ sind die Dimensionen der Gröfsenart bezüglich Länge, Masse u. Zeit.

Zeiteinheit = 1 sec.

Zusammengehörige Einheiten für Länge und Masse sind:

dm, kg; cm, g; mm, mg.

Die Zahlen der letzten Spalte geben an, in welchem Verhältnis N eine Einheit wächst, wenn man von mm, mg zu cm, g oder von cm, g zu dm, kg übergeht.

Angaben im mm, mg-System (Gaufs-Weber) sind also durch N zu dividiren, um sie auf cm, g zu reduciren.

Die vorletzte Spalte enthält Namen gebräuchlicher Einheiten und gibt an, wie viele von diesen auf die [C-G-S]-Einheit gehen.

Das Gröfsenverhältnis: $\frac{\text{elektromagn. Einh.}}{\text{elektrostat. Einh.}}$ ist =

v für El.-Menge od. Strom
$1/v$ „ elektr. Potential
v^2 „ elektr. Kapacität
$1/v^2$ „ elektr. Widerstand,
wo im (C-G-S) System $v = 300 \cdot 10^8$.

	λ	μ	τ	1[C-G-S]-Einh. ist gleich	N
Winkel	0	0	0		1
Länge	1	0	0	1 Centim.	10
Lin. Krümmung	—1	0	0		$\frac{1}{10}$
Fläche	2	0	0		10^2
Volumen	3	0	0		10^3
Masse	0	1	0	1 Gramm	10^3
Dichtigkeit	—3	1	0		1
Zeit, Schwingungsdauer	0	0	1	1 Sekunde	1
Geschwindigkeit	1	0	—1		10
Wink.-Geschwind.	0	0	—1		1
Beschleunigung	1	0	—2		10
Winkelbeschleun.	0	0	—2		1
Kraft	1	1	—2	1 Dyne	10^4
Drehmoment, Direktionskraft	2	1	—2		10^5
Druck	—1	1	—2		10^2
Elasticitätsmodul	—1	1	—2		10^2
Kapillarkonstante	0	1	—2		10^3
Inn. Reibungskoeff.	—1	1	—1		10^2
Trägheitsmoment	2	1	0		10^5
Arbeit, Energie, Leb. Kraft, Wärmemenge	2	1	—2	1 Erg	10^5
Schwingungszahl, Tonhöhe	0	0	—1		1
Lichtbrech.-Verh.	0	0	0		1
Lichtdreh.-Konst.	—1	0	0		$\frac{1}{10}$
Elektrostat. System:					
Elektr.-Menge	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1	$\frac{1}{3}10^{-9}$ Coul.	10^3
Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1	300 Volt	10^2
Kapacität	1	0	0	$\frac{1}{9}10^{-11}$ Far.	10
Dielektr.-Konst.	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	—2	$\frac{1}{3}10^{-9}$ Amp.	10^3
Widerstand	—1	0	1	$9 \cdot 10^{11}$ Ohm	$\frac{1}{10}$
Elektromagn. System:					
Magnetpol	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		10^3
Magnet. Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		10^2
Stabmagnetismus	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		10^4
Magn. Intensität	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		10
Spec. Magn. (Vol.)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		10
Magnetisir.-Koeff.	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1	10 Amp.	10^2
Stromdichte	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	—1		1
Elektr.-Menge	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	10 Coul.	10^2
Elektroch. Äquiv.	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		10
El. Kraft, Potential	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	—2	10^{-8} Volt	10^3
Kapacität	—1	0	2	10^9 Farad	$\frac{1}{10}$
Widerstand	1	0	—1	10^{-9} Ohm	10
Spec. Widerstand	2	0	—1		10^2
Stromleistung	2	1	—3	10^{-7} Watt	10^5
El.-dyn. Potential, Selbstind. Koeff.	1	0	0	10^{-9} Quadr.	10

29. Atomgewichte. (Sauerstoff = 16,00.)

Aluminium	Al	27,0	Magnesium	Mg	24,3
Barium	Ba	137,1	Mangan	Mn	55,0
Blei	Pb	206,9	Natrium	Na	23,05
Bor	B	11,00	Nickel	Ni	58,7
Brom	Br	79,96	Phosphor	P	31,02
Cadmium	Cd	112,0	Platin	Pt	194,8
Calcium	Ca	40,00	Quecksilber	Hg	200,3
Chlor	Cl	35,45	Sauerstoff	O	16,00
Chrom	Cr	52,1	Schwefel	S	32,06
Eisen	Fe	56,00	Silber	Ag	107,93
Fluor	F	19,0	Silicium	Si	28,4
Gold	Au	197,2	Stickstoff	N	14,04
Jod	J	126,86	Strontium	Sr	87,6
Kalium	K	39,14	Wasserstoff	H	1,006
Kohlenstoff	C	12,00	Zink	Zn	65,3
Kupfer	Cu	63,4	Zinn	Sn	118,1
Lithium	Li	7,02			

30. Geographische Lage und Höhe einiger Orte.

Die östl. geogr. Länge von Berlin ist um 13°,39 kleiner, diejenige von Ferro um 17°,66 gröſser als von Greenwich.

	Östl. von Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer		Östl. von Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer
	0	0	m		0	0	m
Aachen[1])	6,1	50,78	180	Jena	11,6	50,94	160
Amsterdam ..	4,9	52,37		Innsbruck ...	11,4	47,27	570
Basel	7,6	47,56	260	Karlsruhe ...	8,4	49,01	120
Berlin	13,4	52,50	40	Kiel	10,2	54,34	
Bern	7,4	46,95	550	Köln	7,0	50,94	40
Bonn	7,1	50,73	50	Königsberg ..	20,5	54,71	
Braunschweig	10,5	52,27	100	Kopenhagen.	12,6	55,69	
Bremen	8,8	53,08		Leipzig	12,4	51,34	100
Breslau	17,0	51,11	130	Madrid	— 3,7	40,41	660
Brüssel......	4,4	50,85	90	Mailand	9,2	45,47	130
Cassel.......	9,5	51,32	160	Marburg[2]) ...	8,8	50,81	210
Danzig	18,7	54,35		München....	11,6	48,15	530
Darmstadt...	8,7	49,87	140	Münster	7,6	51,97	60
Dorpat	26,7	58,38	50	Paris	2,3	48,83	60
Dresden	13,7	51,04	100	Pest........	19,1	47,50	70
Erlangen	11,0	49,60	320	Petersburg ..	30,3	59,94	
Frankfurt a.M.	8,7	50,11	90	Prag	14,4	50,09	200
Freiburg i. B.	7,8	47,96	280	Rom	12,4	41,90	30
Gieſsen	8,6	50,59	140	Rostock	12,1	54,09	
Göttingen ...	9,9	51,53	130	Stockholm ..	18,1	59,34	
Graz	15,4	47,08	360	Straſsburg ..	7,8	48,58	150
Greenwich...	0,0	51,48		Stuttgart ...	9,2	48,78	270
Greifswald...	13,4	54,10		Tübingen[3]) ..	9,1	48,52	350
Halle	12,0	51,49	100	Washington.	—77,0	38,89	
Hamburg	10,0	53,55		Wien.......	16,4	48,23	180
Hannover....	9,7	52,38	70	Würzburg...	9,9	49,79	170
Heidelberg ..	8,7	49,41	100	Zürich[4])	8,6	47,38	460

1) 160 bis 200 m. 2) 180 bis 240 m. 3) 320 bis 380 m. 4) 420 bis 500 m.

31. Deklination der Sonne, Zeitgleichung und Sternzeit für den mittleren Mittag des 15. Meridians östl. v. Greenwich (mitteleuropäische Einheits-Zeit). S. noch Tab. 32.

Die Sternzeit um Mittag wächst in einem Tage um 3 min 56,6 sec = 236,6 sec.

Mittlere Orts-Zeit = Sonnenzeit + Zeitgleichung.

* Die eingeklammerten Daten gelten für Schaltjahre.

	Deklination der Sonne	Diff. für 1 t.	Zeitgleichung	Sternzeit am Mittag
*	0	0	m s	h m s
Jan. 0 (1)	— 23,10	,092	+ 3 15	18 38 42
5 (6)	— 22,64	,130	5 34	58 24
10(11)	— 21,99	,166	7 42	19 18 7
15(16)	— 21,16	,200	9 36	37 50
20(21)	— 20,16	,230	11 13	57 33
25(26)	— 19,01	,260	12 33	20 17 16
30(31)	— 17,71	,288	13 32	36 58
Febr. 4 (5)	— 16,27	,308	14 10	56 41
9(10)	— 14,73	,330	14 27	21 16 24
14(15)	— 13,08	,348	14 25	36 7
19(20)	— 11,34	,364	14 5	55 49
24(25)	— 9,52	,374	13 28	22 15 32
März 1	— 7,65	,384	12 36	35 15
6	— 5,73	,390	11 31	54 58
11	— 3,78	,394	10 15	23 14 41
16	— 1,81	,394	8 52	34 23
21	+ 0,16	,394	7 23	54 6
26	2,13	,390	5 52	0 18 49
31	4,08	,384	4 19	33 32
Apr. 5	6,00	,374	2 49	53 14
10	7,87	,364	1 23	1 12 57
15	9,69	,352	+ 0 4	32 40
20	11,45	,334	— 1 5	52 23
25	13,12	,318	— 2 4	2 12 5
30	14,71	,296	— 2 52	31 48
Mai 5	16,19	,276	— 3 27	51 31
10	17,57	,250	— 3 48	3 11 14
15	18,82	,224	— 3 53	30 57
20	19,94	,196	— 3 45	50 39
25	20,92	,164	— 3 23	4 10 22
30	21,74	,136	— 2 49	30 5
Juni 4	22,42	,100	— 2 4	49 48
9	22,92	,068	— 1 11	5 9 30
14	23,26	,034	— 0 10	29 13
19	23,43	,000	+ 0 55	48 56
24	23,43	,034	+ 2 0	6 8 39
29	+ 23,26		+ 3 2	6 28 22

	Deklination der Sonne	Diff. für 1 t.	Zeitgleichung	Sternzeit am Mittag
	0	0	m s	h m s
Juli 4	+ 22,92	,102	+ 4 0	6 48 4
9	22,41	,136	4 49	7 7 47
14	21,73	,164	5 29	27 30
19	20,91	,194	5 58	47 13
24	19,94	,222	6 13	8 6 56
29	18,83	,248	6 13	26 38
Aug. 3	17,59	,272	5 57	46 21
8	16,23	,294	5 27	9 6 4
13	14,76	,314	4 42	25 47
18	13,19	,330	3 44	45 29
23	11,54	,346	2 33	10 5 12
28	9,81	,360	+ 1 11	24 55
Sept. 2	8,01	,370	— 0 20	44 38
7	6,16	,378	— 1 59	11 4 21
12	4,27	,384	— 3 41	24 3
17	2,35	,390	— 5 26	43 46
22	+ 0,40	,390	— 7 12	12 3 29
27	— 1,55	,388	— 8 55	23 12
Okt. 2	— 3,49	,386	—10 34	42 54
7	— 5,42	,380	—12 4	13 2 37
12	— 7,32	,374	—13 24	22 20
17	— 9,19	,360	—14 31	42 3
22	— 10,99	,348	—15 23	14 1 45
27	— 12,73	,330	—16 0	21 28
Nov. 1	— 14,38	,312	—16 18	41 11
6	— 15,94	,288	—16 16	15 0 54
11	— 17,38	,266	—15 52	20 37
16	— 18,71	,236	—15 7	40 19
21	— 19,89	,206	—14 2	16 0 2
26	— 20,92	,174	—12 36	19 45
Dec. 1	— 21,79	,140	—10 53	39 28
6	— 22,49	,102	— 8 54	59 10
11	— 23,00	,064	— 6 40	17 18 53
16	— 23,32	,026	— 4 17	38 36
21	— 23,45	,012	— 1 49	58 19
26	— 23,39	,054	+ 0 41	18 18 2
31	— 23,12		+ 3 8	18 37 44

32. Korrektionstafel für den Anfang des Jahres.

Jahr	Korrektion
	Tage
1894	+ 0,425
1895	+ 0,182
1896	+ 0,941
1897	+ 0,699
1898	+ 0,457
1899	+ 0,214
1900	— 0,028
1901	— 0,270
1902	— 0,512
1903	— 0,755
1904	+ 0,003
1905	— 0,239

33. Halbmesser der Sonne.

Datum	Halbmesser
	0
Januar 1.	0,272
Februar 1.	0,271
März 1.	0,269
April 1.	0,267
Mai 1.	0,265
Juni 1.	0,263
Juli 1.	0,263
August 1.	0,263
Septbr. 1.	0,265
Oktbr. 1.	0,267
Novbr. 1.	0,269
Decbr. 1.	0,271

34. Mittlere Refraktion eines Gestirns.

Höhe	Refraktion
0	0
5	0,16
7	0,12
10	0,09
15	0,06
20	0,044
30	0,028
40	0,019
50	0,013
60	0,009
70	0,006
80	0,003
90	0,000

35. Mittlere Örter einiger Hauptsterne für 1897,0.

	Rektascension			Jährl. Zuwachs	Deklination			Jährl. Zuwachs
	h	min	sec	sec	0	′	″	″
α Cassiopeiae	0	34	39,6	+ 3,37	55	58	21	+ 19,8
α Arietis	2	1	21,9	+ 3,37	22	58	32	+ 17,2
α Persei	3	16	58,0	+ 4,26	49	29	40	+ 13,1
α Tauri (Aldebaran)	4	30	0,5	+ 3,44	16	18	7	+ 7,5
α Aurigae (Capella)	5	9	4,8	+ 4,43	45	53	35	+ 4,0
α Orionis	5	49	35,7	+ 3,25	7	23	16	+ 0,9
α Can. maj. (Sirius)	6	40	36,7	+ 2,64	— 16	34	30	— 4,7
α Gemin. (Castor)	7	28	1,5	+ 3,84	32	6	52	— 7,6
α Can. min. (Procyon)	7	33	54,6	+ 3,14	5	29	20	— 9,0
α Hydrae	9	22	31,6	+ 2,95	— 8	12	44	— 15,4
α Leonis (Regulus)	10	2	53,2	+ 3,20	12	28	14	— 17,5
α Ursae maj.	10	57	22,4	+ 3,75	62	18	25	— 19,4
β Leonis	11	43	48,4	+ 3,06	15	8	52	— 20,1
α Virginis (Spica)	13	19	45,9	+ 3,15	— 10	37	25	— 18,9
α Bootis (Arcturus)	14	10	57,8	+ 2,73	19	43	8	— 18,8
α Coronae (Gemma)	15	30	19,6	+ 2,54	27	3	41	— 12,3
α Scorpii (Antares)	16	23	5,4	+ 3,67	— 26	12	13	— 8,3
α Ophiuchi	17	30	9,2	+ 2,78	12	38	6	— 2,8
α Lyrae (Wega)	18	33	27,1	+ 2,03	38	41	16	+ 3,2
α Aquilae (Attair)	19	45	45,5	+ 2,93	8	35	47	+ 9,3
α Cygni	20	37	55,2	+ 2,04	44	54	44	+ 12,8
α Piscium (Fomalhaut)	22	51	57,5	+ 3,32	— 30	10	6	+ 19,0
α Pegasi	22	59	37,8	+ 2,98	14	39	4	+ 19,3
α Urs. min. (Polaris)	1	21	18,7	+ 24,6	88	45	30	+ 18,8
δ Ursae minoris	18	5	31,3	— 19,5	86	36	46	+ 0,5

36. Verschiedene Zahlen.

(Die eingeklammerten Brüche bedeuten Näherungswerte.)

$\pi = 3{,}1416$ ($^{22}/_{7}$); $\pi^2 = 9{,}8696$; $1/\pi = 0{,}31831$; $\log \pi = .49715$.
Basis der natürlichen Logarithmen $e = 2{,}7183$; $\log e = .43429$.
Modul der nat. Logarithmen $M = 1/\log e = 2{,}3026$; $\log M = .36222$.
Der Winkel, für welchen der Bogen dem Halbmesser gleich ist:
$= 57{,}2958^0 = 3437{,}75' = 206265''$.
log = 1.758123   3.536274   5.314425.
Verhältnis des wahrscheinlichen zum mittleren Fehler = 0,6745 ($^{2}/_{3}$).
1 Pariser Fuſs = 0,32484 m ($^{13}/_{40}$); 1 m = 3,0784 Pariser Fuſs.
1 Pariser Linie = 2,2558 mm ($^{9}/_{4}$); 1 mm = 0,44330 Pariser Linien.
1 Rhein. Fuſs = 0,31385 m ($^{10}/_{32}$); 1 m = 3,1862 Rhein. Fuſs.
1 Engl. Fuſs = 0,30479 m ($^{7}/_{23}$); 1 m = 3,2809 Engl. Fuſs.
1 Geogr. Meile = 7,4204 km ($^{30}/_{4}$); 1 km = 0,13476 Geogr. Meile.
Die halbe groſse Axe der Erde = 6378,2 km,
die halbe kleine Axe „ „ = 6356,5 km,
der mittlere Halbmesser „ „ = 6367,4 km.
Mittlere Länge des bürgerlichen Jahres = 365 t 5 h 48,8 min.
Sterntag = mittlerer Tag — 3 min 55,9 sec = 0,99727 mittl. Tag.
Schallgeschwindigkeit bei 0° in trockener Luft = 331 m/sec.
Ausdehnungskoefficient der Gase = 0,00367 ($^{1}/_{273}$).
1 gr-Gew. unter 45° Breite = 980,6 cm g sec^{-2}.
1 Atm. Druck = 1033 gr-G/cm^2 = 1013200 cm^{-1} g sec^{-2}.
1 Wasser-gr-Cal. = 427 gr-G · m = 41 900 000 cm^2 g sec^{-2}.
Latente Wärme des Wassers = 79,9; des Wasserdampfes = 536.
Specifische Wärme der Luft bei konstantem Druck = 0,237.
Verhältnis der beiden spec. Wärmen für Luft oder Wasserstoff = 1,40.
Kapillarkonstante d. Wassers 7,6; Alkohol 2,3; Quecksilber 50 mg/mm.
Verhältnis des Molekulargewichtes zur Dampfdichte = 28,9.
Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume = 300 000 km/sec.
Brechungsverhältnis des Lichtes in Luft = 1,00029.
Wellenlänge des Natriumlichtes (*D* Fraunhofer) = 0,0005893 mm.
Quarz von 1 mm Dicke dreht bei 20° das Natriumlicht um 21,72°.
Verhältnis der el.-magn. zur el.-stat. Elektricitätseinheit = $300 \cdot 10^8$.
1 Ampere = 0,1 $cm^{1/2} g^{1/2} sec^{-1}$ el.-magn. = $300 \cdot 10^7$ $cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-2}$ el.-stat. Einh./sec. = 1,118 mg Silber/sec.
1 Ohm = 10^9 cm sec^{-1} el.-magn. = $1/9 \cdot 10^{-11} cm^{-1}$ sec el.-stat.
= 1,063 m/mm^2 *Hg* 0° = 1,014 B. A. E.
1 leg. Ohm = 1,060 m/mm^2 *Hg* 0° = 1,060 Siem. E.
1 Volt = 10^8 $cm^{3/2} g^{1/2} sec^{-2}$ el.-magn. = 1/300 $cm^{1/2} g^{1/2} sec^{-1}$ el.-stat.
1 leg. Volt = 1 leg. Ohm × Am. = 0,997 theor. Volt.
Bunsen = 1,9; Daniell = 1,1 bis 1,2; Clark bei 15° = 1,433 theor. Volt.
1 Volt Am. oder Watt = 0,102 kg-G · m/sec = 0,24 Wasser-gr-Cal./sec.

37. Quadrate. Quadrat- und Kubikwurzeln. Verwandlung von Bogengraden in absolutes Winkelmafs. Hilfstafel für die Wheatstone-Kirchhoff'sche Brücke.

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$	$\frac{n}{100-n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$	$\frac{n}{100-n}$
				0,		50	2500	7,071	3,684	0,873	1,000
1	1	1,000	1,000	,0175	0,0101	51	2601	7,141	3,708	0,890	1,041
2	4	1,414	1,260	,0349	0,0204	52	2704	7,211	3,733	0,908	1,083
3	9	1,732	1,442	,0524	0,0309	53	2809	7,280	3,756	0,925	1,128
4	16	2,000	1,587	,0698	0,0417	54	2916	7,348	3,780	0,942	1,174
5	25	2,236	1,710	,0873	0,0526	55	3025	7,416	3,803	0,960	1,222
6	36	2,449	1,817	,1047	0,0638	56	3136	7,483	3,826	0,977	1,273
7	49	2,646	1,913	,1222	0,0753	57	3249	7,550	3,849	0 995	1,326
8	64	2,828	2,000	,1396	0,0870	58	3364	7,616	3,871	1,012	1,381
9	81	3,000	2,080	,1571	0,0989	59	3481	7,681	3,893	1,030	1,439
10	100	3,162	2,154	,1745	0,1111	60	3600	7,746	3,915	1,047	1,500
11	121	3,317	2,224	,1920	0,1236	61	3721	7,810	3,936	1,065	1,564
12	144	3,464	2,289	,2094	0,1364	62	3844	7,874	3,958	1,082	1,632
13	169	3,606	2,351	,2269	0,1494	63	3969	7,937	3,979	1,100	1,703
14	196	3,742	2,410	,2443	0,1628	64	4096	8,000	4,000	1,117	1,778
15	225	3,873	2,466	,2618	0,1765	65	4225	8,062	4,021	1,134	1,857
16	256	4,000	2,520	,2793	0,1905	66	4356	8,124	4,041	1,152	1,941
17	289	4,123	2,571	,2967	0,2048	67	4489	8,185	4,062	1,169	2,030
18	324	4,243	2,621	,3142	0,2195	68	4624	8,246	4,082	1,187	2,125
19	361	4,359	2,668	,3316	0,2346	69	4761	8,307	4,102	1,204	2,226
20	400	4,472	2,714	,3491	0,2500	70	4900	8,367	4,121	1,222	2,333
21	441	4,583	2,759	,3665	0,2658	71	5041	8,426	4,141	1,239	2,448
22	484	4,690	2,802	,3840	0,2821	72	5184	8,485	4,160	1,257	2,571
23	529	4,796	2,844	,4014	0,2987	73	5329	8,544	4,179	1,274	2,704
24	576	4,899	2,884	,4189	0,3158	74	5476.	8,602	4,198	1,292	2,846
25	625	5,000	2,924	,4363	0,3333	75	5625	8,660	4,217	1,309	3,000
26	676	5 099	2,962	,4538	0,3514	76	5776	8,718	4,236	1,326	3,167
27	729	5,196	3,000	,4712	0,3699	77	5929	8,775	4,254	1,344	3,348
28	784	5,292	3,037	,4887	0,3889	78	6084	8,832	4,273	1,361	3,545
29	841	5,385	3,072	,5061	0,4085	79	6241	8,888	4,291	1,379	3,762
30	900	5,477	3,107	,5236	0,4286	80	6400	8,944	4,309	1,396	4,00
31	961	5,568	3,141	,5411	0,4493	81	6561	9,000	4,327	1,414	4,26
32	1024	5,657	3,175	,5585	0,4706	82	6724	9,055	4,344	1,431	4,56
33	1089	5,745	3,208	,5760	0,4925	83	6889	9,110	4,362	1,449	4 88
34	1156	5,831	3,240	,5934	0,5152	84	7056	9,165	4,380	1,466	5,25
35	1225	5,916	3,271	,6109	0,538	85	7225	9,220	4,397	1,484	5,67
36	1296	6,000	3,302	,6283	0,562	86	7396	9,274	4,414	1,501	6,14
37	1369	6,083	3,332	,6458	0,587	87	7569	9,327	4,431	1,518	6,69
38	1444	6,164	3,362	,6632	0,613	88	7744	9,381	4,448	1,536	7,33
39	1521	6,245	3,391	,6807	0,639	89	7921	9,434	4,465	1,553	8,09
40	1600	6,325	3,420	,6981	0,667	90	8100	9,487	4,481	1,571	9,00
41	1681	6,403	3,448	,7156	0,695	91	8281	9,539	4,498	1,588	10,11
42	1764	6,481	3,476	,7330	0,724	92	8464	9,592	4,514	1,606	11,50
43	1849	6,557	3,503	,7505	0,754	93	8649	9,644	4,531	1,623	13,29
44	1936	6,633	3,530	,7679	0,786	94	8836	9,695	4,547	1,641	15,67
45	2025	6,708	3,557	,7854	0,818	95	9025	9.747	4,563	1,658	19,0
46	2116	6,782	3,583	,8029	0,852	96	9216	9,798	4,579	1,676	24,0
47	2209	6,856	3,609	,8203	0,887	97	9409	9,849	4,595	1,693	32,3
48	2304	6,928	3,634	,8378	0,923	98	9604	9,899	4,610	1,710	49,0
49	2401	7,000	3,659	,8552	0,961	99	9801	9,950	4,626	1,728	99,0
50	2500	7,071	3,684	,8727	1,000	100	10000	10,000	4,642	1,745	∞

38. Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	24
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	19
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7

N. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Diff.

Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	[illegible]
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	[illegible]
91	9590	9595	9600	9605	9609	[illegible]	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	[illegible]	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
100	0 0000	0043	0087	0130	0173	0217	0260	0303	0346	0389	43
101	0 0432	0475	0518	0561	0604	0647	0689	0732	0775	0817	43
102	0 0860	0903	0945	0988	1030	1072	1115	1157	1199	1242	42
103	0 1284	1326	1368	1410	1452	1494	1536	1578	1620	1662	42
104	0 1703	1745	1787	1828	1870	1912	1953	1995	2036	2078	42
105	0 2119	2160	2202	2243	2284	2325	2366	2407	2449	2490	41
106	0 2531	2572	2612	2653	2694	2735	2776	2816	2857	2898	40
107	0 2938	2979	3019	3060	3100	3141	3181	3222	3262	3302	40
108	0 3342	3383	3423	3463	3503	3543	3583	3623	3663	3703	40
109	0 3743	3782	3822	3862	3902	3941	3981	4021	4060	4100	40
110	0 4139	4179	4218	4258	4297	4336	4376	4415	4454	4493	39
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.